MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN
VON

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

ERICH HECKE
IN HAMBURG

BARTEL L. VAN DER WAERDEN
IN LEIPZIG

114. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1937

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRUNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFUHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN
VON

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

ERICH HECKE
IN HAMBURG

BARTEL L. VAN DER WAERDEN
IN LEIPZIG

114. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1937

Inhalt des einhundertundvierzehnten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I.

Von

E. Hecke in Hamburg.

Inhaltsverzeichnis.

Die Tatsache, daß die meisten Dirichlet-Reihen mit einer Funktionalgleichung des bekannten Typus aus Modulfunktionen hervorgehen und daß viele eine Eulersche Produktentwicklung haben, vermöge der sie mit den Primzahlen zusammenhängen, hat mich dazu geführt, diese Zusammenhänge genauer zu untersuchen. Die grundsätzliche Klärung der Beziehungen zwischen Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung und Modulfunktionen — allgemeiner: automorphen Funktionen — habe ich in einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) gegeben. Ich werde jetzt zeigen, daß auch das Auftreten des Euler-Produktes bei diesen Funktionen nicht auf die bekannten Beispiele beschränkt ist, sondern eine neue Eigenschaft der Modulfunktionen ist, die sich nach Adjunktion gewisser kommutativer Matrizen (deren Elemente Konstanten sind) in großer Allgemeinheit überraschend einfach durch ein Euler-Produkt in diesem Matrizenring formulieren läßt.

Die so gefundenen Sätze der Funktionentheorie scheinen speziell für die Theorie der ganzzahligen quadratischen Formen von $2k$ Variabeln von

[1]) E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Annalen 112 (1936), S. 664.

Bedeutung zu sein, wo ihre Anwendung ganz neuartige Tatsachen aufdeckt, die man bisher noch nicht bemerkt hat. Sie sind als Verallgemeinerung des bei binären Formen bekannten Sachverhaltes zu bezeichnen, daß die Zerlegung der rationalen Zahlen im quadratischen Körper durch die Gruppe der Idealklassen beherrscht wird; es sind schließlich rein arithmetische Aussagen, deren endgültige Formulierung und Klärung Aufgabe der Algebra ist. Zunächst handelt es sich um definite Formen; sie hängen durch die mehrfachen Thetareihen mit den Modulfunktionen zusammen, und die erwähnte Theorie gilt, obwohl bekanntlich eine Kompositionstheorie im bisherigen Sinne nur für einige kleine Werte der Variabelnzahl möglich ist. Inzwischen wurde von Herrn B. Schoeneberg [2]) gezeigt, daß man Reihen ähnlich wie die Thetareihen auch mit indefiniten quadratischen Formen von vier Variabeln bilden kann, und daß diese Reihen auch Modulfunktionen sind. Somit gilt die Theorie auch für diese indefiniten Formen. Andererseits reicht sie über den Bereich der quadratischen Formen hinaus, da es Modulfunktionen gibt, die sich nicht durch Thetareihen darstellen lassen.

Die vorliegende Arbeit ist rein funktionentheoretisch. Eine kurze Darstellung der Grundgedanken und einige nicht-triviale Beispiele habe ich an zwei Stellen [3]) gegeben, so daß hier eine weitere allgemeine Orientierung nicht erforderlich ist. Ich behandle in dem vorliegenden 1. Teile nur die Modulfunktionen der ersten Stufe, wo die Verhältnisse viel durchsichtiger als bei höherer Stufe liegen.

In § 1 stelle ich die nötigen Begriffe und Sätze aus der Theorie der Modulfunktionen (gleich für beliebige Stufe) zusammen. § 2 bringt das wichtigste Hilfsmittel, die Einführung linearer Funktional-Operatoren aus der Transformationstheorie, die in einem speziellen Falle, für die Integrale 1. Gattung höherer Stufe, schon von Hurwitz in seiner Theorie der Modularkorrespondenzen benutzt worden sind. Die entscheidende Eigenschaft ihrer Vertauschbarkeit ist aber noch nicht bemerkt worden. In § 3 wird die Wirkung dieser Operatoren auf das System der Modulformen diskutiert und das Euler-Produkt für die Matrix aus Dirichlet-Reihen aufgestellt. In § 4 werden dann die gewöhnlichen Dirichlet-Reihen mit Euler-Produkt als die charakteristischen Wurzeln dieser Matrix gekennzeichnet, und ihr Zusammenhang mit den Eigenfunktionen jener Operatoren hergestellt. Die Hauptresultate sind Satz 15 und 16 in § 3, sowie

---

[2]) B. Schoeneberg, Indefinite Quaternionen und Modulfunktionen, Math. Annalen 113 (1936), S. 380.

[3]) E. Hecke, Die Primzahlen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Danske Vidensk. Selsk. Matematisk-fysiske Meddelelser 13, 10 (1935), und mein Vortrag in den Berichten des Intern. Math. Kongresses. Oslo 1936.

Satz 27 in § 4, die ich so formuliert habe, daß sie ohne Kenntnis des Übrigen verständlich sind.

Der 2. Teil wird der Theorie der Funktionen der Stufe Q gewidmet sein. Diese hat wegen der Anwendung auf quadratische Formen ein stärkeres Interesse. Es spielt in ihr die endliche binäre Modulargruppe mod Q eine wichtige Rolle. Indessen läßt sich, wie ich inzwischen gesehen habe, die Theorie für beliebige Stufe Q ohne explizite Kenntnis der einfachen Charaktere jener Modulargruppe begründen.

§ 1.

Allgemeines über Modulformen der Stufe Q und zugehörige Dirichlet-Reihen.

Für eine natürliche Zahl Q bezeichne $\bar{\Gamma}(Q)$ das System der homogenen Modulsubstitutionen

$$\begin{aligned} \omega_1' &= a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_2' &= c\omega_1 + d\omega_2, \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{Q}.$$

Wir schreiben abgekürzt

$$(\omega_1', \omega_2') = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (\omega_1, \omega_2).$$

$\bar{\Gamma}(1)$ ist also die homogene Modulgruppe. Ebenso sei $\Gamma(Q)$ die Menge der inhomogenen Substitutionen

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{Q}.$$

Für $Q \geqq 3$ sind $\Gamma(Q)$ und $\bar{\Gamma}(Q)$ einstufig isomorph. Die zugehörigen Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

werden in der üblichen Weise durch Multiplikation miteinander verknüpft.

Sei weiter k eine ganze rationale Zahl. Unter einer (algebraischen) Modulform $f(\omega_1, \omega_2)$ der Stufe Q und der Dimension $-k$ versteht man eine analytische Funktion der beiden komplexen Variabeln ω_1, ω_2 mit den Eigenschaften:

a) Im Gebiet $\omega_2 \neq 0$, $\Re\left(\frac{\tau}{i}\right) > 0$ mit $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ist f eindeutig und bis auf Pole in τ regulär.

b) Für $\lambda \neq 0$ ist

$$f(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-k} f(\omega_1, \omega_2).$$

c) f ist invariant bei $\bar{\Gamma}(Q)$:

$$f(L(\omega_1, \omega_2)) \equiv f(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = f(\omega_1, \omega_2) \text{ wenn } L \subset \bar{\Gamma}(Q).$$

d) Da $f(M(\omega_1, \omega_2))$ auch bei $\overline{\Gamma}(Q)$ invariant ist, wenn $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \subset \overline{\Gamma}(1)$, so ist $\omega_2^k f(M(\omega_1, \omega_2))$, was nur von $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ abhängt, eine periodische Funktion von τ mit der Periode Q. Wir fordern nun, daß hierfür eine konvergente Fourierentwicklung existieren soll

$$(1) \qquad \omega_2^k f(M(\omega_1, \omega_2)) = \sum_n a_n z_Q^n \qquad \left(z_Q = e^{\frac{2\pi i \tau}{Q}}\right)$$

in welcher nur endlich viele negative Exponenten n auftreten. Diese Reihe ändert sich offenbar nicht, wenn man $M \subset \overline{\Gamma}(1)$ ersetzt durch LM, wo $L \subset \overline{\Gamma}(Q)$. Ihr Verhalten bei $\tau = \infty$ beschreibt das Verhalten von $f(\omega_1, \omega_2)$ bei dem rationalen Randpunkt (p, r) (und den damit nach $\overline{\Gamma}(Q)$ äquivalenten Punkten). Die Bezeichnung für das Verhalten von $f(\omega_1, \omega_2)$ in den rationalen Spitzen (p, r) übertragen wir einfach von der Reihe (1), gemessen in z_Q (regulär, Pol, Nullstelle usw.). Der Name Spitze wird bekanntlich wegen der Gestalt des Fundamentalbereiches von $\overline{\Gamma}(Q)$ in der Umgebung des Punktes $\frac{p}{r}$ gebraucht.

Mit der Funktion $f(\omega_1, \omega_2)$ ist eindeutig verknüpft die Funktion der einen Variabeln $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$

$$(2) \qquad \omega_2^k f(\omega_1, \omega_2) = f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right),$$

welche ebenfalls als (inhomogen geschriebene) Modulform bezeichnet sei. Die Eigenschaft c) bedeutet für sie

$$\frac{f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)}{(c\tau + d)^k} = f(\tau), \text{ wenn } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ zu } \Gamma(Q).$$

e) Wenn überdies noch $f(\omega_1, \omega_2)$ bzw. $f(\tau)$ im Innern und in den rationalen Spitzen regulär sind, so heißen sie ganze Modulformen. Solche gibt es nur für $k \geqq 0$.

Eine Funktion $f(\omega_1, \omega_2)$ mit den Eigenschaften a) bis e) sowie auch $f(\tau)$ möge von nun ab **„von der Art $(-k, Q)$"** heißen. Und wenn sie in allen rationalen Spitzen verschwindet, so werde sie **„Spitzenform"** von der Art $(-k, Q)$ genannt.

Die einfachsten Formen der Art $(-k, Q)$ sind die Eisenstein-Reihen der Stufe Q; mit ganzzahligem a_1, a_2 sind sie definiert durch

$$(3) \qquad G_k(\tau, a_1, a_2, Q) = \sum_{m_i \equiv a_i (Q)}' (m_1 \tau + m_2)^{-k} \qquad (k \geqq 3).$$

Ihre Entwicklung bei $\tau = \infty$ ist

$$(4)\qquad G_k(\tau, a_1, a_2, Q)$$
$$= \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right) \sum_{\substack{n \equiv a_2 (Q) \\ n \neq 0}} n^{-k} + \frac{(-2\pi i)^k}{Q^k \cdot (k-1)!} \sum_{\substack{m\, n > 0 \\ m \equiv a_1 (Q)}} n^{k-1} (\operatorname{sgn} n) \zeta^{a_2 n} z_Q^{m n}$$

Dabei ist

$$\delta(x) = 1, \text{ wenn } x \text{ ganz rational, sonst } = 0.$$

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{Q}};\ \operatorname{sgn} x = \pm 1 \text{ mit } x \operatorname{sgn} x > 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Ihre Haupteigenschaften habe ich an anderer Stelle[4]) entwickelt, dort sind auch die Modifikationen der Fälle $k = 1, 2$ angegeben. Die beiden wichtigsten Tatsachen sind:

Satz 1. *Zu jeder Form $f(\tau)$ der Art $(-k, Q)$ gibt es eine lineare Kombination der Eisenstein-Reihen mit konstanten Koeffizienten, $E(\tau)$, so daß $f(\tau) - E(\tau)$ eine Spitzenform ist.*

Satz 2. *Jede Form in der linearen Schar der Eisenstein-Reihen, welche eine Spitzenform ist, verschwindet identisch.*

Speziell ist für die Stufe 1 bei $k = 4, 6, 8, \ldots$ nur je eine Reihe vorhanden:

$$(5)\qquad G_k(\tau) = \sum_{m_1, m_2}{}' (m_1 \tau + m_2)^{-k} = \alpha_k + \beta_k \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) z_1^n.$$

Dabei ist

$$\sigma_r(n) = \sum_{d \mid n,\, d > 0} d^r$$

die Summe der r-ten Teilerpotenzen von n,

$$\alpha_k = 2\zeta(k), \qquad \beta_k = 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}.$$

Die Summe (5) läßt sich auch in der symmetrischen Gestalt

$$G_k(\tau) = \tfrac{1}{2}\beta_k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n) z_1^{|n|}$$

schreiben, wenn $\sigma_{k-1}(0)$ die Zahl $\zeta(1-k)$ bedeutet.

G_4, G_6 sind bis auf numerische Faktoren die Weierstraßschen Invarianten:

$$g_2 = 60 G_4, \qquad g_3 = 140 G_6.$$

Neben G_4, G_6 ist die wichtigste Funktion der Stufe 1 die Diskriminante

$$\Delta(\tau) = e^{2\pi i \tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})^{24} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} (g_2^3 - 27 g_3^2).$$

Sie hat die Dimension -12, ist im Innern der oberen Halbebene $\neq 0$ und besitzt bei $\tau = \infty$ eine Nullstelle 1. Ordnung. Da G_4, G_6 die ein-

---

[4]) E. Hecke, Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe, Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927), S. 199.

zigen Formen von der Art $(-4, 1)$ und $(-6, 1)$ sind, so folgt leicht, daß man jede Form von der Art $(-k, 1)$ auf eine und nur eine Weise als Summe

$$\sum_n x_n \Delta^n \cdot G_{k-12n} \qquad \left(0 \leqq n \leqq \frac{k}{12},\quad k - 12n \neq 2\right)$$

mit konstanten x_n darstellen kann; hierbei ist $G_0 = 1$ zu setzen. Es folgt

Satz 3. *Die Anzahl der linear unabhängigen Formen von der Art $(-k, 1)$ ist Null für $k = 2$ und für alle ungeraden k. Für gerade $k \geqq 4$ ist sie*

$$\left[\frac{k}{12}\right] \qquad \textit{für} \quad k \equiv 2 \pmod{12},$$

$$\left[\frac{k}{12}\right] + 1 \quad \textit{für} \quad k \not\equiv 2 \pmod{12}.$$

In der Potenzreihe

$$f(\tau) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}$$

einer Form der Art $(-k, 1)$ ist natürlich, wenn $k > 0$, das konstante Glied a_0 durch die Gesamtheit der übrigen a_n eindeutig bestimmt. Eine später gebrauchte Methode wird etwa gegeben durch

Satz 4. *Es ist*

$$a_0 = \lim_{y=+0} i^k y^k f(iy) = i^k \lim_{y=0} y^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi n y}$$

(y konvergiert über positive Werte gegen 0), was sofort folgt aus

$$f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau).$$

Die Gruppe $\Gamma(Q)$ ist Normalteiler innerhalb $\Gamma(1)$, ebenso wie $\overline{\Gamma}(Q)$ in $\overline{\Gamma}(1)$. Die Faktorgruppen $\overline{\Gamma}(1)/\overline{\Gamma}(Q)$, $\Gamma(1)/\Gamma(Q)$ sind einstufig isomorph mit der binären homogenen bzw. inhomogenen Modulargruppe mod. Q, die mit $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$, $\mathfrak{M}(Q)$ bezeichnet seien. Die Ordnungen dieser endlichen Gruppen sind

$$(6) \qquad \mu(2) = 6 \quad ; \quad \mu(Q) = \frac{Q^3}{2} \prod_{q|Q} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \quad \text{für} \quad Q > 2,$$

$$\overline{\mu}(2) = \mu(2); \quad \overline{\mu}(Q) = 2\mu(Q).$$

Ferner ist die Anzahl der nach $\Gamma(Q)$ nicht-äquivalenten rationalen Spitzen

$$\sigma(Q) = \frac{1}{Q} \mu(Q).$$

Die absoluten Invarianten von $\Gamma(Q)$, d. h. die Formen der Dimension 0 der Stufe Q, welche ja nur vom Quotienten τ abhängen, bilden einen algebraischen Körper. Das Geschlecht $p(Q)$ desselben, das auch das Geschlecht der Gruppe $\Gamma(Q)$ heißt, hat den Wert

$$(7) \qquad p(Q) = 1 + \frac{\mu}{12Q}(Q - 6).$$

Aus den Spitzenformen der Art $(-2, Q)$ entstehen durch Integration nach τ genau die Integrale 1. Gattung dieses algebraischen Gebildes, die Anzahl dieser Spitzenformen ist also $= p(Q)$. Dazu treten noch $\sigma(Q) - 1$ durch Eisenstein-Reihen der Dimension -2 darstellbare Formen, so daß die Gesamtzahl aller linear unabhängigen Formen der Art $(-2, Q)$ gleich $p(Q) + \sigma(Q) - 1$ ist. Mit dem Riemann-Rochschen Satz ergibt sich auch die Anzahl der Formen der Art $(-k, Q)$ für $k \geqq 3$ zu

$$\frac{k}{12} \cdot \mu(Q) - p(Q) + 1, \tag{8}$$

außer, wenn $Q = 2$ und k ungerade ist. In letzterem Falle ist die Anzahl 0.

Da bei beliebigen Substitutionen aus $\overline{\Gamma}(1)$ eine Form der Art $(-k, Q)$ stets wieder in eine solche übergeht, so erfährt das volle System linear unabhängiger Formen der Art $(-k, Q)$ bei Substitutionen aus $\overline{\Gamma}(1)$ selbst lineare homogene Substitutionen, die in ihrer Gesamtheit offenbar eine Darstellung der endlichen Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ bilden. Für Q = Primzahl oder Quadrat einer solchen ist mit den Methoden der algebraischen Gruppentheorie der Charakter dieser Darstellung schon bestimmt worden[5]).

Für den Übergang zu Dirichlet-Reihen sind noch einige asymptotische Abschätzungen[4]) notwendig.

Satz 5. *Sei $\tau = x + iy$, $\bar{\tau} = x - iy$ mit reellem x, y. Dann gilt für jede Spitzenform der Art $(-k, Q)$ bei Annäherung an die reelle Achse $f(x + iy) = O(y^{-k/2})$ für $y \to 0$ gleichmäßig in x.*

Beweis: Das volle System unabhängiger dieser Formen f_l $(l = 1, 2, \ldots)$ mit festem k, Q setzt sich bei beliebigen Substitutionen aus $\overline{\Gamma}(1)$ linear homogen um. Es ist keine Einschränkung, wenn wir diese endliche Gruppe von Substitutionen gleich als unitär-orthogonal annehmen, so daß also

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_l |f_l(\omega_1, \omega_2)|^2$$

bei $\overline{\Gamma}(1)$ in sich übergeht. Da ferner $h(\tau) = |\tau - \bar{\tau}|^k$ bei $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus $\Gamma(1)$ in

$$h\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = |c\tau + d|^{-2k} h(\tau)$$

übergeht, bleibt

$$g(\tau) = h(\tau) \cdot |\omega_2|^{2k} \cdot H(\omega_1, \omega_2)$$

bei $\overline{\Gamma}(1)$ absolut invariant. Im Fundamentalbereich der Modulgruppe $\Gamma(1)$ ist diese Funktion aber in jedem Punkte stetig und in der Umgebung der Spitze $\tau = \infty$, da die f_l Spitzenformen sind, auch noch beschränkt.

[5]) Vgl. die Arbeiten von H. Feldmann [Abh. Mathem. Sem. Hamburg 8 (1931)] und H. Spies [Math. Annalen 111 (1935)].

Mithin ist auch in der ganzen oberen Halbebene die Funktion $g(\tau)$ beschränkt, und daraus folgt Satz 5.

Satz 6. *Bei jeder Form der Art* $(-k, Q)$ *ist der Koeffizient* a_n *in* (1) *für* $n \to \infty$

(9) $$a_n = O(n^{k-1+\varepsilon}) \text{ für jedes } \varepsilon > 0, \text{ wenn } k \geqq 2.$$

Ist f *noch Spitzenform, so ist (auch noch für* $k = 1$*)*

(10) $$a_n = O(n^{k/2}).$$

Beweis: Der zweite Teil folgt aus der Integraldarstellung

(11) $$a_n = \frac{1}{Q}\int_{\tau_0}^{\tau_0+Q} f(\tau)\, e^{-2\pi i\frac{n\tau}{Q}}\, d\tau = e^{-2\pi i\frac{n\tau_0}{Q}} \cdot \frac{1}{Q}\int_0^Q f(\tau_0+x)\, e^{2\pi i\frac{nx}{Q}}\, dx$$

mit $\tau_0 = \frac{i}{n}$ aus Satz 5. Für die Eisenstein-Reihen ist nach (4) der Satz evident, und nach Satz 1 folgt dann der erste Teil der Behauptung.

Für $k = 1$ gilt allgemein nur die Abschätzung (10), welche schwächer ist als (9).

Für Koeffizientensummen besteht der schärfere

Satz 7. *Bei jeder Spitzenform der Art* $(-k, Q)$

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i\frac{n\tau}{Q}}$$

gilt für $n \to \infty$

$$\sum_{1\leqq m\leqq n} a_m = O(n^{k/2}\log n),$$

$$\sum_{1\leqq m\leqq n} |a_m|^2 = O(n^k),$$

$$\sum_{1\leqq m\leqq n} |a_m| = O\left(n^{\frac{k+1}{2}}\right).$$

Beweis: Nach (11) ist mit $\tau_0 = \frac{iQ}{n}$

$$\sum_{1\leqq m\leqq n} a_m = \frac{1}{Q}\int_{\tau_0}^{\tau_0+Q} f(\tau)\, \frac{1-e^{-2\pi i\frac{n+1}{Q}\tau}}{1-e^{-2\pi i\frac{\tau}{Q}}}\, d\tau$$

$$= O\left(n^{\frac{k}{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\left|1-e^{\frac{2\pi}{n}+2\pi i x}\right|}\right).$$

Hier ist schließlich mit $\alpha = e^{\frac{2\pi}{n}}$

$$J_n = \int_0^1 \frac{dx}{|1-\alpha e^{2\pi i x}|} = O(\log n).$$

Denn

$$J_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos 2\pi x + \alpha^2}} = O\left(\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - 2\alpha u + \alpha^2}\cdot\sqrt{1-u^2}}\right)$$

$$= O\left(\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1+\alpha^2 - 2\alpha u)(1-u)}}\right) = O\left(\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(2\alpha v + (1-\alpha)^2)}}\right)$$

$$= O\left(\int_0^{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2}} \frac{dv}{\sqrt{v(v+1)}}\right) = O\left(\log\frac{1}{\alpha - 1}\right) = O(\log n).$$

Damit folgt die erste Aussage von Satz 7.

Weiter ist bekanntlich

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 e^{-4\pi\frac{my}{Q}} = \frac{1}{Q}\int_0^Q |f^2(x+iy)|\,dx = O(y^{-k}),$$

und daher auch der Teil der Summe mit $m \leqq n$ für $y = \frac{1}{n}$ gleich $O(n^k)$. Das ist die zweite Aussage von Satz 7, und hieraus ergibt sich durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung auch die dritte Aussage.

Man ordne jetzt jeder Form der Stufe $Q: f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_Q^n$ die eindeutig bestimmte Dirichlet-Reihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

zu (in der also das Glied a_0 nicht vorkommt). Diese Reihe ist nach Satz 6 in der Halbebene $\Re(s) > k$ absolut konvergent (wenn $k \geqq 2$); ist f eine Spitzenform, so besteht absolute Konvergenz für $\Re(s) > \frac{k+1}{2}$ und Konvergenz für $\Re(s) > \frac{k}{2}$ nach Satz 7, bei $k = 1$ in jedem Falle absolute Konvergenz für $\Re(s) > 1$.

Um die so erklärten Funktionen von s in der Gesamtheit aller Dirichlet-Reihen durch einfache Eigenschaften zu charakterisieren, betrachten wir eine **invariante Schar** von Formen f, d. h. eine lineare Schar von Formen der gleichen Art $(-k, Q)$, welche bei $\overline{\Gamma}(1)$ als Ganzes in sich übergeht, z. B. das volle System zu k, Q. Sind $f_1, \ldots, f_\varkappa$ die Erzeugenden dieser Schar, so weisen ihre Dirichlet-Reihen $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_\varkappa(s)$ eine bestimmte Funktionaleigenschaft auf, welche das Äquivalent für die Aus-

sage ist: $f_1(\omega_1, \omega_2), \ldots, f_\varkappa(\omega_1, \omega_2)$ erfahren bei den erzeugenden Substitutionen der Modulgruppe

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

je eine bestimmt gegebene lineare homogene Substitution (die eo ipso ja so beschaffen ist, daß daraus Invarianz der f bei $\bar{\Gamma}(Q)$ folgt).

Für die $\varphi(s)$ gilt[1]) nämlich:

I. Die Funktionen $(s-k)\cdot\varphi(s)$ sind ganze Funktionen von endlichem Geschlecht.

II. Für $Q = 1$, wo man die invariante Schar nur durch eine Funktion zu erzeugen braucht, besteht für die Dirichlet-Reihen $\varphi(s)$ die Gleichung

$$R(s) = (-1)^{k/2}\, R(k-s)$$

mit

$$R(s) = (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\cdot\varphi(s).$$

In der Terminologie meiner Arbeit[1]) haben die $\varphi(s)$ die Signatur $\{1, k, (-1)^{k/2}\}$. Das einzelne φ ist bei $s = k$ regulär oder hat dort einen Pol 1. Ordnung, je nachdem, ob $f(\tau)$ Spitzenform ist oder nicht.

Für $Q > 1$ hat man die Erzeugenden der invarianten Schar zunächst so zu wählen, daß der Übergang von τ zu $\tau + 1$ nur eine Multiplikation der Funktionen mit Einheitswurzeln bewirkt — was stets möglich ist. Das bedeutet für die φ, daß in ihren Reihen nur die n aus je einer bestimmten Restklasse mod Q vorkommen dürfen. Dazu tritt dann die Aussage, daß die $\varkappa$ Ausdrücke $Q^s R(s)$ mit denselben $\varkappa$ Ausdrücken an der Stelle $k-s$ durch eine gewisse lineare homogene Substitution mit konstanten Koeffizienten zusammenhängen.

Die genannten Bedingungen sind in allen Fällen notwendig und hinreichend dafür, daß die Dirichlet-Reihen aus Modulformen der Art $(-k, Q)$ hergeleitet werden. Für die Theorie der Modulformen muß der zunächst überflüssig scheinende Übergang zu Dirichlet-Reihen deshalb in Betracht gezogen werden, weil sich zeigt, daß alle diese Dirichlet-Reihen eine Eulersche Produktentwickelung (in geeigneter Verallgemeinerung) besitzen, also mit den Primzahlen zusammenhängen, während andererseits dieses Koeffizientengesetz ein Äquivalent für eine gewisse algebraische Eigenschaft der Modulformen ist.

Die Darstellung und Begründung dieser Zusammenhänge zunächst für die 1. Stufe ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

Teil 1.

Die Theorie der Funktionen der 1. Stufe.

§ 2.

Der Operatoren-Ring der T_n.

In diesem Teil 1 sei k eine feste positive gerade Zahl $\geqq 4$. Vermöge des klassischen Transformationsprinzips wird durch eine Transformation n-ter Ordnung $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a, b, c, d ganze Zahlen mit $ad - bc$ = einer natürlichen Zahl n) eine Modulform der 1. Stufe in eine solche der Stufe n übergeführt: Wenn $F(\omega_1, \omega_2)$ von der Art $(-k, 1)$ ist, bleibt $F(M(\omega_1, \omega_2))$ bei denjenigen Substitutionen L aus $\bar{\Gamma}(1)$ invariant, wo MLM^{-1} wieder zu $\bar{\Gamma}(1)$ gehört, d. h. ganzzahlig ist. Nimmt man speziell $M = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so bleibt $F(M(\omega_1, \omega_2))$ bei $\bar{\Gamma}_0(n)$ invariant. Durchläuft L die volle $\bar{\Gamma}(1)$, so gibt es, weil $\bar{\Gamma}_0(n)$ endlichen Index in $\bar{\Gamma}(1)$ hat, unter den Formen $F(ML(\omega_1, \omega_2))$ nur endlich viele verschiedene. Da weiter M und LM dieselbe transformierte Form erzeugen, falls L zu $\bar{\Gamma}(1)$ gehört, so braucht man nur die verschiedenen „Klassen" von Transformationen n-ter Ordnung in Betracht zu ziehen:

Man nenne M_1 und M_2 äquivalent nach $\bar{\Gamma}(1)$ und rechne sie zur selben Klasse, wenn es ein L aus $\bar{\Gamma}(1)$ gibt mit $M_1 = LM_2$.

Hilfssatz 1. In jeder Klasse von Transformationen n-ter Ordnung gibt es einen Repräsentanten $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c = 0$ und $d > 0$.

Denn in $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kann man C, D als teilerfremde Zahlen so wählen, daß in dem Produkt das Element $Ca + Dc = 0$ wird.

Hilfssatz 2. Zwei solche speziellen Transformationen n-ter Ordnung

$$M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & d_i \end{pmatrix}, \quad d_i > 0 \qquad (i = 1, 2)$$

sind dann und nur dann äquivalent, wenn $a_1 = a_2$, $d_1 = d_2$ und $b_1 \equiv b_2 \pmod{d_1}$.

Denn die mit M_1 äquivalenten Transformationen sind

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1, & ab_1 + bd_1 \\ ca_1, & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix} \qquad (ad - bc = 1)$$

und haben also nur dann wieder die spezielle Form, wenn $c = 0$ und $a = d = 1$ ist, woraus die Behauptung folgt. Damit ergibt sich

Satz 8. *Ein volles System nicht-äquivalenter Transformationen n-ter Ordnung wird gegeben durch*

$$(12) \qquad M_h = \begin{pmatrix} a_h & b_h \\ 0 & d_h \end{pmatrix}, \quad a_h \cdot d_h = n, \quad d_h > 0, \quad b_h \bmod. d_h.$$

Hier durchläuft d_h alle positiven Teiler von n und bei festem d_h noch b_h ein volles Restsystem mod. d_h.

Die Anzahl dieser Klassen ist offenbar gleich der Summe aller positiven Teiler von n. Dabei werden zur Determinante n auch alle die Matrizen mitgerechnet, wo die vier Elemente einen gemeinsamen Teiler > 1 haben.

Mit M_h ergibt offenbar auch $M_h \cdot L$ für festes L aus $\bar{\Gamma}(1)$ ein volles System von Repräsentanten der Ordnung n. Daraus folgt nun für die Modulform $F(\omega_1, \omega_2)$: Die $\sigma_1(n)$ Formen

$$F(M_h(\omega_1, \omega_2)) = F\left(\begin{pmatrix} a_h & b_h \\ 0 & d_h \end{pmatrix}(\omega_1, \omega_2)\right) \qquad (h = 1, 2, \ldots, \sigma_1(n))$$

erfahren bei beliebigen Substitutionen aus $\bar{\Gamma}(1)$ nur eine Permutation.

Jede dieser Formen ist ferner von der Art $(-k, n)$, wenn F von der Art $(-k, 1)$ ist — wie aus der Natur der Regularitätsforderung d) in § 1 hervorgeht —, und ist weiter auch Spitzenform, wenn F eine solche ist. Damit endlich können wir durch einen algebraischen Prozeß von diesen Formen wieder zur Stufe 1 gelangen:

Satz 9. *Ist $F(\omega_1, \omega_2)$ eine Modulform der Art $(-k, 1)$, so ist für jede natürliche Zahl n auch*

$$\sum_{h=1}^{\sigma_1(n)} F(M_h(\omega_1, \omega_2))$$

eine solche Form. M_h durchläuft dabei die $\sigma_1(n)$ Matrizen aus Satz 8.

Wir fügen an dieser Summe noch den Faktor n^{k-1} an und gehen durch Multiplikation mit ω_2^k zur inhomogenen Gestalt über. So gelangen wir zur

Definition des Operators T_n. Man setze, wenn $F(\tau)$ von der Art $(-k, 1)$,

$$(13) \qquad F \mid T_n = n^{k-1} \sum_{\substack{a \cdot d = n \\ b \bmod d,\ d > 0}} F\left(\frac{a\tau + b}{d}\right) d^{-k}.$$

Dann ist $F \mid T_n$ wieder von der Art $(-k, 1)$ und gleichzeitig mit F Spitzenform.

Der Operator T_n hat offenbar einen Sinn nicht nur für Modulformen, sondern für beliebige periodische Funktionen von τ mit der Periode 1. In diesem Paragraphen sollen nun die Eigenschaften der Operatoren T_n untersucht werden.

Zunächst führen wir in naheliegender Weise eine Komposition der T_n ein. Für zwei natürliche Zahlen n, m verstehen wir unter dem Produkt $T_n \cdot T_m$ denjenigen Operator, der durch Ausführung von T_n und daraufFolgende Ausführung von T_m entsteht. Diese Komposition ist assoziativ. Ferner seien für beliebige komplexe, von τ unabhängige Zahlen α, β die Operatoren $\alpha T_n = T_n \alpha$ und $S = \alpha T_n + \beta T_m$ erklärt durch

$$F \mid \alpha T_n = \alpha F \mid T_n, \quad F \mid S = \alpha F \mid T_n + \beta F \mid T_m.$$

In dieser Weise definieren die T_n einen **Ring von Operatoren** mit den komplexen Zahlen als Multiplikatoren. Dabei ist T_1 das Einheitselement des Ringes. Über die Struktur dieses Ringes werden wir nun folgenden Satz beweisen:

Satz 10. *Alle T_n sind miteinander vertauschbar, und es gilt*

$$T(n) \cdot T(m) = \sum_{d \mid n, m} T\left(\frac{n \cdot m}{d^2}\right) d^{k-1}.$$

Hier durchläuft d die positiven gemeinsamen Teiler von n und m, und der Deutlichkeit halber steht $T(n)$ für T_n.

Den Beweis dieses Fundamentalsatzes vollziehen wir in drei Schritten:

a) Sei $(n, m) = 1$. Es ist dann

$$\varphi = F \mid T_n = n^{k-1} \sum_{\substack{a' d' = n \\ b' \bmod. d'}} F\left(\frac{a' \tau + b'}{d'}\right) d'^{-k},$$

$$\varphi \mid T_m = m^{k-1} \sum_{\substack{a d = m \\ b \bmod. d}} \varphi\left(\frac{a \tau + b}{d}\right) d^{-k}$$

$$F \mid T_n \cdot T_m = (n m)^{k-1} \sum_{\substack{a \cdot d = m \\ b \bmod. d}} d^{-k} \left\{ \sum_{\substack{a' \cdot d' = n \\ b' \bmod. d'}} d'^{-k} F\left(\frac{a' \frac{a\tau + b}{d} + b'}{d'}\right) \right\}$$

$$= (n m)^{k-1} \sum_{\substack{a d = n, \; b \bmod. d \\ a' d' = m, \; b' \bmod. d'}} (d d')^{-k} F\left(\frac{a a' \tau + b' d + a' b}{d d'}\right).$$

Hier durchläuft aber bei festem d, d' der Ausdruck $b' d + b a'$, weil $a' d'$ und d teilerfremd sind, ein volles Restsystem mod. $d d'$, wenn b, b' bzw. mod. d, d' laufen. Folglich ist die ganze Summe gerade

$$F \mid T_{n \cdot m}.$$

b) Es sei mit einer Primzahl p und einer natürlichen Zahl r

$$n = p, \quad m = p^r, \quad r \geqq 1.$$

Wegen

$$\varphi \mid T_p = p^{k-1} \varphi(p\tau) + p^{-1} \sum_{l \bmod. p} \varphi\left(\frac{\tau + l}{p}\right)$$

ist, wie oben, wenn $d' = p^t$, $a' = p^{r-t}$ mit $t = 0, 1, \ldots, r$ eingesetzt wird,

$$F \mid T_{p^r} \cdot T_p = p^{(r+1)(k-1)} \sum_{\substack{0 \leqq t \leqq r \\ b_t \bmod. p^t}} p^{-tk} F\left(\frac{p^{r+1-t}\tau + b_t p}{p^t}\right)$$

$$+ p^{r(k-1)} \sum_{\substack{l \bmod. p \\ 0 \leqq t \leqq r \\ b_t \bmod. p^t}} p^{-(t+1)k} F\left(\frac{p^{r-t}\tau + b_t + l p^t}{p^{t+1}}\right).$$

In der zweiten Summe durchläuft $b_t + l p^t$ bei festem t ein volles Restsystem mod. p^{t+1}. Nehmen wir dazu den Teil der ersten Summe mit $t = 0$, so erhalten wir gerade $F \mid T_{p^{r+1}}$. In den übrigen Gliedern der ersten Summe können wir dann wegen $t \geqq 1$ im Argument von F aus Zähler und Nenner den Faktor p wegkürzen, so daß mit festem $t \geqq 1$

$$\sum_{b_t \bmod. p^t} F\left(\frac{p^{r-t}\tau + b_t}{p^{t-1}}\right) = p \cdot \sum_{b_{t-1} \bmod. p^{t-1}} F\left(\frac{p^{r-1}\tau + b_{t-1}}{p^t}\right)$$

entsteht, was nach Multiplikation mit

$$p^{(r+1)(k-1)-tk}$$

und Summation über $t = 1, \ldots, r$ gerade ergibt

$$p^{k-1} F \mid T_{p^{r-1}},$$

so daß

$$T_{p^r} \cdot T_p = T_{p^{r+1}} + \varepsilon(p) \cdot T_{p^{r-1}} \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

mit $\varepsilon(p) = p^{k-1}$ bewiesen ist. Hieraus folgt zunächst:

$T_{p^{r+1}}$ ist ein Polynom in T_p und $\varepsilon(p)$ vom Grade $r+1$, also sind $T(p^r)$ mit gleichem p alle miteinander vertauschbar und nach a) also in der Tat alle T_n vertauschbar.

c) Mit $n = p^s$, $m = p^r$ soll nun aus (14) für beliebiges $\varepsilon(p)$ geschlossen werden

$$T(p^s) \cdot T(p^r) = \sum_{0 \leqq u \leqq r, s} \varepsilon(p)^u \, T(p^{r+s-2u}). \tag{15}$$

Es genügt, diese Behauptung für $s \leqq r$ zu beweisen, da die linke Seite symmetrisch in s, r ist. Wir führen den Beweis für festes r durch vollständige Induktion bezüglich s. Die Gleichung (15) ist richtig für $s = 0, 1$. Sie sei bewiesen für $s-1$ und s, dann folgt aus (15) durch Multiplikation mit $T(p)$ nach b) für die linke Seite der Wert

$$T(p) \cdot T(p^s) \cdot T(p^r) = T(p^{s+1})\, T(p^r) + \varepsilon(p)\, T(p^{s-1}) \cdot T(p^r). \tag{16}$$

Auf der rechten Seite in (15) erhalten wir bei $s+1 \leqq r$

$$\sum_{0 \leqq u \leqq s} \varepsilon(p)^u\, T(p) \cdot T(p^{r+s-2u})$$

$$= \sum_{u=0}^{s} \varepsilon(p)^u\, T(p^{r+s+1-2u}) + \sum_{u=0}^{s} \varepsilon(p)^{u+1}\, T(p^{r+s-1-2u})$$

$$= \sum_{u=0}^{s+1} \varepsilon(p)^u\, T(p^{r+s+1-2u}) + \sum_{u=0}^{s-1} \varepsilon(p)^{u+1} \cdot T(p^{r+s-1-2u})$$

$$= \sum_{u=0}^{s+1} \varepsilon(p)^u \cdot T(p^{r+s+1-2u}) + \varepsilon(p) \sum_{u=0}^{s-1} \varepsilon(p)^u\, T(p^{r+s-1-2u}),$$

woraus nach (15) für $s-1$ und (16) die Aussage (15) für $s+1$, also allgemein für alle s folgt.

Aus (15), was ja die Behauptung von Satz 10 für $n = p^s$, $m = p$ ist, und a) folgt dann trivial die allgemeine Behauptung von Satz 10 in der Form

$$T(n) \cdot T(m) = \sum_{d,n,m} T\left(\frac{n \cdot m}{d^2}\right) \cdot \varepsilon(d),$$

wobei von $\varepsilon(d)$ nur die Eigenschaften benutzt werden:

1. $\varepsilon(n) \cdot \varepsilon(m) = \varepsilon(n \cdot m)$; $\varepsilon(1) \cdot T_n = T_n$.
2. Das Symbol $\varepsilon(n)$ ist mit allen $T(m)$ vertauschbar.
3. Es gilt (14).

Diese letzte Verallgemeinerung erwähnen wir gleich hier. Sie wird erst im Teil 2 bei den Funktionen höherer Stufe gebraucht werden.

§ 3.

Der Matrizenring der $\lambda(n)$ und das Euler-Produkt.

Nunmehr ziehen wir die Tatsache heran, daß die Modulformen einer festen Art $(-k, 1)$ eine lineare Schar mit nur endlich vielen, etwa $\varkappa = \varkappa(k)$, Erzeugenden bilden, und daß nach § 2 jeder Operator T_n diese Schar in sich abbildet. Zur Abkürzung verabreden wir noch, daß kleine griechische Buchstaben als obere oder untere Indizes oder Summationszeichen stets das Intervall $1 \ldots \varkappa$ durchlaufen sollen. Die Klammer bei oberem Index lassen wir fort. Seien $F^\varrho(\tau)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ jene Erzeugenden. Dann gibt es also zu jeder natürlichen Zahl n eine Matrix vom Grade $\varkappa$

$$\lambda(n) = (\lambda_{\varrho\sigma}(n)),$$

deren Elemente $\lambda_{\varrho\sigma}(n)$ $(\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ komplexe Zahlen sind, mit der Eigenschaft

(17) $$F^\varrho \mid T_n = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} \lambda_{\varrho\sigma}(n) F^\sigma(\tau).$$

Der Zusammensetzung der Operatoren T_n entspricht die gleichbezeichnete Zusammensetzung der Matrizen $\lambda(n)$, und es wird also der Operatorenring der T_n isomorph abgebildet auf den durch die $\lambda(n)$ erzeugten Matrizenring. Wegen Satz 10 gilt daher

Satz 11. *Die Matrizen* $\lambda(n)$ *sind für* $n = 1, 2, \ldots$ *alle miteinander vertauschbar, und es ist*

$$\lambda(n)\cdot\lambda(m) = \sum_{d \mid n, m} \lambda\left(\frac{n\cdot m}{d^2}\right)\cdot d^{k-1}.$$

Nun hängen die Zahlen $\lambda_{\varrho\sigma}$ mit den Entwicklungs-Koeffizienten der $F^{\varrho}(\tau)$ zusammen. Wenn die Potenzreihe

$$a^{\varrho}(0) + \sum_{N=1}^{\infty} a^{\varrho}(N)\, e^{2\pi i N\tau} = F^{\varrho}(\tau)$$

ist, so wird, unter Weglassung des Index ϱ,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} F \mid T_n &= n^{k-1} \sum_{\substack{d \mid n \\ b \bmod d}} d^{-k} \sum_{N=0}^{\infty} a(N)\, e^{2\pi i N \frac{a\tau + b}{d}} \\ &= \sum_{\substack{d \mid n \\ a d = n,\, N}} a^{k-1} a(Nd)\, e^{2\pi i N a\tau} = \sum_{N=0}^{\infty} b_n(N)\, e^{2\pi i N\tau} \end{aligned}\right.$$

mit

$$b_n(N) = \sum_{d \mid n, N} a\left(\frac{N\cdot n}{d^2}\right)\cdot d^{k-1} \quad \left(\begin{aligned} n &= 1, 2, \ldots \\ N &= 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right).$$

Die Gleichung (17) wird also gleichbedeutend mit den **Grundgleichungen**

$$(19)\quad \sum_{d \mid n, N} a^{\varrho}\left(\frac{N\cdot n}{d^2}\right) d^{k-1} = \sum_{\sigma} \lambda_{\varrho\sigma}(n)\cdot a^{\sigma}(N); \quad N \geqq 0,\ n \geqq 1,\ \varrho = 1, \ldots, \varkappa.$$

Es ist nun entscheidend, daß man jetzt die Matrizen $\lambda(n)$ für die verschiedenen n gleichzeitig in Betracht zu ziehen hat. Für $N = 1$ findet sich zunächst

$$(20)\quad a^{\varrho}(n) = \sum_{\sigma} \lambda_{\varrho\sigma}(n)\cdot a^{\sigma}(1) \qquad n \geqq 1,$$

und man wird also veranlaßt, die $\varkappa^2$ Funktionen von τ

$$(21)\quad f_{\varrho\sigma}(\tau) = \lambda_{\varrho\sigma}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\varrho\sigma}(n)\, e^{2\pi i n\tau} \qquad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, \varkappa)$$

einzuführen, wo die von τ unabhängige Matrix $\lambda(0)$ gleich noch festgelegt werden soll. Es zeigt sich nämlich, daß die $\varkappa^2$ Ableitungen $f'_{\varrho\sigma}(\tau)$ (die von $\lambda(0)$ frei sind) und die $\varkappa$ Funktionen

$$(22)\quad F'^{\varrho}(\tau) = \frac{d}{d\tau} F^{\varrho}(\tau)$$

linear äquivalent sind. Denn die linke Seite der Grundgleichungen (19) ist für $N, n \geqq 1$ symmetrisch in N und n; daher

$$(23) \qquad \sum_{\sigma} n\,\lambda_{\varrho\sigma}(n) \cdot N \cdot a^{\varrho}(N) = \sum_{\sigma} N \cdot \lambda_{\varrho\sigma}(N) \cdot n \cdot a^{\varrho}(n).$$

Nun sind wegen $k > 0$ die $\varkappa$ Ableitungen (22) auch linear unabhängig, daher hat die unendliche Matrix mit den Elementen $N \cdot a^{\sigma}(N)$ ($\sigma = 1, \ldots, \varkappa$; $N = 1, 2, \ldots, \infty$) den Rang $\varkappa$. Faßt man also (23) für festes n, ϱ als Bestimmungsgleichungen für die $\varkappa$ Größen $n \cdot \lambda_{\varrho\sigma}(n)$ ($\sigma = 1, \ldots, \varkappa$) auf, so ergeben sich diese Größen in der Form

$$(24) \qquad n\,\lambda_{\varrho\sigma}(n) = \sum_{\nu} n \cdot a^{\nu}(n) \cdot b^{\nu}_{\varrho\sigma}$$

mit von n, τ unabhängigen, eindeutig bestimmten $b^{\nu}_{\varrho\sigma}$. Unter Einführung der $\varkappa$ Matrizen des Grades $\varkappa$

$$(25) \qquad \mathsf{B}^{\nu} = (b^{\nu}_{\varrho\sigma}) \qquad (\nu = 1, \ldots, \varkappa)$$

schreiben wir diese Gleichungen als Matrizen-Gleichungen

$$(26) \qquad \lambda(n) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} a^{\nu}(n) \cdot \mathsf{B}^{\nu} \qquad n \geqq 1$$

und benutzen sie zur **Definition von $\lambda(0)$**, indem wir sie auch für $n = 0$ als gültig festsetzen. Die so erklärten $f_{\varrho\sigma}(\tau)$ sind dann wegen (20) linear äquivalent mit den $F^{\varrho}(\tau)$ und also auch Modulformen der Art $(-k, 1)$.

Satz 12. *Die $\varkappa$ Matrizen B^{ν} bilden eine Basis des Matrizenringes der $\lambda(n)$ und sind also untereinander und mit den $\lambda(n)$ vertauschbar.*

Das folgt unmittelbar aus (26) und der linearen Unabhängigkeit der $F^{\varrho}(\tau)$, ebenso

Satz 13. *Die Matrix $\mathsf{B}(\tau) = (f_{\varrho\sigma}(\tau))$, deren Elemente die Funktionen $f_{\varrho\sigma}(\tau)$ sind, gestattet die beiden Darstellungen*

$$\mathsf{B}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n)\, e^{2\pi i n \tau} = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} F^{\nu}(\tau) \cdot \mathsf{B}^{\nu}.$$

Anmerkung: Die Matrix $\lambda(0)$ läßt sich wegen Satz 3 aus § 1 mit Hilfe der Eigenschaft, daß die $f_{\varrho\sigma}(\tau)$ Modulformen sein sollen, auch unmittelbar durch die $\lambda(n)$ mit $n \geqq 1$ definieren durch

$$(27) \qquad \lambda(0) = i^{k} \lim_{y=+0} y^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)\, e^{-2\pi n y},$$

woraus man nochmals erkennt, daß sie dem Matrizenring der $\lambda(n)$ mit $n \geqq 1$ angehört.

Schließlich übersetzen wir noch die in Satz 11 ausgesprochene Eigenschaft der $\lambda(n)$ in eine Funktionaleigenschaft der $\mathsf{B}(\tau)$, die sich, wie schon vorauszusehen, am durchsichtigsten für die Dirichlet-Reihen der $f_{\varrho\sigma}(\tau)$ wird formulieren lassen.

Zur Untersuchung der Matrix des Grades $\varkappa$

(28) $$\Phi(s) = (\varphi_{\varrho\sigma}(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)\cdot n^{-s},$$

deren Elemente

$$\varphi_{\varrho\sigma}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\varrho\sigma}(n)}{n^s}$$

die Dirichlet-Reihen zu $f_{\varrho\sigma}(\tau)$ sind, betrachte man für die Primzahlen p zunächst die Teilreihen

$$\sum_{r=0}^{\infty} \lambda(p^r)\, p^{-rs} = \Psi_p(s).$$

Satz 14. *Im Gebiete absoluter Konvergenz $\Re(s) > k$ hat $\Psi_p(s)$ eine Reziproke, und zwar ist*

$$(\mathsf{E} - \lambda(p)\cdot p^{-s} + p^{k-1-2s}\,\mathsf{E})\cdot \Psi_p(s) = \mathsf{E} = \lambda(1),$$

wobei E die Einheitsmatrix des Grades $\varkappa$ bedeutet.

Diese Aussage ist eine Folge von Satz 11 mit $n = p$, $m = p^r$

$$\lambda(p)\cdot\lambda(p^r) = \lambda(p^{r+1}) + p^{k-1}\cdot\lambda(p^{r-1}) \qquad r \geqq 1.$$

Denn danach ist

$$\begin{aligned}\Psi_p(s)\cdot\lambda(p)\cdot p^{-s} &= \sum_{r=0}^{\infty} \lambda(p)\cdot\lambda(p^r)\, p^{-(r+1)s}\\ &= \lambda(p)\, p^{-s} + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda(p^{r+1})\, p^{-(r+1)s} + p^{k-1}\sum_{r=1}^{\infty} \lambda(p^{r-1})\, p^{-(r+1)s}\\ &= \Psi_p(s) - \mathsf{E} + p^{k-1-2s}\Psi_p(s).\end{aligned}$$

Wegen $\lambda(n)\cdot\lambda(m) = \lambda(n\cdot m)$ für teilerfremde n, m ist nach bekannter Schlußweise im Gebiete absoluter Konvergenz $\Re(s) > k$

(29) $$\Phi(s) = \prod_p \Psi_p(s),$$

wo das Produkt über alle Primzahlen p zu erstrecken ist, und dann ergibt sich aus Satz 14 das Hauptresultat

Satz 15. *Zu dem vollen System linear unabhängiger Modulformen der Art $(-k, 1)$, $F^\varrho(\tau)$ $(\varrho = 1, \ldots, \varkappa)$, gibt es $\varkappa$ konstante Matrizen B^ν des Grades $\varkappa$, welche die Basis eines kommutativen Matrizenringes vom Range $\varkappa$ sind, derart, daß die Dirichlet-Reihen von $F^\varrho(\tau)$:*

$$\varphi^\varrho(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a^\varrho(n)\, n^{-s}$$

eine Matrix

$$\Phi(s) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \varphi^\nu(s)\,\mathsf{B}^\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)\cdot n^{-s}$$

mit der Eulerschen Produktentwicklung

(30) $$\Phi(s) = \prod_p (\mathsf{E} - \lambda(p)\cdot p^{-s} + p^{k-1-2s}\,\mathsf{E})^{-1},$$

gültig für $\Re(s) > k$, bilden.

Wir formulieren den Satz noch unter Benutzung von § 1 ohne Heranziehung des Begriffes Modulform nur als Aussage über Dirichlet-Reihen:

Satz 16. *Für festes gerades $k \geqq 4$ suche man alle Dirichlet-Reihen*

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit den Eigenschaften:

I. $(s-k)\varphi(s)$ *ist eine ganze Funktion von endlichem Geschlecht,*

II. $\varphi(s)$ *genügt der Funktionalgleichung*

$$R(s) = (-1)^{k/2} R(k-s)$$

mit

$$R(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s).$$

Es existieren dann nur endlich viel linear unabhängige Lösungen $\varphi^{\varrho}(s)$ $(\varrho = 1, \ldots, \varkappa)$; ihre Anzahl $\varkappa$ ist durch Satz 3 bestimmt. Und dazu gibt es $\varkappa$ konstante Matrizen B^{ν} des Grades $\varkappa$, welche die Basis eines kommutativen Ringes vom Range $\varkappa$ bilden, so daß die Matrix

$$\Phi(s) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \varphi^{\nu}(s) \cdot \mathsf{B}^{\nu}$$

die Produktentwicklung (30) *besitzt.* (Vgl. auch Satz 27 in § 4.)

Bei den Untersuchungen dieses Paragraphen ist nur ein sehr kleiner Teil der Eigenschaften der $F^{\varrho}(\tau)$ gebraucht worden; es wurde nämlich nur benutzt:

1. daß eine Schar von Funktionen vorliegt, für welche der Operator T_n, erklärt durch (13), einen Sinn hat. Dazu genügt, daß sie in der oberen Halbebene reguläre Funktionen mit der Periode 1 sind, die auch bei $\tau = \infty$ noch in $e^{2\pi i \tau}$ regulär sind.

2. daß sie und ihre Ableitungen eine lineare Schar mit genau je $\varkappa$ unabhängigen Erzeugenden bilden, von denen die erste durch alle Operatoren T_n in sich übergeht.

Abgesehen natürlich von Satz 15 und 16, sowie den Konvergenzaussagen über die Dirichlet-Reihen gelten die Aussagen dieses Parapraphen für alle solchen Systeme, insbesondere auch, wenn die $F^{(\varrho)}(\tau)$ nur eine gegenüber den T_n invariante **Teilschar** der Modulformen von der Art $(-k, 1)$ sind. Für letztere gilt auch noch Satz 15 in passender Modifikation.

Es sollen jetzt noch weitere notwendige Bedingungen für die Matrizen B^{ν} hergeleitet werden. Unter den möglichen Basissystemen des Ringes bilden sie ein spezielles System:

Satz 17. *Die Elemente $b^{\nu}_{\varrho\sigma}$ der B^{ν} sind symmetrisch in σ, ν:*

$$b^{\nu}_{\varrho\sigma} = b^{\sigma}_{\varrho\nu}.$$

Beweis: Der nach den Grundgleichungen (19) in n, N symmetrische Ausdruck $\sum_\sigma \lambda_{\varrho\sigma}(n)\, a^\sigma(N)$ geht durch Anwendung von (24) in

(31) $$\sum_{\nu,\sigma} b^\nu_{\varrho\sigma} \cdot a^\nu(n) \cdot a^\sigma(N)$$

über. Da unter den Vektoren mit den $\varkappa$ Komponenten $(a^{(1)}(n), \ldots, a^\varkappa(n))$ (für $n = 1, 2, \ldots$) $\varkappa$ unabhängige Vektoren vorkommen, so folgt aus der Symmetrie von (31) in n, N die Behauptung. Durch Übergang zu einem anderen System von Basismatrizen desselben Ringes geht im allgemeinen diese Symmetrie verloren.

Mit der Symmetrie gleichwertig ist eine andere Eigenschaft:

Satz 18. *Sind* $\mathsf{B}^\nu = (b^\nu_{\varrho\sigma})$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ $\varkappa$ *linear unabhängige Matrizen des Grades* $\varkappa$, *die miteinander vertauschbar sind, und besitzen die* $\varkappa^2$ *Gleichungen*

(32) $$\sum_\sigma u_\sigma b^\nu_{\varrho\sigma} = \delta_{\varrho\nu} \qquad (= 1, \text{ wenn } \varrho = \nu, \text{ sonst } = 0)$$

ein Lösungssystem u_σ, *so ist*

$$b^\nu_{\varrho\sigma} = b^\sigma_{\varrho\nu}.$$

Beweis: Man betrachte zwei Matrizen der Schar

$$\mathsf{A} = (a_{\varrho\sigma}) = \sum_\nu x_\nu \mathsf{B}^\nu, \quad \Delta = (d_{\varrho\sigma}) = \sum_\nu y_\nu \mathsf{B}^\nu$$

mit beliebigen komplexen Konstanten x, y. Der Ausdruck

$$S_\varrho = \sum_{\alpha,\sigma} a_{\varrho\alpha} \cdot d_{\alpha\sigma} \cdot u_\sigma$$

ist dann wegen der Vertauschbarkeit der A, Δ symmetrisch in x, y. Andererseits ist wegen $\sum_\sigma d_{\alpha\sigma} u_\sigma = y_\alpha$

$$S_\varrho = \sum_\alpha a_{\varrho\alpha} y_\alpha = \sum_{\nu,\alpha} x_\nu y_\alpha b^\nu_{\varrho\alpha},$$

woraus wie oben die Behauptung folgt.

Die Voraussetzung des Satzes ist im Ring der $\lambda(n)$ erfüllt, weil er die Einheitsmatrix enthält, also mit gewissen u_ν

$$\delta_{\varrho\sigma} = \sum_\nu u_\nu b^\nu_{\varrho\sigma}.$$

(Übrigens ist $u_\nu = a^\nu(1)$). Wegen der Symmetrie nach Satz 17 gilt daher auch (32).

Aus Satz 17 und der letzten Bemerkung folgt eine wichtige Strukturaussage für den Ring:

Satz 19. *Der Matrizenring der* $\lambda(n)$ *ist maximal, d. h. jede mit allen* $\lambda(n)$ *vertauschbare Matrix des Grades* $\varkappa$ *ist bereits in dem Ringe enthalten.*

Beweis: Die allgemeine Matrix

$$\mathsf{B} = \sum_\nu x_\nu \mathsf{B}^\nu$$

aus dem Ring, aufgefaßt als Substitution, gibt bei Anwendung auf den Vektor $u = (u_1, \ldots, u_\varkappa)$ nach (32) den Vektor $(x_1, \ldots, x_\varkappa)$. Ist jetzt L eine mit allen B vertauschbare Matrix des Grades $\varkappa$, so bilde man diejenige Matrix A des Ringes, welche u in den gleichen Vektor überführt wie L, also $L(u) = \mathsf{A}(u)$. Da L mit allen B vertauschbar ist, folgt daraus $(L - \mathsf{A}) \cdot \mathsf{B}(u) = 0$, und da $\mathsf{B}(u)$ jeden Vektor bedeuten kann, so ist $L = \mathsf{A}$, w. z. b. w.

Die gefundenen Eigenschaften des Ringes der $\lambda(n)$ sind nun auch hinreichend in folgendem Sinne:

Satz 20. *Es seien $\mathsf{B}^\nu = (b^\nu_{\varrho\sigma})$ $(\nu = 1, \ldots, \varkappa)$ die $\varkappa$ Basiselemente eines kommutativen Ringes von Matrizen des Grades $\varkappa$. Der Ring enthalte die Einheitsmatrix, und es sei die Symmetriebedingung $b^\nu_{\varrho\sigma} = b^\sigma_{\varrho\nu}$ erfüllt. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl k und den für dieses k definierten Operatoren T_n ein System von $\varkappa$ linear unabhängigen Funktionen, die in der oberen Halbebene regulär sind,*

$$F^\varrho(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a^\varrho(n)\, e^{2\pi i n\tau},$$

deren Schar durch alle T_n in sich übergeht. Und die durch

$$F^\varrho \mid T_n = \sum_\sigma \lambda_{\varrho\sigma}(n)\, F^\sigma(\tau) \tag{33}$$

definierten Matrizen $\lambda(n)$ haben dann die Gestalt

$$\lambda(n) = \sum_\nu a^\nu(n)\, \mathsf{B}^\nu.$$

Beweis: Man bestimme zunächst die Zahlen u_σ durch

$$\delta_{\varrho\sigma} = \sum_\nu u_\nu b^\nu_{\varrho\sigma}. \tag{34}$$

Alsdann wähle man die Zahlen $a^\nu(n)$ für $n = 1$ und Primzahlen p bis auf folgende Einschränkungen beliebig:

$$a^\nu(1) = u_\nu.$$

(35) für die ersten $\varkappa$ Primzahlen $p_1, \ldots, p_\varkappa$ die $a^\nu(p)$ so, daß die Determinante $|a^\nu(p_\varrho)| \neq 0$, also etwa $a^\nu(p_\varrho) = \delta_{\nu\varrho}$,

(36) für alle weiteren Primzahlen $a^\nu(p)$ beliebig, aber beschränkt, also etwa $a^\nu(p) = 0$.

Mit diesen $a^\nu(p)$ definiere man die Matrizen $\lambda(p)$

$$\lambda(p) = \sum_\nu a^\nu(p)\, \mathsf{B}^\nu, \quad \lambda(1) = \sum_\nu a^\nu(1)\, \mathsf{B}^\nu = \mathsf{E}$$

und hieraus die $\lambda(n)$ für zusammengesetzte n durch die Rechenregel

$$\lambda(n) \cdot \lambda(m) = \sum_{d \mid n, m} \lambda\left(\frac{n \cdot m}{d^2}\right) d^{k-1}, \tag{37}$$

was offenbar eindeutig möglich ist. Nach Voraussetzung ist jede so gebildete Matrix $\lambda(n)$ auf eine einzige Weise in die Gestalt

$$\lambda(n) = \sum_{\nu} x_{\nu}(n)\,\mathsf{B}^{\nu} \tag{38}$$

zu bringen mit Zahlen x_{ν}. Man setze dann

$$a^{\nu}(n) = x_{\nu}(n),$$

was für $n = p$ in Übereinstimmung mit (33) steht. Die Funktionen

$$F^{\varrho}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{\varrho}(n)\, e^{2\pi i n \tau}$$

haben dann alle in Satz 20 genannten Eigenschaften. Denn sie sind unabhängig wegen (35). Nach (38) ist $\lambda_{\varrho\sigma}(n) = \sum_{\nu} a^{\nu}(n)\, b^{\nu}_{\varrho\sigma}$ und daher nach (34) wegen der Symmetrie der $b^{\nu}_{\varrho\sigma}$

$$\sum_{\sigma} \lambda_{\varrho\sigma}(n)\, u_{\sigma} = a^{\varrho}(n). \tag{39}$$

Daß endlich die $\lambda(n)$ wirklich die durch (33) ausgedrückte Bedeutung haben, folgt aus der Potenzreihe für $F^{\varrho}|T_n$, deren N-ter Koeffizient nach (18)

$$\sum_{d|N,n} a^{\varrho}\left(\frac{N\cdot n}{d^2}\right) d^{k-1}$$

ist. Dies ist nach (39) und (37) in der Tat

$$\sum_{\sigma;\, d|N,n} \lambda_{\varrho\sigma}\left(\frac{N\cdot n}{d^2}\right) d^{k-1} u_{\sigma} = \sum_{\sigma,\nu} \lambda_{\varrho\nu}(n)\, \lambda_{\nu\sigma}(N)\, u_{\sigma}$$
$$= \sum_{\nu} \lambda_{\varrho\nu}(n)\cdot a^{\nu}(N).$$

Daß die Symmetriebedingungen nicht in jedem Matrizenring, welcher den übrigen Bedingungen von Satz 20 genügt, durch geeignete Wahl der Basismatrizen erfüllt werden können, zeigt das Beispiel ($\varkappa = 3$) der Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \tag{40}$$

mit beliebigen komplexen a, b, c. Sie bilden einen kommutativen Ring, der maximal ist. Eine Matrix von dieser Gestalt, wo dann a, b, c die Funktionen $f_{\varrho\sigma}(\tau)$ sind, kann aber nicht als Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ auftreten. Denn andernfalls würden die Funktionen $F^{(2)}(\tau)$, $F^{(3)}(\tau)$ bereits ein bei T_n invariantes Teilsystem bilden, dessen Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ vom Grade 2 die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

hätte. Diese wiederum enthält aber nicht zwei unabhängige Elemente, wie es nach der allgemeinen Theorie der Fall sein müßte. Also sind die Symmetrieforderungen für den Ring (40) nicht erfüllbar, was sich auch durch direktes Ausrechnen bestätigt. Der Ring der transponierten Matrizen zu (40), der mit dem ersten isomorph ist, ist dagegen realisierbar durch $\lambda(n)$.

Eine merkwürdige Tatsache, welche die Sonderstellung der Modulfunktionen in bezug auf den Operator T_n beleuchtet, mag noch erwähnt werden: Sei $F^{(1)}, \ldots, F^{(\varkappa)}$ irgendein System von Funktionen mit den Eigenschaften 1., 2., nur sollen die konstanten Glieder in den Potenzreihen nicht alle $= 0$ sein. Aus den Grundgleichungen (19) folgt dann für $N = 0$

$$a^{\varrho}(0) \cdot \sum_{d|n} d^{k-1} = \sum_{\sigma} \lambda_{\varrho\sigma}(n)\, a^{\sigma}(0).$$

Daher ist in der F-Schar auch die Funktion

$$\text{const.} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, e^{2\pi i n \tau}$$

enthalten, welche bis auf eine additive Konstante nach (5) die Eisenstein-Reihe G_k ist

§ 4.

Die Eigenfunktionen des Ringes der T_n und das Euler-Produkt für die einzelne Funktion. Spezielle Fälle.

In der oben entwickelten Theorie ist ein Element der Willkürlichkeit noch in der Auswahl der erzeugenden Funktionen $F^{(1)}, \ldots, F^{(\varkappa)}$ innerhalb ihrer Schar vorhanden. Geht man durch eine umkehrbare lineare Substitution mit der Matrix A

$$F^* = A(F)$$

von den F zu den F^* über, so sind die Matrizen $\lambda^*(n)$ zu den F^* gegeben durch

$$\lambda^*(n) = A \cdot \lambda(n) \cdot A^{-1},$$

und ebenso ist

$$\mathsf{B}^*(\tau) = A \cdot \mathsf{B}(\tau) \cdot A^{-1}.$$

Die Matrizen $\mathsf{B}^{*\nu}$ sind noch nicht die $A\,\mathsf{B}^{\nu} A^{-1}$ selbst, sondern liegen nur in dem durch letztere erzeugten Modul.

Daher sind jetzt die Eigenschaften der Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ zu untersuchen, welche bei Transformation mit konstanten Matrizen erhalten bleiben. Das kommt auf die Invarianten des Systems $\mathsf{B}^1, \ldots, \mathsf{B}^{\varkappa}$ bei simultaner

Transformation heraus. Wegen der Vertauschbarkeit der B^{ν} lassen sich diese in gewisse Normalformen transformieren auf Grund folgender Sätze der Algebra:

Satz 21. *Jede Menge von vertauschbaren Matrizen des gleichen Grades $\varkappa$ läßt sich simultan auf Dreiecksform transformieren* (wo unterhalb der Diagonale alle Elemente Null sind).

Es gibt also zu den Matrizen B^{ν} von § 3 eine Matrix A, so daß alle

$$A\,\mathsf{B}^{\nu} A^{-1}$$

Dreiecksform haben, ebenso wie die allgemeine Matrix des transformierten Ringes

$$\mathsf{B}^* = \sum_{\nu} x_{\nu} A\,\mathsf{B}^{\nu} A^{-1}.$$

Die Diagonalelemente in B^* sind offenbar die **charakteristischen Wurzeln** von B^*; diese sind also lineare homogene Funktionen der Komponenten x_{ν} von B^*. Es seien $L_1, \ldots, L_h$ die verschiedenen unter diesen Linearformen und es trete die Wurzel L_r in der Vielfachheit v_r auf. Dann gilt weiter

Satz 22. *Zu $\varkappa$ linear unabhängigen vertauschbaren Matrizen des Grades $\varkappa$, $\mathsf{B}^1, \ldots, \mathsf{B}^{\varkappa}$, gibt es eine Matrix A, so daß B^* folgende Gestalt hat: Längs der Diagonale von B^* sind h Matrizen bzw. der Grade $v_1, \ldots, v_h$ so aufgereiht, daß ihre Diagonalelemente zugleich in der Diagonale von B^* stehen. Alle Elemente von B^* außerhalb dieser Matrizen sind Null. Jede einzelne der erwähnten Teilmatrizen hat nur je eine einzige charakteristische Wurzel und kann daher nach Satz 21 auf Dreiecksform gebracht werden, wo dann alle Elemente in der Diagonale einander gleich sind.*

Durch diese Sätze, die wir aus der Algebra als bekannt voraussetzen, erhalten wir einen tieferen Einblick in die Struktur der Modulformen:

Satz 23. *Die charakteristischen Wurzeln der Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ gehören selbst zur Schar der $F^{\varrho}(\tau)$. Sie sind bis auf konstante Faktoren identisch mit den Eigenfunktionen des Operatoren-Ringes der T_n.*

Dabei nennen wir **Eigenfunktionen** diejenigen Funktionen der Schar, welche durch alle T_n bis auf einen konstanten Faktor in sich übergehen.

Die erste Aussage ergibt sich sofort aus der oben erwähnten Folgerung zu Satz 21. Ist weiter $f(\tau)$ eine Eigenfunktion und $f \mid T_n = c_n f$, so wähle man f als die eine Erzeugende, etwa $f = F^1(\tau)$, wodurch

$$\lambda_{11}(n) = c_n, \quad \lambda_{1\sigma}(n) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma = 2, \ldots, \varkappa.$$

Daher ist $f_{11}(\tau)$ charakteristische Wurzel von $\mathsf{B}(\tau)$. Aber aus $f \mid T_n = c_n f$ folgt, weil f eine gegen die T_n invariante Funktionsschar mit nur einer Erzeugenden ist, daß

$$f(\tau) = \text{const.} \cdot f_{11}(\tau).$$

Ist umgekehrt f eine charakteristische Wurzel von $\mathsf{B}(\tau)$, so transformiere man B nach Satz 21 auf Dreiecksform, wo dann ein Element in der Diagonale, etwa $f_{11}(\tau)$, gleich $f(\tau)$ ist. Für diese Normalform folgt aber aus der Multiplikationsregel

$$\lambda_{11}(n)\cdot\lambda_{11}(m) = \sum_{d|n,\,m} \lambda_{11}\left(\frac{n\cdot m}{d^2}\right) d^{k-1},$$

und das ist nach der Grundgleichung (19) gleichbedeutend mit

$$f_{11}\,|\,T_n = \lambda_{11}(n)\cdot f_{11},$$

d. h. f_{11} ist Eigenfunktion.

Satz 24. *Die Eigenfunktionen der T_n sind bis auf konstante Faktoren und additive Konstanten identisch mit denjenigen Potenzreihen, deren Dirichlet-Reihen ein Euler-Produkt von der Gestalt*

$$\prod_p \left(1 - c(p)\,p^{-s} + p^{k-1-2s}\right)^{-1} \tag{41}$$

besitzen. Im allgemeinen Falle ist diese Dirichlet-Reihe nur formal, ohne Rücksicht auf Konvergenz, zu nehmen.

Die durch eine Eigenfunktion f mit $f\,|\,T_n = c_n\cdot f$ erzeugte Funktionsschar führt ja nach § 3 zu einer Matrix ersten Grades $\lambda(n) = c_n$, deren Multiplikationsregel nach dem Beweise von Satz 14 in § 3 gerade das Produkt (41) ergibt. Hat umgekehrt eine Dirichlet-Reihe ein Produkt

$$\sum_{n=1}^{\infty} c(n)\cdot n^{-s} = \prod_p \left(1 - c(p)\,p^{-s} + p^{k-1-2s}\right)^{-1}$$

so folgt $c(n)\cdot c(m) = c(n\cdot m)$, wenn $(n, m) = 1$, und für Primzahlpotenzen p^r

$$c(p)\cdot c(p^r) = c(p^{r+1}) + p^{k-1}\cdot c(p^{r-1}) \qquad r \geqq 1,$$

und hieraus nach der Bemerkung am Schlusse von § 2

$$c(n)\cdot c(m) = \sum_{d|n,\,m} c\left(\frac{n\cdot m}{d^2}\right) d^{k-1}.$$

Das hat endlich nach der Grundgleichung (19) bei der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} c(n)\,e^{2\pi i n\tau}$

$$f\,|\,T_n = c(n)\cdot f$$

zur Folge.

In einem erweiterten Sinne ist die Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ selbst Eigenfunktion von T_n, denn aus den Multiplikationsregeln für die $\lambda(n)$ folgt sofort

$$\mathsf{B}(\tau)\,|\,T_n = \lambda(n)\cdot\mathsf{B}(\tau) = \mathsf{B}(\tau)\cdot\lambda(n),$$

(wobei die Operation T_n bei der Matrix B an den Elementen vorgenommen wird).

Satz 25. *Die Eisenstein-Reihe $G_k(\tau)$ ist bis auf einen konstanten Faktor unter den Modulformen der Art $(-k, 1)$ als diejenige Eigenfunktion der T_n zu definieren, welche bei $\tau = \infty$ nicht verschwindet.*

Denn ihre Dirichlet-Reihe ist nach (5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, n^{-s} = \zeta(s) \cdot \zeta(s-k+1)$$

und $G_k(\tau)$ ist daher nach Satz 24 Eigenfunktion. Danach zerfällt also das System aller Modulformen der Art $(-k, 1)$ in zwei Teilscharen, die eine erzeugt durch $G_k(\tau)$, die andere durch die Spitzenformen, und jede dieser Teilscharen geht durch die T_n in sich über. Alle weiteren Eigenfunktionen unter den Modulformen sind also Spitzenformen.

Anmerkung: Die Konstante $f = 1$ ist ebenfalls Eigenfunktion der T_n (für alle k):

$$1 \,|\, T_n = c(n) \cdot 1$$

mit $c(n) = \sigma_{k-1}(n)$. Zu diesen selben „Eigenwerten“ $\frac{1}{c(n)}$ gehört auch $G_k(\tau)$. Nach § 3 ist dies die einzige Möglichkeit, daß zwei unabhängige Eigenfunktionen zu denselben Eigenwerten gehören (ihre Ableitungen sind nicht linear unabhängig!). Unter *allen* in $e^{2\pi i\tau}$ in der oberen Halbebene regulären Funktionen ist also die allgemeinste Eigenfunktion des Operatorenringes der T_n, welche bei $\tau = \infty$ nicht verschwindet,

$$c_0 + c_1 G_k(\tau)$$

mit konstanten c_0, c_1.

Der Nachweis, daß $G_k(\tau)$ Eigenfunktion ist, läßt sich auch unmittelbar aus der Eisenstein-Reihe ohne Umsetzung in die Potenzreihe erbringen.

Satz 26. *Wenn es zur Dimension $-k$ überhaupt Spitzenformen gibt, d. h. für $k \geqq 12$, außer $k = 14$, so gibt es stets auch mindestens eine Eigenfunktion unter den Spitzenformen.*

Denn das System aller Spitzenformen der Dimension $-k$ geht durch T_n in sich über. Die zu diesem System gehörige Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ hat mindestens eine charakteristische Wurzel; eine solche ist nie identisch Null, da der Koeffizient von $e^{2\pi i\tau}$ gleich 1 ist, weil $\lambda(1)$ die Einheitsmatrix ist.

Hieraus folgt ein wichtiges Resultat über das Problem der Dirichlet-Reihen aus Satz 16 in § 3:

Satz 27. *Das Problem der Dirichlet-Reihen aus Satz 16 hat stets die Lösung $\varphi(s) = \zeta(s) \cdot \zeta(s-k+1)$. Sie hat bei $s = k$ einen Pol erster Ordnung. Weitere Lösungen, also solche, die bei $s = k$ regulär sind,*

gibt es nur für $k \geqq 16$ *und* $k = 12$. *In diesen Fällen gibt es auch stets mindestens eine reguläre Lösung, die eine Eulersche Produktentwicklung von der Gestalt* (41) *hat.*

Nun ist die Anzahl der Spitzenformen gleich 1 bei $k = 12$, 26 und $16 \leqq k \leqq 22$. Diese sofort anzugebenden Formen sind dann also Eigenfunktionen, woraus

Satz 28. *Die Dirichlet-Reihen der Funktionen*

$$\Delta(\tau), \quad \Delta(\tau)G_i(\tau) \qquad (i = 4, 6, 8, 10, 14)$$

haben ein Euler-Produkt von der Gestalt (41).

Dieses Resultat ist für Δ von Ramanujan[6]) empirisch vermutet und, wie ich inzwischen festgestellt habe, im Jahre 1917 von Herrn Mordell[7]) bewiesen worden. Der Beweis benutzt die Operatoren T_p für Primzahlen p, deren Vertauschbarkeit im eindimensionalen Falle selbstverständlich ist.

Für allgemeine k läßt sich zunächst nur die aus Satz 22 folgende Zerlegung in invariante Teilscharen vornehmen:

Satz 29. *Wenn die Matrix* $\mathsf{B}(\tau)$, *welche zum vollen System der Modulformen von der Art* $(-k, 1)$ *gehört, genau* h *verschiedene charakteristische Wurzeln* $f_1(\tau), \ldots, f_h(\tau)$ *bzw. von den Vielfachheiten*

$$v_i \quad (i = 1, \ldots, h) \quad (\sum_i v_i = \varkappa)$$

besitzt, so kann man durch passende Wahl der Erzeugenden der Schar nach Satz 22 das volle Formensystem in h *Teilscharen* S_i *aufspalten, wo* S_i *genau* v_i *unabhängige Funktionen enthält und jedes* S_i *durch die* T_n *in sich übergeht. Die Teilschar* S_i *enthält als einzige Eigenfunktion* f_i. *Die Teilscharen* S_i *sind bis auf die Reihenfolge eindeutig durch die Zahl* k *bestimmt.*

Die Teilmatrix $\mathsf{B}_i(\tau)$ des Grades v_i, welche durch die T_n zu der Schar S_i definiert ist, läßt sich dann noch auf Dreiecksform bringen; ihre Diagonalelemente sind gleich $f_i(\tau)$. Da Elemente aus verschiedenen Teilscharen nicht linear abhängig sein können, so sind die verschiedenen Wurzeln von $\mathsf{B}(\tau)$ eo ipso auch linear unabhängig.

Das nächste noch ungelöste Problem ist die Bestimmung dieser einfachsten Invarianten v_i, die zu k gehören, insbesondere die Entscheidung, ob alle $v_i = 1$ sind, d. h. die Reduktion der Matrix B auf reine Diagonalform möglich ist. Für jedes numerische k lassen sich diese v_i

---

[6]) Ramanujan, On Certain Arithmetical Functions, Transactions of the Cambridge Philos. Soc. 22, No. IX (1916).

[7]) L. J. Mordell, On Mr. Ramanujan's Empirical Expansions of Modular Functions, Proc. Cambridge Philos. Soc. 19 (1917).

durch endlich viele rationale Rechenschritte ermitteln, deren Anzahl von vornherein abschätzbar ist. Zunächst können wir uns gleich auf Spitzenformen beschränken, ihre Anzahl ist $\varkappa - 1$. Eine solche Spitzenform ist eindeutig bestimmt durch die ersten $\varkappa - 1$ Glieder ihrer Potenzreihe. Man wähle ein System unabhängiger Formen (etwa gegeben als Polynome in G_4, G_6). Zur Berechnung der $\lambda_{\varrho\sigma}(n)$ braucht man nach den Grundgleichungen die Potenzreihen bis zum Exponenten $n(\varkappa - 1)$ und findet dann durch Auflösen linearer Gleichungen die $\lambda_{\varrho\sigma}(n)$. Hat auch nur eine dieser $\lambda(n)$ lauter verschiedene charakteristische Wurzeln, so folgt bereits, daß alle Wurzeln von $\mathsf{B}(\tau)$ verschieden, alle $v_i = 1$ sind. Da weiter die $f_{\varrho\sigma}(\tau)$ Spitzenformen sind, braucht man nur die $\lambda_{\varrho\sigma}(n)$ für $n \leqq \varkappa - 1$, und wegen der Multiplikationsregel sogar nur für die Primzahlen $n \leqq \varkappa - 1$ so zu berechnen, um den Ausdruck der $f_{\varrho\sigma}(\tau)$ als Polynome in G_4, G_6 und damit auch die $\varkappa - 1$ Matrizen B^ν zu kennen. Die Bestimmung der Vielfachheiten der charakteristischen Wurzeln der Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ ist dann durch die elementare Theorie der algebraischen Gleichungen zu leisten, insbesondere gilt

Satz 30. *Notwendig und hinreichend für die Reduzierbarkeit von* $\mathsf{B}(\tau)$ *auf reine Diagonalform ist, daß die Diskriminante der charakteristischen Gleichung der Matrix* $\sum_\nu x_\nu \mathsf{B}^\nu$ *nicht identisch in den* x_ν *verschwindet.*

Zur Reduktion selbst wird dann im allgemeinen die Adjunktion von bestimmten numerischen Irrationalitäten notwendig sein. Für $k \leqq 34$, wo $\varkappa - 1 \leqq 2$, zeigt nun die Rechnung, daß die Reduktion auf Diagonalform möglich ist. Es treten dabei übrigens schon sehr große Zahlen auf. Speziell sind bei $k = 24$ in der durch $\Delta \cdot G_{12}$, Δ^2 erzeugten Schar zwei Reihen mit Euler-Produkt enthalten, und in deren Koeffizienten tritt die reelle quadratische Zahl $\sqrt{D}$ auf, wo D die Primzahl 144169 ist.

Hamburg, 28. September 1936.

(Eingegangen am 28. 9. 1936.)

Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung.

Von

Poul W. Marke in Kopenhagen.

§ 1.

Einleitung.

In der analytischen Zahlentheorie, z. B. in der Theorie der Riemannschen Zetafunktion, hat es sich gezeigt, welch große Bedeutung es für das Studium einer Dirichletschen Reihe hat, wenn die Reihe einer Funktionalgleichung genügt.

Es liegt deswegen nahe zu untersuchen, inwiefern die Dirichletsche Reihe durch die Funktionalgleichung charakterisiert ist, d. h. wir fragen uns, ob sie eindeutig bestimmt ist. Wenn das nicht der Fall ist, so wünschen wir einerseits zu wissen, wieviel Dirichletsche Reihen die Gleichung als Lösung hat, und andererseits, welche Zusatzforderungen man aufstellen muß, um die Reihe eindeutig zu charakterisieren.

Für die Riemannsche Zetafunktion und für die L-Reihen ist dieses Problem von Herrn Hamburger[1]) untersucht worden, und er hat gezeigt, daß die Zetafunktion und ebenso die Schar der L-Reihen eindeutig durch ihre Funktionalgleichungen charakterisiert sind.

Bei ihm hatte die Funktionalgleichung aber die Gestalt

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot L(s,\chi) = \varepsilon(\chi) \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) L \quad - s, \overline{\chi}),$$

während wir sie in vorliegender Arbeit in der Form

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\, L(2s,\chi) = \varepsilon(\chi) \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(\tfrac{1}{2} - s)\, L(1 - 2s, \overline{\chi})$$

annehmen wollen, die durch Ersetzen von s durch $2s$ entsteht. Die Reihen, die der ersten Funktionalgleichung genügen, sind diejenigen Lösungen der zweiten, die in Dirichletsche Reihen entwickelbar sind mit Koeffizienten $a_n = 0$, wenn n keine Quadratzahl ist. Der Ham-

[1]) H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der Zetafunktion. Erste Mitteilung. Math. Zeitschr. 10 (1921). Zweite Mitteilung. Math. Zeitschr. 11 (1921). Dritte Mitteilung. Math. Zeitschr. 13 (1922).

burgersche Satz sagt also nichts über die Lösungen der zweiten Form der Funktionalgleichung aus.

Weitere Untersuchungen sind von Herrn Hecke[2]) gemacht worden. Er hat gewisse Zusatzforderungen aufgestellt und dann die genaue Anzahl der linear unabhängigen Lösungen einer Funktionalgleichung der Gestalt

$$R(s) = \gamma R(k - s)$$

bestimmt, wobei

$$R(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\, \varphi(s)$$

gesetzt ist, und $\varphi(s)$ in eine Dirichletsche Reihe entwickelbar sein soll. Hierbei sind λ und k beliebige, aber feste, positive Größen, und γ ist entweder $+1$ oder -1.

Einige Funktionalgleichungen, wie z. B. die der L-Reihen, haben eine Form, die nicht so einfach ist. Deswegen betrachtet man in solchen Fällen nicht diese Funktionalgleichungen selber. Man spaltet vielmehr die Reihen in Restklassen auf:

$$\sum_{n \equiv b \pmod q} a_n n^{-s}$$

und untersucht nun die so entstandenen einzelnen Reihen. Es zeigt sich, daß diese Restklassenreihen einem System von Funktionalgleichungen genügen, aus denen man die Funktionalgleichungen der L-Reihen selber herleiten kann. Mit Hilfe dieser Aufspaltung werden ja auch die Funktionalgleichungen tatsächlich bewiesen.

Diese Betrachtung gibt uns eine neue Problemstellung[3]):

Gegeben sei ein System von N Funktionalgleichungen

$$(1) \qquad R_r(k - s) = \sum_{p=1}^{N} c_{rp} R_p(s) \qquad (r = 1, 2, \ldots, N),$$

wobei

$$R_r(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\, \varphi_r(s).$$

λ und k sind beliebig gegebene feste positive Größen. Ferner seien eine natürliche Zahl q und N ganze rationale Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ gegeben.

Von den Funktionen $\varphi_r(s)$ fordern wir nun:

I. $\varphi_r(s)$ soll vom Typus k sein; d. h. $(s - k)\, \varphi_r(s)$ soll eine ganze Funktion endlichen Geschlechtes sein;

II. Die Funktionen $\varphi_r(s)$ sollen den Funktionalgleichungen (1) genügen;

---

[2]) E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Annalen **112** (1936).

[3]) Vgl. die in Fußnote [2]) zitierte Arbeit, S. 689 ff.

III. $\varphi_r(s)$ soll in eine Dirichletsche Reihe

(2) $$\varphi_r(s) = \sum_{n \equiv b_r \pmod q} a_n^{(r)} \cdot n^{-s}$$

entwickelbar sein, in der nur die Zahlen n der Restklasse b_r modulo q vorkommen. Die Reihen sollen irgendwo konvergieren.

Wenn dann die Matrix $\mathfrak{C} = (c_{rp})$ und die Zahlen λ, k, N, q und $b_1, \ldots, b_N$ gegeben sind, soll untersucht werden, wie viele wesentlich verschiedene Funktionensysteme $\{\varphi_r(s)\}$ es gibt, die diesen Forderungen genügen.

Da sich das Interesse auf den Fall konzentriert, wo die Funktionen $\varphi_r(s)$ linear unabhängig sind, nehmen wir noch als Voraussetzung hinzu:

IV. $\mathfrak{C}^2$ = Einheitsmatrix E.

Es wird dann nach der Anzahl der linear unabhängigen Lösungssysteme $\{\varphi_r(s)\}$ gefragt.

Unsere Methode zur Bestimmung dieser Anzahl beruht auf einem Übergang von „Dirichletschen Reihen mit Funktionalgleichungen" zu „Modulformen". Für $\lambda = q$ können wir unter den Voraussetzungen I bis IV die ganze Problemstellung in ein Problem aus der Theorie der Modulformen überführen. Diese Möglichkeit besteht aber nicht immer, und auf Seite 33 werden wir sehen, daß es für $\lambda = 2q$ notwendig scheint, noch eine weitere Voraussetzung zu machen.

Wir ordnen den Funktionen $\varphi_r(s)$ die eindeutig durch sie bestimmten Potenzreihen

(3) $$f_r(\tau) = M\varrho_r + \sum_{n \equiv b_r (q)} a_n^{(r)} e^{2\pi i \frac{n\tau}{\lambda}}$$

zu, wobei

$$M = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-k} \Gamma(k), \quad \varrho_r = \sum_p c_{rp}\,\alpha_p,$$

$$\alpha_p = \text{Residuum von } \varphi_p(s) \text{ bei } s = k.$$

Das konstante Glied $M \cdot \varrho_r$ ist das Residuum von $R_r(s)$ bei $s = 0$.

Die Funktionen $f_r(\tau)$ sind

(4) regulär im Inneren der oberen Halbebene und
regulär bei $\tau = i\infty$, gemessen in $e^{2\pi i \frac{\tau}{\lambda}}$.

Der Übergang von den Dirichletschen Reihen zu den Potenzreihen ist durch die folgenden Formeln gegeben:

$$f_r(it) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{R_r(s)}{t^s}\, ds + M\varrho_r,$$

$$R_r(s) = \int_0^\infty t^{s-1} (f_r(it) - M\varrho_r)\, dt.$$

Durch diese Formeln ergibt sich, daß die Funktionalgleichungen der Dirichletschen Reihen mit den Funktionalgleichungen der Potenzreihen

$$(5) \qquad \frac{f_r\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k} = \sum_{p=1}^{N} c_{rp} f_p(\tau)$$

äquivalent sind.

Außerdem verhalten sich die Funktionen ziemlich einfach gegenüber der Substitution

$$\tau_1 = \tau + \frac{\lambda}{q}.$$

Es gilt nämlich

$$(6) \qquad f_r\left(\tau + \frac{\lambda}{q}\right) = \varepsilon_r f_r(\tau) + M \varrho_r (1 - \varepsilon_r),$$

wobei

$$\varepsilon_r = e^{2\pi i \frac{b_r}{q}}.$$

Die Forderung, daß $\varphi_r(s)$ eine Konvergenzhalbebene haben soll, bedeutet, daß a_n nicht stärker als eine Potenz von n wachsen darf. Sie ist gleichwertig mit den Eigenschaften (4) und der folgenden Abschätzung: Bei Annäherung von τ an die reelle Achse ist mit einem gewissen konstanten K

$$(7) \qquad f_r(u + iv) = O(v^{-K}) \quad \text{für} \quad v \to 0$$

gleichmäßig für alle reellen u, mit $v > 0$.

Haben wir umgekehrt ein System von N Funktionen $f_r(\tau)$ der Form (3), die die Bedingungen (4), (5), (6) und (7) erfüllen, so sind die mit den Koeffizienten $a_n^{(r)}$ gebildeten Dirichletschen Reihen Lösungen des ursprünglichen Problems, d. h. sie erfüllen die Forderungen I bis III.

Durch (5) und (6) haben wir eine Aussage erhalten über das Verhalten der Funktionen $f_r(\tau)$ bei den Substitutionen der unendlichen Gruppe, die durch die Substitutionen

$$\tau_1 = -\frac{1}{\tau} \quad \text{und} \quad \tau_2 = \tau + \frac{\lambda}{q}$$

erzeugt wird. Es ist also klar, daß diese Gruppe eine große Rolle für unsere Untersuchungen spielen wird.

Herr Hecke hat in seiner Arbeit den Fall $\lambda = q$ behandelt. Die folgenden Untersuchungen über den Fall $\lambda = 2q$ habe ich auf seine Anregung hin durchgeführt. Ich bin ihm für seine wertvollen Ratschläge sehr dankbar.

§ 2.

$\lambda = 2q$.

Die Gruppe, die für uns hier in Frage kommt, wird durch die Substitutionen

$$\tau_1 = -\frac{1}{\tau} \quad \text{und} \quad \tau_2 = \tau + 2$$

erzeugt. Wir bezeichnen sie mit Γ_3. Innerhalb der vollen Modulgruppe ist Γ_3 durch die Forderung

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_3, \quad \text{falls} \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 0 \pmod 2,$$

als Kongruenzuntergruppe charakterisiert.

Γ_3 hat im Fundamentalbereich zwei nicht äquivalente Spitzen und keine inneren Fixpunkte außer $\tau = i$ und den damit äquivalenten. Diese zwei Eigenschaften bewirken, daß einige Untersuchungen, die für $\lambda = q$ beinahe trivial waren, hier nicht durchgeführt werden können. Es sind dies die folgenden:

1. Für $\lambda = q$ konnte man unmittelbar die Substitution

$$\tau' = \frac{-1}{\tau+1}$$

betrachten; sie ist elliptisch von der Ordnung 3. Daraus ergab sich ein Satz über die Residuen, nämlich

$$(9) \qquad \varrho_r(1 - \varepsilon_r) = 0 \quad \text{für alle } r.$$

Die Möglichkeit, einen solchen Satz mit Hilfe von Fixpunkten zu beweisen, besteht für uns jetzt nicht mehr. Andererseits benötigen wir den Satz (9), damit wir überhaupt auf Modulformen kommen, und wir müssen deswegen eine mit (9) äquivalente Voraussetzung machen:

V. Falls $b_r \not\equiv 0 \pmod q$, soll $\varrho_r = 0$ sein.

Diese Forderung bedeutet, daß $R_r(s)$ (vgl. S. 30) nur dann einen Pol in $s = 0$ haben darf, wenn $\varphi_r(s)$ zu der Restklasse 0 gehört; entsprechend hat die Exponentialreihe für $f_r(\tau)$ nur in diesem Fall ein konstantes Glied. Sonst hat $f_r(\tau)$ eine Nullstelle in $\tau = i\,\infty$.

Bezüglich der Frage, ob unser ursprüngliches Problem (I bis IV) endlich oder unendlich viele Lösungen hat, ist diese neue Voraussetzung unerheblich, da die Residuensysteme der R-Funktionen eine N-dimensionale Schar bilden. Wir wählen n Lösungssysteme

$$\{\Phi_r^{(1)}(s)\}, \ldots, \{\Phi_r^{(n)}(s)\} \qquad n \leq N,$$

so daß die Residuensysteme der entsprechenden $\{R_r^{(i)}(s)\}$, $i = 1, \ldots, n$, bei $s = 0$ eine Basis für die Menge der möglichen Systeme bilden. Jede Lösung unseres Problems hat dann die Form

$$\psi_r(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi_r^{(i)}(s) + \varphi_r(s),$$

wobei $\{\varphi_r(s)\}$ ein System ist, das auch der Voraussetzung V genügt. Für jedes System $\{\varphi_r(s)\}$ bekommen wir in dieser Weise n Lösungssysteme unseres Problems, und die Endlichkeitsfrage ist also davon unabhängig, ob wir die Voraussetzung V machen oder nicht.

2. Wenn die Voraussetzung V erfüllt ist, fällt in der Gleichung (6) das konstante Glied weg, und im Falle $\lambda = q$ war es dann klar, daß die Funktionen $f_r(\tau)$ in allen rationalen Punkten reguläre Funktionen der Ortsvariablen waren; denn alle rationalen Punkte waren äquivalent. Für $\lambda = 2q$ ist die Sache nicht mehr so einfach, weil wir mehrere inäquivalente Spitzen haben. Wenn aber unsere Funktionen, wie unten beschrieben, durch Division mit $\vartheta_3(\tau)$ normiert werden, zeigt es sich, daß alle die Funktionen, die uns hier interessieren, gegenüber einem Normalteiler von endlichem Index aus Γ_3 invariant bleiben. Wenn dies der Fall ist, folgt aus (7), daß die Funktionen in den Ortsvariablen regulär sind, abgesehen von einigen Polen in den Spitzen, wo der Nenner eine Nullstelle hat; die Multiplizität eines solchen Poles ist höchstens so groß wie die Multiplizität der entsprechenden Nullstelle des Nenners[4]).

Wir normieren jetzt unsere Funktionen, indem wir durch eine passende Potenz von $\vartheta_3(\tau)$ dividieren. Dadurch gelingt es uns, die Schwierigkeiten, die aus der beliebigen, reellen Dimension entstehen, zu beseitigen. Statt $f_r(\tau)$ betrachten wir also die Funktionen

$$F_r(\tau) = \frac{f_r(\tau)}{\vartheta_3^{2k}(\tau)},$$

wobei

$$\vartheta_3(\tau) = \sum_n e^{2\pi i n^2 \tau}.$$

Durch einfache Betrachtung von $\log \vartheta_3(\tau)$ sieht man, daß diese Normierung für alle reellen k verwendbar ist, und daß die Formeln (5) und (6) die folgende Gestalt annehmen:

$$F_r(\tau + 2) = \varepsilon_r F_r(\tau),$$

$$F_r\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_p c_{rp} F_p(\tau).$$

Hierbei sind die $F_r(\tau)$ in den Ortsvariablen überall reguläre Funktionen, bis auf die Pole, die von den Nullstellen von $\vartheta_3(\tau)$ herrühren.

Die Gruppe der Modulsubstitutionen aus Γ_3 kann man auf die Gruppe $\mathfrak{G}$ abbilden, die von den Matrizen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{U}$ erzeugt wird, wobei

$$\mathfrak{U} = (\delta_{rp}\,\varepsilon_r), \quad \delta_{rp} = \begin{cases} 0 & \text{für } r \neq p \\ 1 & \text{für } r = p \end{cases}.$$

---

[4]) Vgl. die in Fußnote [2]) zitierte Arbeit, S. 675 ff.

Uns interessieren die Fälle, wo $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe ist. Dann gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ aus Γ_2 mit endlichem Index, so daß die Faktorgruppe $\Gamma_2/\mathfrak{N}$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ 1-isomorph ist, und unsere Funktionen werden gegenüber diesem Normalteiler invariant bleiben.

Da es zu einem solchen Normalteiler nur endlich viele linear unabhängige Funktionen mit gegebenen Polen gibt, ist es klar, daß unser Problem in diesem Fall nur endlich viele linear unabhängige Lösungssysteme haben kann.

Im folgenden werden wir die speziellen Matrizen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{U}$ betrachten, die bei den L-Reihen auftreten, für die $\chi(-1) = 1$ ist.

In § 3 wird das Verhalten der Thetateilwerte gegenüber beliebigen Substitutionen aus Γ_2 ohne Bezugnahme auf die allgemeine Theorie untersucht[5]). Dadurch wird gezeigt, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ endlich ist, und der Normalteiler $\mathfrak{N}$ wird bestimmt. Hiermit ist schon bewiesen, daß die Anzahl der Lösungssysteme unseres Problems endlich ist.

Nach einigen Untersuchungen über die Funktionen, die gegenüber dem Normalteiler $\mathfrak{N}$ invariant bleiben, gehen wir in § 5 zu einer Anwendung der Darstellungstheorie über, und wir finden für Primzahlen $q \equiv 1 \pmod 8$ eine Formel für die Anzahl der linear unabhängigen Lösungssysteme, deren Funktionen linear unabhängig sind.

Die Größen, die in diese Formel eingehen, werden in § 6 berechnet, und in § 7 können wir folgendes Hauptresultat formulieren:

Für Primzahlen $q \equiv 1 \pmod 8$ *ist die Anzahl der Systeme gleich*

$$y_1 = \sum_n \left[\frac{k}{4} + \frac{n}{q}\right] + \left[\frac{k}{4}\right] - \frac{q-1}{8} + 1,$$

wenn nur $k \geqq 2\left(1 - \frac{3}{q}\right)$ *ist. Hierbei durchläuft* n *sämtliche quadratischen Reste modulo* q.

§ 3.

Spezielle Matrizen.

Jetzt soll unser Problem I bis V mit den speziellen Bedingungen

$$\text{(10)} \quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad b_r = r^2, \quad r = 0, 1, \ldots, q-1, \\ &\text{b)} \quad R_r(k-s) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{p=1}^{q} \zeta_q^{-pr} R_p(s), \qquad \zeta_q = e^{\frac{2\pi i}{q}} \end{aligned}$$

betrachtet werden. Die Indizes r, p sollen nur mod q gerechnet werden.

---

[5]) Im Prinzip ist es schon bekannt. Siehe etwa: Klein-Fricke, Elliptische Modulfunktionen.

Aus b) folgt

(11) $$R_r(s) = R_{q-r}(s), \quad \text{also} \quad \varphi_r(s) = \varphi_{q-r}(s),$$

wie man durch Wiederholung der Sustitution erkennt. Die Matrizen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{U}$ haben also nur den Grad $N = \left[\frac{q}{2}\right] + 1$, für die Rechnung ist es aber angenehm, die Funktionalgleichungen in der Form (10) zu haben.

Für die entsprechenden Potenzreihen gilt dann:

(12) $$f_r(\tau + 2) = \zeta_q^{r^2} f_r(\tau)$$

(13) $$\frac{f_r\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k} = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{p=1}^{q} \zeta_q^{-pr} f_p(\tau)$$

Um nun die zu beliebigen Substitutionen gehörigen Umsetzungsformeln zu finden, betrachten wir ein spezielles System von Reihen, die den Funktionalgleichungen genügen, und die, bis auf (11), linear unabhängig sind. Die Formeln, die wir für diese Reihen finden, werden dann auch für alle anderen Systeme, die den Funktionalgleichungen (12) und (13) genügen, gelten, und sie geben uns also die Matrizen der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Unsere speziellen Reihen sind

(14) $$\varphi_r(s) = \varphi(s, r, q) = 2 \sum_{n \equiv r \ (\mathrm{mod}\ q),\ n > 0} n^{-2s},$$

und die entsprechenden Potenzreihen sind

(15) $$f_r(\tau) = \vartheta(\tau, r, q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i (nq+r)^2 \frac{\tau}{q}},$$

wo r sämtliche Restklassen modulo q durchläuft. Daß diese Reihen wirklich unseren Funktionalgleichungen genügen, folgt aus einer wohlbekannten Relation aus der Theorie der Thetafunktionen.

Für diese Reihen gelten die Formeln

(16) $$\vartheta(n\tau, r, q) = \vartheta(\tau, nr, nq),$$

(17) $$\vartheta(\tau, r, q) = \sum_{\substack{b \bmod nq \\ b \equiv r \ (\mathrm{mod}\ q)}} \vartheta(n\tau, b, nq) \quad \text{für jede natürliche Zahl } n,$$

und für pq gerade:

(18) $$\vartheta(\tau + p, r, q) = \zeta_{2q}^{r^2 p} \cdot \vartheta(\tau, r, q).$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit (13) machen es relativ leicht, das Verhalten von $\vartheta(\tau, r, q)$ gegenüber beliebigen Substitutionen aus Γ_3 zu bestimmen[6]).

---

[6]) Vgl. E. Hecke, Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Annalen 97 (1926), S. 224 ff.

Die Gruppe Γ_3 ist durch die Relation (8) charakterisiert, und diese Relation in Verbindung mit der Determinantenbedingung besagt, daß von den Zahlenpaaren (α, δ) und (β, γ) das eine aus zwei geraden, das andere aus zwei ungeraden Zahlen bestehen muß.

Ist

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad \gamma \neq 0,$$

eine Substitution aus Γ_3, so wird

$$\vartheta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, r, q\right) = \vartheta\left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma(\gamma\tau+\delta)}, r, q\right)$$
$$= \sum_{\substack{b \bmod \gamma q \\ b \equiv r(q)}} \vartheta\left(\alpha - \frac{1}{\gamma\tau+\delta}, b, \gamma q\right),$$

und da entweder α oder γ gerade ist:

$$= \sum_{\substack{b \bmod \gamma q \\ b \equiv r(q)}} \zeta_{2\gamma q}^{b^2\alpha}\, \vartheta\left(-\frac{1}{\gamma\tau+\delta}, b, \gamma q\right)$$
$$= \sqrt{\frac{\gamma\tau+\delta}{i\gamma q}} \sum_{\substack{b \bmod \gamma q \\ b \equiv r(q)}} \zeta_{2\gamma q}^{b^2\alpha} \sum_{a \bmod \gamma q} \zeta_{\gamma q}^{-ab}\, \vartheta(\gamma\tau+\delta, a, \gamma q)$$
$$= \sqrt{\frac{\gamma\tau+\delta}{i\gamma q}} \sum_{a \bmod \gamma q} \vartheta(\gamma\tau, a, \gamma q) \cdot \psi_L(a, r).$$

Dabei bedeutet

$$\psi_L(a, r) = \sum_{\substack{b \bmod \gamma q \\ b \equiv r(q)}} \exp\left\{2\pi i \frac{\alpha b^2 - 2ab + a^2\delta}{2\gamma q}\right\}.$$

Hier kommt a aber nur modulo q in Frage, was man aus

$$\psi_L(a, r + \delta a) = \exp\left\{2\pi i \frac{2\beta a r + \beta\delta a^2}{2q}\right\} \psi_L(0, r)$$

ersehen kann. Mit Hilfe von (17) bekommen wir dann:

$$\frac{\vartheta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, r, q\right)}{\sqrt{-i(\gamma\tau+\delta)}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{h \bmod q} \psi_L(h, r) \cdot \vartheta(\tau, h, q)$$

und haben jetzt die Umsetzungsformeln gegenüber beliebigen Substitutionen aus Γ_3.

Um ganzzahlige Dimensionen zu erhalten, dividieren wir durch $\vartheta_3(\tau)$, und wenn dann

$$\theta(\tau, r, q) = \frac{\vartheta(\tau, r, q)}{\vartheta_3(\tau)}$$

gesetzt wird, so gelten die folgenden Umsetzungsformeln:

$$\theta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, r, q\right) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{h \bmod q} \frac{\psi_L(h, r)}{\psi_L^0}\, \theta(\tau, h, q). \tag{19}$$

Dabei bedeutet

(20) $$\psi_L(h,r) = \exp\left\{2\pi i\,\frac{2\beta r h - \beta\delta h^2}{2q}\right\}\psi_L(0,r-\delta h),$$

(21) $$\psi_L(0,r) = \sum_{\substack{b \bmod \gamma q\\ b\equiv r(q)}} \zeta_{2\gamma q}^{b^2\alpha} \qquad \psi_L^0 = \sum_{b \bmod \gamma} \zeta_{2\gamma}^{b^2}.$$

Wie schon früher bemerkt, wird diese Relation von sämtlichen Reihen, die unseren Forderungen genügen, erfüllt werden, wenn wir durch Division mit $\vartheta_3^{2k}(\tau)$ zur Dimension 0 übergegangen sind. Die weiteren Überlegungen sind also von der speziellen Wahl unserer Reihen vollständig unabhängig.

Die Matrizen der Gruppe $\mathfrak{G}$ sind hierdurch bestimmt. Ebenso wie wir aber die Relation (11) in (10) einsetzen mußten, wenn wir die Matrix $\mathfrak{C}$ finden wollten, so müssen wir auch hier die Relation

$$\theta(\tau,r,q) = \theta(\tau,-r,q)$$

in (19) einsetzen, um die zu der Substitution L gehörige Matrix zu finden. Für unsere Zwecke ist aber die Formel (19) bequemer.

Es fragt sich nun, bei welcher Untergruppe unsere Funktionen invariant bleiben. Um eine solche Untergruppe zu finden, werden wir nach und nach durch geeignete Forderungen an die Substitutionen die Umsetzungsformeln vereinfachen.

Die erste Forderung ist

$$\delta \equiv 0 \pmod{q};$$

denn man kann kaum ohne diese Forderung Invarianz erwarten. Jetzt kann in (20) statt $(0, r-\delta h)$ einfacher $(0,r)$ geschrieben werden, und in (19) können einige Faktoren vor das Summenzeichen geschrieben werden. Ersetzen wir dann in (19) τ durch $-\frac{1}{\tau}$, so bekommen wir

$$\theta\left(\frac{\beta\tau-\alpha}{\delta\tau-\gamma}, r, q\right) = \frac{\psi_L(0,r)}{\psi_L^0}\sum_{b \bmod q}\varphi_L(r,b)\,\theta(\tau,b,q),$$

wobei

$$\varphi_L(r,b) = \frac{1}{q}\sum_{g \bmod q}\exp\left\{2\pi i\,\frac{2\beta r g - \beta\delta g^2 - 2bg}{2q}\right\}.$$

Jetzt muß erreicht werden, daß $\varphi_L(r,b) = 0$, wenn $b \not\equiv \pm r \pmod{q}$.

Für ungerade q ist $\beta\delta$ durch $2q$ teilbar, das quadratische Glied fällt weg, und $\varphi_L(r,b)$ ist 0, wenn

$$r\beta \not\equiv b \pmod{q}.$$

β muß also $\equiv \pm 1 \pmod{q}$ vorausgesetzt werden, und für ungerade q haben wir dann

(22) $$\theta\left(\frac{\beta\tau-\alpha}{\delta\tau-\gamma}, r, q\right) = \frac{\psi_L(0,r)}{\psi_L^0}\,\theta(\tau,r,q).$$

Ist q gerade, so können die geraden und die ungeraden Restklassen für sich genommen werden. Beidemale fällt das quadratische Glied weg, und $\varphi_L(r, b)$ ist 0, wenn

$$r\beta \not\equiv b \left(\bmod \frac{q}{2}\right).$$

Falls aber diese Kongruenz erfüllt ist, so wird

$$\varphi_L(r, b) = \frac{1}{2}\left[1 + \exp\left\{2\pi i \frac{2\beta r - 2b - \beta\delta}{2q}\right\}\right].$$

Daraus folgt, daß wir fordern müssen

$$\beta \equiv \pm 1 \pmod q$$
$$\delta \equiv 0 \pmod{2q},$$

und wenn das erfüllt ist, gilt auch hier (22).

Das doppelte Vorzeichen hat keine wirkliche Bedeutung; denn wir können das Vorzeichen für sämtliche Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wechseln.

Des weiteren darf $\psi_L(0, r)$ nicht von r abhängen. Da aber

$$\psi_L(0, \gamma) = \zeta_{2q}^{\alpha\gamma} \cdot \psi_L(0, 0),$$

muß $2q$ in $\alpha\gamma$ aufgehen. Für ungerade q ist das erfüllt, wenn

$$\alpha \equiv 0 \pmod q,$$

während die Forderung für gerade q notwendig

$$\alpha \equiv 0 \pmod{2q}$$

lauten muß. Diese Bedingungen sind auch hinreichend.

Wir führen jetzt die folgenden Gruppenbezeichnungen ein:

Mit $\Gamma(q)$ bezeichnen wir die Hauptkongruenzuntergruppe q-ter Stufe innerhalb der Modulgruppe $\Gamma(1)$. Sie ist durch die Forderung

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod q \tag{23}$$

charakterisiert. Wenn q gerade ist, sieht man, daß $\Gamma(q) \subset \Gamma_3$.

Mit $\Gamma_3(q)$ bezeichnen wir die $\Gamma(q)$ entsprechende Untergruppe aus Γ_3. Sie ist durch die Forderung (23) in Verbindung mit (8) charakterisiert. Wenn q gerade ist, gilt $\Gamma(q) = \Gamma_3(q)$.

Weiter brauchen wir später die Eigenschaft, daß die beiden Faktorgruppen $\Gamma(1)/\Gamma(q)$ und $\Gamma_3/\Gamma_3(q)$ 1-isomorph sind, wenn q ungerade ist.

Für Substitutionen, die für ungerade q zu der Gruppe $\Gamma_3(q)$, für gerade q zu der Gruppe $\Gamma(2q)$ gehören, gilt also

$$\theta\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, r, q\right) = \frac{\psi_L''}{\psi_L'}\theta(\tau, r, q) = C_L(q)\,\theta(\tau, r, q). \tag{24}$$

Dabei bedeutet

$$(25) \qquad \psi''_L = \sum_{b \bmod \delta} \zeta_{2\delta}^{b^2 q \beta} \qquad \psi'_L = \sum_{b \bmod \delta} \zeta_{2\delta}^{b^2 \beta}.$$

Die Gaußschen Summen können in gewöhnlicher Weise ausgerechnet werden, und man findet dann

$$C_L(q) = \left(\frac{q}{\delta}\right).$$

Das gilt für gerade q; es gilt auch für ungerade q, wenn gleichzeitig δ ungerade ist. Wenn δ gerade ist, schreiben wir $\delta = 2^\nu \delta_1$, wo δ_1 ungerade ist; für gerade ν ist dann

$$C_L(q) = \left(\frac{q}{\delta_1}\right) \zeta_8^{(q-1)\beta\delta_1},$$

während für ungerade ν gilt

$$C_L(q) = \left(\frac{q}{\delta_1}\right) \frac{1 + i^{q\beta\delta_1}}{1 + i^{\beta\delta_1}}.$$

In folgender Tabelle geben wir für $q \equiv j \pmod 8$ die Untergruppe $\mathfrak{G}_j(q)$ an, für die $C_L(q) = 1$ ist.

$$(26) \quad \begin{array}{llll}
q \equiv 0 \pmod 8, & \Gamma(2q), & & \\
q \equiv 1 \pmod 8, & \Gamma_3(q), & & \\
q \equiv 2 \pmod 8, & \text{Untergruppe von } \Gamma(2q) & \text{mit} & \delta \equiv \pm 1 \pmod 8, \\
q \equiv 3 \pmod 8, & \quad " \qquad " \quad \Gamma(2q) & " & \delta \equiv 1 \pmod 4, \\
q \equiv 4 \pmod 8, & \Gamma(2q), & & \\
q \equiv 5 \pmod 8, & \Gamma(2q), & & \\
q \equiv 6 \pmod 8, & \text{Untergruppe von } \Gamma(2q) & \text{mit} & \delta \equiv 1 \text{ oder } 3 \pmod 8, \\
q \equiv 7 \pmod 8, & \quad " \qquad " \quad \Gamma(2q) & " & \delta \equiv 1 \pmod 4.
\end{array}$$

Gegenüber diesen Gruppen sind also unsere Funktionen invariant.

Jetzt haben wir das erste Hauptresultat erreicht. Es ist nämlich jetzt klar, daß diese Gruppen Normalteiler von endlichem Index von Γ_3 sind. Es gilt also (vgl. S. 35):

Erster Hauptsatz: *Die Funktionalgleichungen* (10) *haben nur endlichviele linear unabhängige Lösungssysteme* $\{\varphi_r^{(j)}(s)\}$, *deren Funktionen* $\varphi_r^{(j)}(s)$ *mit* $r = 1, 2, \ldots, q$ *bis auf* (11) *linear unabhängig sind und* I *bis* V *genügen.*

§ 4.

Einige Anzahlbestimmungen.

Die Funktionen $\theta(\tau, r, q)$, die Lösungen unseres Problems sein können, müssen also Funktionen sein, die zu den Gruppen (26) gehören.

Die Fundamentalbereiche dieser Gruppen können als Riemannsche Flächen betrachtet werden, und unsere Funktionen sind auf diesen Flächen eindeutig und, bis auf die Singularitäten, die von den Nullstellen von $\vartheta_3^{2k}(\tau)$ herrühren, überall regulär. Die Menge der Funktionen, die diese Bedingungen erfüllen, bildet einen Modul $\mathfrak{M}$[7]). Unter der Dimension dieses Moduls verstehen wir die Anzahl linear unabhängiger Funktionen in diesem Modul. Durch Verwendung des Riemann-Rochschen Satzes können wir die Dimension bestimmen und haben dadurch einen gewissen Überblick über die Menge der in Betracht kommenden Funktionen bekommen.

Die verschiedenen Größen, die für den Modul charakteristisch sind, werden wir für $q \equiv i \pmod 8$ so bezeichnen:

$\mu_i(q)$ = Index der Gruppe innerhalb Γ_3;

$p_i(q)$ = Geschlecht der Riemannschen Fläche;

$m_i(q)$ = maximal mögliche Anzahl der Singularitäten im Fundamentalbereich, in den Ortsvariablen gemessen;

$D_i(q)$ = Dimension des Moduls.

Für die Hauptkongruenzuntergruppen sind die Indexbestimmungen innerhalb der vollen Modulgruppe durchgeführt worden mit dem Resultat

$$\mu(q) = \frac{1}{2} q^3 \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

wobei p sämtliche Primzahlen, die in q aufgehen, durchläuft. Dieses Resultat können wir hier benutzen. Der Index einer Gruppe, die durch Zusatzforderungen definiert ist, wird dadurch gefunden, daß wir einen geeigneten Gruppencharakter einführen und dadurch die Gruppe als Normalteiler innerhalb der Hauptkongruenzuntergruppe charakterisieren; die Anzahl der Elemente der Faktorgruppe läßt sich dann leicht bestimmen.

Die Bemerkungen auf S. 39 geben uns die Möglichkeit, die Indizes der Gruppen $\Gamma_3(q)$ zu finden.

Die Riemannschen Flächen werden durch die Fundamentalbereiche von Γ_3 trianguliert, und die Geschlechtsbestimmungen können also mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel durchgeführt werden.

Als Fundamentaldreieck benutzen wir die Hälfte des Fundamentalbereiches von Γ_3. Keiner von den mit $\tau = i$ äquivalenten Punkten ist

---

[7]) Umgekehrt sieht man leicht, daß sämtliche Funktionen dieses Moduls (7) genügen. Vgl. E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Annalen 112 (1936), S. 677 und 686.

Fixpunkt für unsere Gruppen. Die rationalen Spitzen werden in zwei Scharen geteilt, je nachdem ob sie mit $\tau = i\infty$ oder $\tau = -1$ (modulo Γ_3) äquivalent sind. Da, wie schon auf Seite 35 gesagt, alle unsere Gruppen Normalteiler von Γ_3 sind, brauchen wir von jeder Schar nur einen Repräsentanten zu betrachten. Wir bezeichnen mit $2n_\infty$ bzw. $2n_{-1}$ die Anzahl der Halbdreiecke, die in der Spitze $i\infty$ bzw. -1 zusammenstoßen und nach der Untergruppe inäquivalent sind. Dann ist das Geschlecht:

$$p = 1 + \frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{n_\infty} + \frac{1}{n_{-1}}\right).$$

Wir bekommen hierdurch die Tabelle:

i	$\mu_i(q)$	$n_\infty^{(i)}$	$n_{-1}^{(i)}$	$p_i(q)$
0	$\frac{2}{3}q^3\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$	q	$2q$	$1+\frac{\mu_0(q)}{4}-\frac{3\mu_0(q)}{4q}$
1	$\frac{1}{2}q^3\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$	q	q	$1+\frac{\mu_1(q)}{4}-\frac{\mu_1(q)}{q}$
2	$\frac{4}{3}q^3\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$	q	$4q$	$1+\frac{\mu_2(q)}{4}-\frac{5\mu_2(q)}{8q}$
3	$2q^3\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$	q	$4q$	$1+\frac{\mu_3(q)}{4}-\frac{5\mu_3(q)}{8q}$
4	$\frac{4}{3}q^3\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$	q	$2q$	$1+\frac{\mu_4(q)}{4}-\frac{3\mu_4(q)}{4q}$
5	$q^3\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$	q	$2q$	$1+\frac{\mu_5(q)}{4}-\frac{3\mu_5(q)}{4q}$
6	$\frac{4}{3}q^3\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$	q	$4q$	$1+\frac{\mu_6(q)}{4}-\frac{5\mu_6(q)}{8q}$
7	$2q^3\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$	q	$4q$	$1+\frac{\mu_7(q)}{4}-\frac{5\mu_7(q)}{8q}$

In jedem Punkte vom Typus -1 modulo Γ_3 hat $\vartheta_3(\tau)$ eine Nullstelle der Ordnung $\frac{1}{8}$ gemessen in $e^{2\pi i L(\tau)}$, und unsere Funktionen $F_r(\tau)$ (vgl. Seite 34) können keine anderen Singularitäten haben als diejenigen, welche von diesen Nullstellen herrühren. In allen Punkten vom Typus -1 haben wir als Ortsvariable

$$e^{2\pi i \frac{L(\tau)}{n_{-1}}}.$$

und da $F_r(\tau)$ eine Funktion dieser Variablen ist, muß die Ordnung der Nullstelle in dieser Variablen gemessen eine ganze Zahl sein. Die maximale Polordnung in jeder Spitze dieser Art wird deswegen

$$\left[\frac{k\, n_{-1}^{(t)}}{4}\right]$$

sein und im ganzen also

$$m_t(q) = \frac{\mu_t(q)}{n_{-1}^{(t)}} \left[\frac{k\, n_{-1}^{(t)}}{4}\right]$$

betragen.

Die Dimension des Moduls ist dann nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$D_t(q) = m_t(q) - p_t(q) + 1 + \omega_t(q). \tag{27}$$

Dabei bezeichnet $\omega_t(q)$ die Anzahl der linear unabhängigen Abelschen Differentiale auf der Riemannschen Fläche, die in sämtlichen $m_t(q)$ Punkten Nullstellen haben. $\omega_t(q)$ ist $= 0$, falls $m_t(q)$ größer als $2p_t(q) - 2$ ist.

In § 5 werden wir für spezielle q die Verhältnisse innerhalb dieses Moduls mit Hilfe der Darstellungstheorie genauer untersuchen.

Etwas genauer können wir unsere Funktionen dadurch festlegen, daß wir nicht nur verlangen, daß sie $\mathfrak{M}$ angehören sollen, sondern auch annehmen, daß sie bei Anwendung der Substitution

$$U\colon\quad \tau_1 = \tau + 2$$

sich nur um eine q-te Einheitswurzel ändern.

Die Fragestellung ist also: Wieviel linear unabhängige Funktionen gibt es in $\mathfrak{M}$, die bei Anwendung von U mit einer bestimmten q-ten Einheitswurzel multipliziert werden?

Der Quotient zweier solcher Funktionen ist invariant gegenüber einer Gruppe, $\mathfrak{G}_t^*(q)$, die umfassender ist als $\mathfrak{G}_t(q)$, da sie auch die Substitution U enthält. Die Funktionen, die gegenüber $\mathfrak{G}_t^*(q)$ invariant bleiben, bilden ein Modul $\mathfrak{M}^*$, und auch für diesen Modul können wir die Dimension bestimmen.

Die Funktionen sollen bei Anwendung von U mit einer bestimmten q-ten Einheitswurzel multipliziert werden; daher muß die q-te Potenz invariant bleiben. Die Funktion selbst besitzt also eine Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_n a_n t^n, \qquad t = e^{\frac{\pi i \tau}{q}}, \tag{28}$$

und es gilt

$$f^q(\tau) = \sum_m b_m t^{qm} = (\sum_n a_n t^n)^q.$$

Hieraus folgt aber, daß alle diejenigen n, für die in (28) das $a_n \neq 0$ ist, in dieselbe Restklasse modulo q gehören.

Um die Dimensionsbestimmungen durchführen zu können, müssen wir auch für diese Gruppen den Index $\mu_i^*(q)$ und das Geschlecht $p_i^*(q)$ finden.

Die Indexbestimmungen sind leicht; denn wenn die Substitutionen mit

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

bezeichnet werden, so ist entweder

$$e^{\pi i \frac{\beta}{q}} \quad \text{oder} \quad e^{2\pi i \frac{\beta}{q}}$$

ein Gruppencharakter und kennzeichnet $\mathfrak{G}_i(q)$ innerhalb $\mathfrak{G}_i^*(q)$ als Normalteiler vom Index q. Also ist

$$\mu_i^*(q) = \frac{1}{q}\,\mu_i(q).$$

Die Geschlechtsbestimmungen sind nicht ganz so einfach wie früher, weil unsere Gruppen nicht Normalteiler innerhalb Γ_3 sind. Wir müssen deshalb jede Spitze für sich betrachten.

Eine Substitution mit dem Fixpunkt $\frac{r}{s}$ ist von der Form

$$(29) \qquad \begin{pmatrix} 1 - nrs & nr^2 \\ -ns^2 & 1 + nrs \end{pmatrix},$$

und die Frage ist, wann diese Substitution in $\mathfrak{G}_i^*(q)$ enthalten ist. Diese Untersuchungen werden wir hier nur für prime q durchführen.

Wenn q nicht in s aufgeht, so ist die Substitution nur dann in $\mathfrak{G}_i^*(q)$ enthalten, wenn sie auch in $\mathfrak{G}_i(q)$ liegt. Es sind also nur die Spitzen mit q/s, die sich anders verhalten können, und nur in diesen Spitzen bekommen wir neue Ortsvariablen.

Für Primzahlen $q \equiv 1 \pmod 8$ gibt es $q - 1$ inäquivalente Spitzen mit q/s. Für diese Spitzen ist $n = 1$, während alle anderen Spitzen $n = q$ haben. Eine leichte Abzählung ergibt, daß es insgesamt $2(q-1)$ inäquivalente Spitzen gibt. Das Geschlecht wird dann

$$p_1(q) = 1 + \frac{(q-1)(q-7)}{8}.$$

In ganz ähnlicher Weise findet man

$$p_3(q) = 1 + \frac{(q-1)(q-4)}{2},$$

$$p_5(q) = 1 + \frac{(q-1)(q-5)}{4},$$

$$p_7(q) = 1 + \frac{(q-1)(q-4)}{2}.$$

Jetzt müssen wir die maximale Polanzahl $m_t(q)$ bestimmen. Das werden wir nur für **Primzahlen** $q \equiv 1 \pmod 8$ durchführen; die Rechnungen sind aber in den anderen Fällen ganz analog. Wir betrachten den Quotienten

$$H(\tau) = \frac{F(\tau)}{G(\tau)}$$

zweier unserer Funktionen.

Die Pole von $H(\tau)$ sind entweder Pole von $F(\tau)$ oder Nullstellen von $G(\tau)$, und die Pole von $F(\tau)$ und $G(\tau)$ liegen alle in den Punkten, die modulo Γ_3 mit -1 äquivalent sind; wir nennen sie die Punkte des Typus -1.

Die Nullstellen der Funktionen können nicht ganz beliebig verteilt sein. Denn eine Funktion $F(\tau)$ kann sich bei der Substitution U nur dann mit dem Faktor

$$e^{2\pi i \frac{\beta}{q}}$$

multiplizieren, wenn sie die Form

$$e^{\pi i \frac{\beta \tau}{q}} \cdot \sum_{n=-p}^{\infty} a_n e^{\pi i n \tau}$$

hat. Wenn wir also vorläufig die Pole und Nullstellen ganzer Ordnung nicht berücksichtigen, muß $F(\tau)$ in der Ortsvariablen $e^{\pi i \tau}$ gemessen eine Nullstelle der Multiplizität

$$\frac{\beta}{q}$$

haben, falls $\beta < q$ gewählt wird. Da sowohl Zähler als Nenner denselben Faktor bekommen sollen, werden sie beide diese Nullstelle haben, und derartige Nullstellen geben also keine Pole.

Auch in den anderen Spitzen, wo wir neue Ortsvariablen bekommen, müssen unsere Funktionen gewisse Nullstellen gebrochener Ordnung haben. Wir betrachten eine Spitze $\frac{r}{s}$ mit $q \mid s$. Diejenige Transformation, die hier U entspricht, ist für passende n

$$\begin{pmatrix} 1 + nrs & nr^2 \\ -ns^2 & 1 - nrs \end{pmatrix}.$$

Diese Substitution können wir modulo $\mathfrak{G}_t(q)$ reduzieren und finden, daß sie mit einer Potenz von U äquivalent ist. Dadurch ist die Einheitswurzel bestimmt, und wir erhalten unmittelbar die Multiplizität.

Für $q \equiv 1 \pmod 8$ haben wir in den Punkten

$$s = q, \quad r = 1, 2, 3, \ldots, q-1$$

ein Repräsentantensystem solcher Spitzen.

Für die Punkte des Typus ∞ (für die also entweder r oder s gerade ist, in diesem Falle r) ist $n = 2$ zu setzen, und die Transformation ist mit U^{r^2} äquivalent. Die Einheitswurzel ist also

$$e^{2\pi i \frac{\beta r^2}{q}}.$$

Wir haben demnach eine Nullstelle der Multiplizität

$$(*) \qquad R\left(\beta \frac{r^2}{q}\right),$$

wobei

$$R(x) = x - [x].$$

Für ungerade r ist $n = 1$, und die Transformation ist mit $U^{\frac{1}{2}(r^2+q)}$ äquivalent. Die Nullstelle hat also die Multiplizität

$$(**) \qquad R\left(\beta \frac{r^2+q}{2q}\right).$$

Wenn r sämtliche ungeraden Zahlen $< q$ durchläuft, wird r^2 sämtliche quadratischen Reste modulo q durchlaufen, und da $q \equiv 1 \pmod 8$, wird auch $\frac{r^2+q}{2}$ sämtliche quadratischen Reste modulo q durchlaufen. Wenn wir (*) und (**) über sämtliche Nullstellen dieser Art summieren sollen, ändern wir also nur die Reihenfolge der Glieder, wenn wir statt (*) und (**)

$$R\left(\beta \frac{n}{q}\right)$$

schreiben, und nun n alle Reste modulo q durchlaufen lassen.

Jetzt können wir mit der eigentlichen Abzählung der Pole von $H(\tau)$ anfangen.

Erstens: Wie viele Pole kann $F(\tau)$ haben?

Die Pole müssen in den Punkten des Typus -1 liegen, und wenn $q \nmid s$, so kann $F(\tau)$ in einem solchen Punkt $\frac{r}{s}$ einen Pol der Ordnung

$$\left[\frac{kq}{4}\right]$$

haben. Wenn dagegen q / s, so ist die Ordnung des Poles von der Form

$$p - R\left(\beta \frac{r^2+q}{2q}\right),$$

und diese Polordnung kann höchstens

$$\frac{k}{4}$$

sein. Also ist

$$p \leqq \left[\frac{k}{4} + R\left(\beta \frac{r^2+q}{2q}\right)\right].$$

Andere Pole kann $F(\tau)$ nicht haben.

Diese Pole sind zwar nicht die Pole von $H(\tau)$; denn erstens können sie von den Polen des Nenners neutralisiert werden, und zweitens können die Nullstellen des Nenners zu neuen Polen Anlaß geben. Weil aber der Nenner ebenso viele Nullstellen wie Pole hat, werden diese Änderungen im großen und ganzen die Gesamtzahl nicht beeinflussen. Nur die Anzahl der Nullstellen des Nenners, die zu keinen Polen Anlaß geben, muß berücksichtigt werden. Diese Anzahl ist gerade die Anzahl der Nullstellen gebrochener Ordnung, und diese geben zwar zu keinen Polen Anlaß, heben aber in den Punkten des Typus -1 mit $q \mid s$ die Nullstellen des Zählers auf, so daß $H(\tau)$ einen Pol der Ordnung p bekommt.

Im ganzen liefern die Punkte des Typus -1, wo $q \nmid s$, den Beitrag

$$\frac{q-1}{2}\left[\frac{kq}{4}\right],$$

und die Punkte des Typus -1, wo $q \mid s$, liefern den Beitrag

$$\sum_n \left[\frac{k}{4} + R\left(\beta\,\frac{n}{q}\right)\right].$$

Hiervon soll die Anzahl der Nullstellen gebrochener Ordnung des Nenners abgezogen werden, und diese Anzahl ist

$$2\sum_n R\left(\beta\,\frac{n}{q}\right).$$

Wir finden also

$$m_1(q) = \frac{q-1}{2}\left[\frac{kq}{4}\right] + \sum_n \left[\frac{k}{4} + R\left(\beta\,\frac{n}{q}\right)\right] - 2\sum_n R\left(\beta\,\frac{n}{q}\right),$$

n durchläuft alle quadratischen Reste modulo q.

Die Nullstellen und Pole des Nenners — und damit auch die erlaubten Pole von $H(\tau)$ — liegen fest, wenn wir immer durch dieselbe Funktion dividieren. Es ist also erlaubt, den Riemann-Rochschen Satz zu verwenden. Für die Dimension des Moduls $\mathfrak{M}^*$ finden wir

$$D_1^*(q) = \frac{q-1}{2}\left[\frac{kq}{4}\right] + \sum_n \left[\frac{k}{4} + R\left(\beta\,\frac{n}{q}\right)\right] - 2\sum_n R\left(\beta\,\frac{n}{q}\right) - \frac{(q-1)(q-7)}{8} + \omega_0.$$

Hier ist ω_0 die Anzahl der linear unabhängigen Abelschen Differentiale mit den gegebenen Polen als Nullstellen.

Es ist klar, daß der Wert von β nur insofern Interesse hat, als wir wissen müssen, ob β quadratischer Rest modulo q ist. Im folgenden benötigen wir nur den Fall, wo β quadratischer Rest ist. Dann gilt

$$\sum_n \frac{n}{q} = \frac{q-1}{4},$$

und also:

(30) $$D_1^*(q) = \frac{q-1}{2}\left[\frac{kq}{4}\right] + \sum_n \left[\frac{k}{4} + \frac{n}{q}\right] - \frac{q^2-4q+3}{8} + \omega_0.$$

Diese Formel werden wir später benutzen.

Wenn hier

(31) $$k \geqq 2\left(1 - \frac{5}{q}\right),$$

so gilt $\omega_0 = 0$.

§ 5.

Anwendungen der Darstellungstheorie bei Primzahlen $q \equiv 1 \pmod 8$.

Für Primzahlen $q \equiv 1 \pmod 8$ ist unsere Faktorgruppe $\Gamma_3/\Gamma_3(q)$ mit der Modulargruppe $\mathfrak{M}(q)$ 1-isomorph. Die irreduziblen Darstellungen der Modulargruppe $\mathfrak{M}(q)$ sind von Frobenius berechnet worden[8]), und in diesem Fall wird es uns deswegen möglich sein, für

$$k \geqq 2\left(1 - \frac{3}{q}\right)$$

die genaue Anzahlbestimmung durchzuführen. Für andere k werden wir einige Abschätzungen geben können.

Jetzt werden wir die Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{M}(q)$ betrachten und den Zusammenhang mit unserem Problem untersuchen.

Es gibt insgesamt

$$h = \frac{q+1}{2} + 2$$

verschiedene irreduzible Darstellungen, und zwar die identische Darstellung $\mathfrak{E}$ und die folgenden Darstellungen $\mathfrak{G}_n$ des Grades n:

1 Gruppe $\mathfrak{G}_q$,

2 Gruppen $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ und $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$,

$\frac{q-5}{4}$ Gruppen $\mathfrak{G}^{(i)}_{q+1}$ $\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{q-5}{4}\right)$,

$\frac{q-1}{4}$ Gruppen $\mathfrak{G}^{(i)}_{q-1}$ $\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{4}\right)$.

Da unsere Darstellung nicht die identische ist und den Grad $\frac{q+1}{2}$ hat, muß sie entweder $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ oder $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ sein. In beiden Fällen wird dem Element $\tau + 1$ der Modulgruppe eine Matrix mit den charakteristischen Wurzeln

$$e^{2\pi i \frac{\varrho}{q}}$$

[8]) Frobenius, Sitzungsber. d. Berl Akad. 1896, S. 985 ff.

zugeordnet. Bei $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ aber durchlaufen die β die quadratischen Reste modulo q, bei $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ dagegen durchlaufen sie die Nichtreste.

Bei der Isomorphie ist das entsprechende Element in der Faktorgruppe $\tau + q + 1$, und es folgt dann, daß unsere Darstellung $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ sein muß.

Jetzt betrachten wir die Funktionen des Moduls $\mathfrak{M}$. Diese Funktionen sind gegenüber der Gruppe $\Gamma_2(q)$ invariant, und auf Seite 43 haben wir gezeigt, daß dieser Modul eine endliche Basis hat. Die Basisfunktionen setzen sich bei beliebigen Substitutionen aus Γ_1 linear um; sie geben uns also eine Darstellung der Faktorgruppe $\Gamma_1/\Gamma_2(q)$. In ausreduzierter Form muß diese Darstellung folgende Gestalt haben:

$$(32)\quad \mathfrak{S} = e\cdot\mathfrak{E} + x\cdot\mathfrak{G}_q + y_1\cdot\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}} + y_2\cdot\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}} + \sum_i u_i\cdot\mathfrak{G}^{(i)}_{q+1} + \sum_i v_i\cdot\mathfrak{G}^{(i)}_{q-1}.$$

Die Auflösung in irreduzible Darstellungen ist zwar bis auf die Reihenfolge eindeutig. Aber die Basisfunktionen sind nicht eindeutig bestimmt; denn die Darstellungen können durch äquivalente Darstellungen ersetzt werden Es ist deswegen notwendig zu untersuchen, welche Linear kombinationen der Basisvektoren als Lösungen unseres Problems auftreten können, und welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koeffizienten der Gleichung (32) und der Anzahl der Lösungssysteme, wie sie auf Seite 31 definiert worden ist.

Es sei eine Basis so gewählt, daß die Darstellung ausreduziert ist, und die irreduziblen Teile seien

$$\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n.$$

Ist dann $\{F_i(\tau)\}$ ein Lösungssystem unseres Problems, so gehören die Funktionen $F_i(\tau)$ zu dem Modul $\mathfrak{M}$, und sie können also als Linearkombinationen der Basisfunktionen geschrieben werden. Wir spalten jede Funktion $F_i(\tau)$ in

$$F_i(\tau) = \sum_r p_r^{(i)}(\tau)$$

auf, wo $p_r^{(i)}(\tau)$ eine Linearkombination der Basisfunktionen ist, die uns die Darstellung $\mathfrak{D}_r$ geben. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Basisfunktionen müssen sich dann die Funktionen $p_{r_0}^{(i)}(\tau)$ linear untereinander umsetzen und eine Darstellung $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ geben. Das ist aber nur möglich, wenn auch die Darstellung $\mathfrak{D}_{r_0}$ von dieser Art ist.

Falls die Basisfunktionen so gewählt worden sind, daß in den Darstellungen $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ gerade nur die von uns betrachteten Matrizen vorkommen, so sieht man leicht, daß notwendig die Funktionen $p_r^{(i)}(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, \frac{q+1}{2}$, mit den Basisfunktionen proportional sein müssen.

Wir sehen also, daß die Frage nach der Anzahl der Lösungssysteme, wie wir sie auf Seite 31 formuliert haben, vernünftig ist, und daß die Anzahl gerade gleich dem Koeffizienten y_1 in (32) ist.

Wir müssen also nur noch diesen Koeffizienten bestimmen.

Durch Betrachtung von Untergruppen gelingt es, die Koeffizienten der Gleichung (32) zu bestimmen. Wir wählen eine Substitution S, die nicht in $\Gamma_2(q)$, wohl aber in Γ_2 enthalten ist, und fragen nach den Funktionen aus dem Modul $\mathfrak{M}$, die auch gegenüber S invariant bleiben. Diese Funktionen bilden einen Modul, und in gewöhnlicher Weise können wir die Dimension dieses Moduls bestimmen. Andererseits können wir, wenn wir die zu den irreduziblen Darstellungen gehörigen Charaktere kennen, auch aus der Gleichung (32) diese Dimension bestimmen. Für jede Substitution S bekommen wir also eine Gleichung zur Bestimmung der Koeffizienten der Gleichung (32).

Wenn wir mit Darstellungen arbeiten, brauchen wir aus jeder Klasse konjugierter Elemente nur einen Repräsentanten zu betrachten.

Ein vollständiges System solcher Repräsentanten haben wir für unsere Faktorgruppe $\Gamma_2/\Gamma_2(q)$ in den Substitutionen

$$P\colon \begin{pmatrix} 1 & q+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q\colon \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 \quad \text{und} \quad R_2.$$

Hier soll n ein gerader quadratischer Nichtrest modulo q sein, und R_1 und R_2 sollen Substitutionen aus der Faktorgruppe mit den Ordnungen $\frac{q+1}{2}$ bzw. $\frac{q-1}{2}$ sein.

Als Substitutionen S werden wir hier nur Potenzen von R_1 und R_2 betrachten, und zwar nur solche Potenzen

$$S = R_i^a,$$

wo a in $\frac{q+1}{2}$ bzw. $\frac{q-1}{2}$ aufgeht. Die Ordnung von S ist dann

$$\frac{q \pm 1}{2a},$$

und die Dimension des entsprechenden Moduls werden wir mit

$$D\left(\frac{q \pm 1}{2a}\right)$$

bezeichnen.

Wenn wir jetzt die Abkürzungen

$$Y = y_1 + y_2,$$
$$S = Y + 2\sum_i u_i + 2\sum_i v_i$$

einführen, kann man leicht mit Hilfe der Charaktere zeigen, daß

$$D\left(\frac{q-1}{2}\right) = e + 3x + S,$$
$$D\left(\frac{q+1}{2}\right) = e + x + S,$$
$$D\left(\frac{q-1}{4}\right) = e + 5x + Y + 2S.$$

Sind diese Dimensionen in anderer Weise bestimmt worden, so können wir hieraus Y, x und S finden; denn e ist die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen unter denen, die gegenüber Γ_2 invariant bleiben, und nach Riemann-Roch ist also

$$e = \left[\frac{k}{4}\right] + 1.$$

Wenn wir aber y_1 und y_2 unterscheiden wollen, müssen wir weitere Moduln untersuchen. Hier können wir denselben Modul $\mathfrak{M}^*$ wie auf Seite 43 betrachten; denn für die Anzahl der linear unabhängigen unter denjenigen Funktionen, die bei der Transformation $\tau + 1$ aus der Modulargruppe oder bei der Transformation $\tau + q + 1$ aus unserer Faktorgruppe mit $e^{\frac{2\pi i}{q}}$ multipliziert werden, finden wir (vgl. (30))

$$D_1^*(q) = x + y_1 + \frac{S - Y}{2}.$$

Hieraus ergibt sich dann

$$(33) \qquad y_1 = D_1^*(q) + \frac{1}{2} D\left(\frac{q-1}{4}\right) - D\left(\frac{q-1}{2}\right) - \frac{1}{2} D\left(\frac{q+1}{2}\right) + e.$$

Zur Bestimmung der Dimensionen müssen wir erst die Geschlechtsbestimmungen für die Untergruppen durchführen, und das werden wir in dem folgenden Paragraphen tun.

§ 6.

Bestimmung des Geschlechtes der Untergruppen.

Wenn wir eine Substitution $S = V^a$, $V = R_i$, der Ordnung

$$g = \frac{q \pm 1}{2a}$$

haben, so werden S und die Elemente aus $\Gamma_2(q)$ eine Gruppe $\mathfrak{U}(g)$ erzeugen. Die Elemente dieser Gruppe werden alle die Form

$$L \cdot S^n, \qquad L \in \Gamma_2(q),$$

haben; denn $\Gamma_3(q)$ ist Normalteiler innerhalb Γ_3 und ist also mit S vertauschbar.

Die Indexbestimmung ist leicht, denn die Gruppe wird durch $\Gamma_3(q)$ in g Nebengruppen aufgespaltet, und es ist also

$$\mu(g) = \frac{1}{g}\,\mu_1(q).$$

Die Geschlechtsbestimmungen dagegen sind ziemlich schwierig. Der Fundamentalbereich wird durch die Fundamentalbereiche von Γ_3 trianguliert. Wir benutzen dieselbe Einteilung wie auf Seite 41. Die Fixpunkte machen uns aber gewisse Schwierigkeiten. Weil die Ordnung der Substitution S zu q prim ist, müssen die rationalen Spitzen sich genau so verhalten wie bei $\Gamma_3(q)$. Es sind also nur die Spitzen aus $K(\sqrt{-1})$, die wir untersuchen müssen.

Wenn die Anzahl der nach $\mathfrak{U}(g)$ inäquivalenten Fixpunkte dieser Art mit ν bezeichnet wird, ist das Geschlecht

$$p(g) = 1 + \frac{q^2-1}{g}(q-4) - \frac{\nu}{4}.$$

Jetzt werden wir die Menge der Fixpunkte α aus $K(\sqrt{-1})$ untersuchen*). Es sei:

$$(*) \qquad L \cdot S^n(\alpha) = \alpha;$$

dann ist

$$(L \cdot S^n)^2 = \pm E.$$

Die Substitution S^{2n} muß also zu $\Gamma_3(q)$ gehören. $\Gamma_3(q)$ hat aber keine Fixpunkte aus $K(\sqrt{-1})$, deshalb folgt $S^n \notin \Gamma_3(q)$. Dies ist nur möglich, wenn g gerade ist, und n ist also gleich $\frac{g}{2}$.

Wir haben also gesehen, daß $\nu = 0$, wenn g ungerade ist. Wenn g gerade ist, so ist ν die Anzahl der nach $\mathfrak{U}(q)$ inäquivalenten Fixpunkte der Substitutionen

$$L \cdot S^{\frac{1}{2}g}, \qquad L \in \Gamma_3(q).$$

Für diese Zahl wird sich der Wert $2a$ ergeben.

Die Punkte, die als Fixpunkte auftreten können, müssen nach Γ_3 mit $\tau = i$ äquivalent sein, d. h. sie müssen die Form

$$\frac{ai+b}{ci+d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_3$$

haben. Wir schreiben

$$\alpha_1 = ai + b,$$
$$\alpha_2 = ci + d,$$

---

*) Vgl. E. Hecke, Über ein Fundamentalproblem aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Hamb. Abh. 6 (1928), S. 243 ff.

und es ist

$$(^{**})\qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1, \text{ d. h. } \Delta(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1' = 2i.$$

Die Koeffizienten der Substitution $L \cdot S^{\frac{1}{2}g}$ werden dadurch festgelegt, daß

$$L \cdot S^{\frac{1}{2}g} \equiv S^{\frac{1}{2}g} \pmod q.$$

Die Relation (*) bekommt dann bekanntlich die Form

$$L \cdot S^{\frac{1}{2}g}(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2),$$

wo der Multiplikator λ die Werte $\pm i$ annehmen kann.

Die Menge solcher Zahlenpaare (α_1, α_2), welche die Bedingungen (*) und (**) erfüllen, soll jetzt untersucht werden.

Zwei Zahlenpaare, (α_1, α_2) und (β_1, β_2), die durch eine Substitution aus $\Gamma_2(q)$ ineinander überführt werden können, nennen wir äquivalent. Wenn $\Delta(\alpha_1, \alpha_2) = \Delta(\beta_1, \beta_2) = 2i$, dann ist die notwendige und hinreichende Bedeutung hierfür, daß

$$\alpha_1 \equiv \beta_1 \pmod q,$$
$$\alpha_2 \equiv \beta_2 \pmod q$$

und außerdem entweder

$$\alpha_1 \equiv \beta_1 \pmod 2,$$
$$\alpha_2 \equiv \beta_2 \pmod 2$$

oder

$$\alpha_1 \equiv \beta_2 \pmod 2,$$
$$\alpha_2 \equiv \beta_1 \pmod 2.$$

Bei Änderungen innerhalb der Klasse bleibt $\Delta(\beta_1, \beta_2)$ modulo $4q$ ungeändert, und wenn nur $\Delta(\beta_1, \beta_2) \equiv 2i \pmod{4q}$, so gibt es in derselben Klasse ein Zahlenpaar (γ_1, γ_2) mit $\Delta(\gamma_1, \gamma_2) = 2i$.

Es sei nun α ein Fixpunkt; dann liegt $S^{\frac{1}{2}g}(\alpha_1, \alpha_2)$ und $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2)$ in derselben Klasse, und diese Klasse hat

$$\Delta \equiv 2i \pmod{4q}.$$

Wenn umgekehrt $S^{\frac{1}{2}g}(\beta_1, \beta_2)$ und $(\lambda\beta_1, \lambda\beta_2)$ in derselben Klasse liegen, und diese Klasse $\Delta \equiv 2i \pmod{4q}$ hat, so gibt es in dieser Klasse ein Zahlenpaar (γ_1, γ_2) mit der Determinante $= 2i$, und $S^{\frac{1}{2}g}(\gamma_1, \gamma_2)$ wird dann nach $\Gamma_2(q)$ mit $(\lambda\gamma_1, \lambda\gamma_2)$ äquivalent sein, d. h. γ wird ein Fixpunkt sein.

Hieraus folgt aber, daß wir nur die Anzahl der Klassen abzuzählen brauchen, welche mit $(\lambda\beta_1, \lambda\beta_2)$ auch $S^{\frac{1}{2}g}(\beta_1, \beta_2)$ enthalten, und für die

$$\Delta \equiv 2i \pmod{4q},$$

wenn wir die Anzahl der Fixpunkte von $\mathfrak{U}(g)$ innerhalb eines Fundamentalbereiches von $\Gamma_2(q)$ bestimmen wollen.

Die Frage ist also: Welche Klassen erfüllen die folgenden Kongruenzen:

$$S^{\frac{1}{2}g}(\beta_1, \beta_2) \equiv (\lambda\beta_1, \lambda\beta_2) \pmod{q},$$

$$\Delta(\beta_1, \beta_2) \equiv 2i \pmod{4q}$$

und entweder

$$S^{\frac{1}{2}g}(\beta_1, \beta_2) \equiv (\lambda\beta_1, \lambda\beta_2) \pmod{2}$$

oder

$$S^{\frac{1}{2}g}(\beta_1, \beta_2) \equiv (\lambda\beta_2, \lambda\beta_1) \pmod{2}.$$

Man kann leicht zeigen, daß es Klassen gibt, welche diese Kongruenzen erfüllen. Es sei (β_1, β_2) ein Repräsentant einer solchen Klasse; die Lösungen der Kongruenzen sind dann die Klassen von $(\mu\beta_1, \mu\beta_2)$, wobei μ die Forderung

$$\mu\mu' \equiv 1 \pmod{2q}$$

erfüllen soll. Die Anzahl der Klassen ist also die Anzahl der wesentlich verschiedenen μ-Werte, d. h. die Anzahl der verschiedenen Restklassen modulo q, deren Norm kongruent 1 ist, also

$$q - \left(\frac{-1}{q}\right) = 2ag.$$

Die Kongruenzen können dann immer modulo 2 durch die Wahl von μ in der Restklasse gelöst werden. $\pm\mu$ und $\pm i\mu$ geben indessen denselben Punkt, und die eigentliche Anzahl der Fixpunkte ist also $\frac{1}{2}ag$ für festes λ. Das gilt für beide Multiplikatorenwerte, und die Anzahl der Fixpunkte innerhalb eines Fundamentalbereiches von $\Gamma_2(q)$ wird also

$$ag.$$

Wenn wir aber die Anzahl der Fixpunkte in einem Fundamentalbereich von $\mathfrak{U}(g)$ bestimmen wollen, müssen wir darauf Rücksicht nehmen, daß ein Fixpunkt in zwei solchen Fundamentalbereichen auftritt, und die Anzahl ist also

$$\nu = 2a.$$

Für das Geschlecht haben wir dann

$$p(g) = 1 + \frac{q^2-1}{8g}(q-4) - \frac{\nu}{4},$$

wobei

$$\nu = \begin{cases} 0 \text{ für } g \text{ ungerade,} \\ 2a \text{ sonst,} \end{cases} \qquad g = \frac{q \pm 1}{2a}.$$

§ 7.

Formulierung der Resultate.

Im vorigen Paragraphen haben wir die Geschlechtsbestimmungen durchgeführt. Um zu den Dimensionen zu kommen, benötigen wir auch die maximalen Polanzahlen. Die sind aber leicht aus denen für $\Gamma_2(q)$ abzuleiten, und es ist

$$m(g) = \frac{q^2-1}{2g}\left[\frac{kq}{4}\right].$$

Nach dem Riemann-Rochschen Satz ist dann

$$D\left(\frac{q-1}{2}\right) = (q+1)\left[\frac{kq}{4}\right] - \frac{q^2-3q-6}{4} + \omega_1,$$

$$D\left(\frac{q+1}{2}\right) = (q-1)\left[\frac{kq}{4}\right] - \frac{q^2-5q+4}{4} + \omega_2,$$

$$D\left(\frac{q-1}{4}\right) = 2(q+1)\left[\frac{kq}{4}\right] - \frac{q^2-3q-6}{2} + \omega_3.$$

Außerdem haben wir (30), und also gilt nach (33)

$$y_1 = \left[\frac{k}{4}\right] + \sum_{n}\left[\frac{k}{4}+\frac{n}{q}\right] - \frac{q-1}{8} + 1 + \omega_0 - \omega_1 + \frac{\omega_3-\omega_2}{2}.$$

Das ist unsere Hauptformel, und wenn wir $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ und ω_3 kennen, haben wir hier die genaue Anzahl der linear unabhängigen Lösungssysteme unseres Problems, d. h. die Anzahl der linear unabhängigen Systeme linear unabhängiger Dirichletscher Reihen, die den Bedingungen I, II, III aus § 1 und V aus § 3 genügen, wobei die Matrix $\mathfrak{C}$ den speziellen Wert aus (10) haben soll.

Die Werte von $\omega_0, \ldots, \omega_3$ sind aber im allgemeinen nur dann bekannt, wenn es sicher ist, daß sie 0 sind, und unser Hauptsatz lautet deswegen:

Zweiter Hauptsatz: *Wenn q eine Primzahl* $\equiv 1 \pmod 8$ *ist, und es ist* $k \geqq 2\left(1-\frac{3}{q}\right)$, *so gibt es genau*

$$y_1 = \left[\frac{k}{4}\right] + \sum_{\substack{n \text{ modulo } q\\ \left(\frac{n}{q}\right)=1}}\left[\frac{k}{4}+\frac{n}{q}\right] - \frac{q-1}{8} + 1$$

linear unabhängige Lösungssysteme der Gleichungen (10), *deren Funktionen, von* (11) *abgesehen, linear unabhängig sind und den Bedingungen* I—III *und* V *genügen.*

Wenn $k \geqq 2\left(1-\frac{3}{q}\right)$, so sind sämtliche $\omega_i = 0$, und alle diese Glieder fallen also weg.

Auch für andere k-Werte können wir natürlich gewisse Aussagen über die Anzahl der Lösungssysteme machen.

1. Für $2\left(1-\frac{3}{q}\right) > k \geqq 2\left(1-\frac{5}{q}\right)$ ist $\omega_0 = 0$, und wir finden

$$y_1 \leqq \frac{3q+9}{8} + \sum_n \left[\frac{k}{4} + \frac{n}{q}\right].$$

2. Für $2\left(1-\frac{5}{q}\right) > k \geqq 1 - \frac{1}{q}$ können alle ω_i von Null verschieden sein, und wir finden

$$y_1 \leqq \frac{6q^2 - 25q + 3}{8} - \frac{3q+1}{2}\left[\frac{kq}{4}\right].$$

3. Endlich für $k < 1 - \frac{1}{q}$

$$y_1 \leqq \frac{3q^2 - 14q + 11}{8}.$$

Die letzten Abschätzungen sind so ungünstig, daß sie wohl kaum Interesse haben.

Es ist bemerkenswert, daß für große k-Werte, z. B. für $k \geqq 4$, die Anzahl der linear unabhängigen Lösungssysteme immer > 0 ist, und daß diese Anzahl für festes q mit k monoton wächst.

Daß die genaue Anzahlbestimmung nicht für sämtliche k durchführbar ist, war schon von vornherein zu erwarten; denn k bestimmt die Anzahl der erlaubten Pole, und für kleine k muß sich dann die Unbestimmbarkeit der Anzahl der Abelschen Differentiale bemerkbar machen. Es muß aber hervorgehoben werden, daß diese Untersuchungen für sämtliche reellen positiven k durchgeführt sind.

Für welche q die Untersuchungen durchgeführt werden können, hängt davon ab, für welche q wir die irreduziblen Darstellungen der entsprechenden Gruppen kennen. Diese sind aber nur in dem hier behandelten Fall und für Primzahlquadrate

$$q \equiv 1 \pmod 8$$

berechnet worden[10]).

Wenn die Darstellungen bekannt sind, läßt sich die hier benutzte Methode prinzipiell verwenden, falls nur die Matrizen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{U}$ eine endliche Gruppe erzeugen. Die Resultate werden von ganz ähnlicher Art sein.

---

[10]) H. W. Prätorius, Die Charaktere der Modulgruppen der Stufe q^2. Hamb. Abh. 9 (1933).

(Eingegangen am 24. 9. 1936.)

Die Gleichung $ax^n - by^n = c$.

Geschrieben in Dankbarkeit und Verehrung
für Edmund Landau
zu seinem 60. Geburtstag am 14. Februar 1937

von

Carl Ludwig Siegel in Frankfurt a. M.

In der Theorie der algebraischen diophantischen Gleichungen mit zwei Unbekannten hat Thue eine wichtige und weittragende Methode geschaffen, durch deren Verallgemeinerung insbesondere sämtliche solche Gleichungen mit unendlich vielen Lösungen ermittelt werden konnten [1]). Bei den Gleichungen mit nur endlich vielen Lösungen ergibt die Thuesche Methode eine explizit als Funktion der Koeffizienten angebbare obere Schranke für die Lösungsanzahl. Es liegt jedoch im Wesen dieser Methode, daß mit ihrer Hilfe allein niemals festgestellt werden kann, ob eine vorgelegte diophantische Gleichung überhaupt lösbar ist oder nicht. Immerhin gibt es gewisse einfache Fälle, in welchen sich bei Benutzung der Thueschen Ideen feststellen läßt, daß höchstens eine Lösung existieren kann. Hierzu gehört insbesondere die Gleichung

$$(1) \qquad ax^n - by^n = c$$

mit $n \geqq 3$, $c > 0$, wenn $|ab|$ eine nur von n und c abhängige Schranke übersteigt und nur positive Lösungen betrachtet werden [2]). Die Gleichung (1) bildete für Thue den Ausgangspunkt seiner allgemeineren Untersuchungen [3]). In diesem Falle lassen sich nämlich gewisse zur Durchführung der Methode notwendige Approximationen algebraischer Funktionen durch rationale direkt mit Hilfe eines Ansatzes gewinnen, welcher mit der Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung verknüpft ist. Im allgemeinen Falle dagegen ergeben sich jene Approximationen erst durch Benutzung eines Satzes über die Lösbarkeit von Systemen linearer diophantischer Ungleichungen und haben dann naturgemäß nicht mehr ein so einfaches Bildungsgesetz. In seiner letzten Veröffentlichung [4]), kurz vor seinem

---

[1]) C. L. Siegel, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, Abhdl. d. preuß. Akad. d. Wiss., Jahrg. 1929, phys.-math. Kl., Nr. 1.

[2]) Vgl. S. 70 der unter [1]) genannten Abhandlung.

[3]) A. Thue, Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen, Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania, math.-naturv. Kl., 1908, No. 3.

[4]) A. Thue, Berechnung aller Lösungen gewisser Gleichungen von der Form $ax^r - by^r = f$, Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, mat.-naturv. Kl., 1918, No. 4.

Tode, ist Thue noch einmal auf die Gleichung (1) zurückgekommen. Er scheint aber nicht bemerkt zu haben, daß der oben ausgesprochene Satz gilt und aus seinen Formeln durch Hinzunahme einer einfachen Idee, nämlich die Verwendung der unten als Hilfssatz 9 bezeichneten Aussage, ohne weitere Schwierigkeit bewiesen werden kann. Da die Gleichung (1) auch neuerdings verschiedentlich das Interesse der Mathematiker gefunden hat, so sei es gestattet, im folgenden den schönen Thueschen Ansatz zusammen mit der kleinen notwendigen Ergänzung ausführlich darzustellen.

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise werde die Abkürzung

$$\lambda_n = 4\left(n \prod_{p|n} p^{\frac{1}{p-1}}\right)^n \tag{2}$$

eingeführt, wobei p alle verschiedenen Primteiler der natürlichen Zahl n durchläuft. Als Resultat der Untersuchung erhält man den

Satz: *Es seien a, b, c ganz, $c > 0$, $n \geqq 3$. Ist dann*

$$|ab|^{\frac{n}{2}-1} \geqq \lambda_n c^{2n-2}, \tag{3}$$

so hat die Ungleichung

$$|ax^n - by^n| \leqq c \tag{4}$$

höchstens eine Lösung in teilerfremden natürlichen Zahlen x und y.

Hieraus folgt dann sofort, daß die Gleichung (1) unter der Voraussetzung (3) höchstens eine Lösung in natürlichen Zahlen x, y haben kann; es würden nämlich zwei verschiedene Lösungspaare von (1) nach Beseitigung des größten gemeinsamen Teilers auch zwei verschiedene Lösungspaare von (4) liefern.

Man kann andererseits für jedes $n \geqq 3$ leicht Beispiele von Gleichungen der Form (1) machen, die eine beliebig vorgeschriebene Lösung haben, während ihre Koeffizienten der Bedingung (3) genügen. Diese Gleichungen haben dann also keine weitere Lösung außer der einen vorgeschriebenen. Ist insbesondere $x = 1$, $y = 1$ diese Lösung, so muß $a = b + c$ sein. Setzt man noch

$$\varkappa_n = \lambda_n^{\frac{1}{n-2}} = 4^{\frac{1}{n-2}} \left(n \prod_{p|n} p^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{n}{n-2}},$$

so ist dann die Bedingung (3) sicher erfüllt, wenn

$$b \geqq \varkappa_n c^{\frac{2n-2}{n-2}} \tag{5}$$

gewählt wird. Unter der Voraussetzung (5) hat daher die Gleichung

$$(b + c)x^n - by^n = c$$

nur die triviale Lösung $x = 1$, $y = 1$. Man findet speziell $\varkappa_3 < 562$, $\varkappa_4 = 128$, $\varkappa_5 < 46$, $\varkappa_6 < 135$, $\varkappa_7 < 32$, $\varkappa_8 < 51$, $\varkappa_9 < 42$, $\varkappa_{10} < 84$, $\varkappa_{11} < 30$, $\varkappa_{12} < 101$, $\varkappa_{13} < 31$. Es hat also z. B. die Gleichung

$$33\,x^n - 32\,y^n = 1$$

für $n = 7, 11, 13$ keine ganzzahlige Lösung außer $x = 1$, $y = 1$.

Ist d ein Teiler von n, so entspringt offenbar aus jeder Lösung von (4) in teilerfremden natürlichen x und y eine Lösung der mit d statt n gebildeten Ungleichung (4). Ist $d > 2$, so läßt sich darauf der Satz anwenden. Diese Bemerkung zeigt, daß die Aussage des Satzes richtig bleibt, wenn die Voraussetzung (3) durch

$$(6) \qquad |ab|^{\frac{1}{2}} \geqq \min_{2 < d \mid n} \varkappa_d c^{\frac{2d-2}{d-2}}$$

ersetzt wird. Beachtet man nun noch, daß die Glieder der Folge $d^{-1}\varkappa_d$ monoton fallen, wenn d die ungeraden Primzahlen und die Zahl 4 wachsend durchläuft, so erkennt man, daß (6) sicher erfüllt ist, wenn die Ungleichung

$$(7) \qquad |ab|^{\frac{1}{2}} \geqq 188\,n c^4$$

besteht. Unter der Voraussetzung (7) hat also die Ungleichung (4) höchstens eine Lösung in teilerfremden natürlichen x und y. Diese Aussage ist zwar schwächer als die des Satzes, da (7) mehr fordert als (6); sie ist aber für manche Anwendungen praktisch, weil n in (7) nur in einfachster Form auftritt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß in zwei speziellen Fällen, nämlich für $n = 3$, $c = 1$ oder $c = 3$ und für $n = 4$, $a = c = 1$, $b \neq 15$, die vorstehenden Ergebnisse über die Gleichung (1) nicht neu sind. In diesen Fällen haben nämlich Delaunay, Nagell, Tartakowski[5]) bereits auf anderem Wege schärfere Resultate erhalten; doch scheint ihre interessante Methode sich nicht auf den Fall eines beliebigen n übertragen zu lassen.

§ 1.

Hilfssätze über hypergeometrische Funktionen.

Im folgenden bedeutet das Zeichen $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ in üblicher Weise die durch die Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z + \dots$$

definierte hypergeometrische Funktion, die also der Differentialgleichung

$$(8) \qquad z(z-1)\frac{d^2F}{dz^2} + \{(1+\alpha+\beta)z - \gamma\}\frac{dF}{dz} + \alpha\beta F = 0$$

[5]) Vgl. T. Nagell, L'analyse indéterminée de degré supérieur, Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. XXXIX, 1929.

genügt. Es sei ferner $0 < \nu < 1$. Für jedes natürliche r sind dann die Funktionen

(9) $$A_r(z) = F(-\nu - r, -r, -2r, z)$$
$$= \sum_{m=0}^{r} \frac{(r+\nu)(r+\nu-1)\dots(r+\nu-m+1)}{(2r)(2r-1)\dots(2r-m+1)} \binom{r}{m} (-z)^m$$

und

(10) $$B_r(z) = F(\nu - r, -r, -2r, z)$$
$$= \sum_{m=0}^{r} \frac{(r-\nu)(r-\nu-1)\dots(r-\nu-m+1)}{(2r)(2r-1)\dots(2r-m+1)} \binom{r}{m} (-z)^m$$

Polynome r-ten Grades in z. Man setze noch

(11) $$A_r(z) - (1-z)^\nu B_r(z) = C_r(z),$$

mit dem Hauptwerte von $(1-z)^\nu$.

Hilfssatz 1: *Für ein konstantes* $\varrho_r \neq 0$ *gilt*

(12) $$C_r(z) = \varrho_r z^{2r+1} F(-\nu + r + 1, r + 1, 2r + 2, z).$$

Beweis: Durch eine elementare Rechnung folgt, daß auch die Funktionen

(13) $$f(z) = (1-z)^\nu B_r(z)$$

und

(14) $$g(z) = z^{2r+1} F(-\nu + r + 1, r + 1, 2r + 2, z)$$

der hypergeometrischen Differentialgleichung für $A_r(z)$ genügen, also der Differentialgleichung (8) mit $\alpha = -\nu - r$, $\beta = -r$, $\gamma = -2r$. Wegen $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ sind $f(z)$ und $g(z)$ linear unabhängig. Daher gilt

(15) $$A_r(z) = \sigma_r f(z) + \varrho_r g(z),$$

wo σ_r und ϱ_r von z frei sind. Aus $A_r(0) = 1$ folgt $\sigma_r = 1$ und dann vermöge (11), (13), (14), (15) die Behauptung (12). Dabei ist $\varrho_r \neq 0$, da sich sonst $(1-z)^\nu$ aus (11) und (12) als rationale Funktion von z ergäbe.

Hilfssatz 2: *Für* $z \neq 0$ *ist*

$$A_r(z) B_{r+1}(z) \neq B_r(z) A_{r+1}(z).$$

Beweis: Aus den Gleichungen

$$A_r - (1-z)^\nu B_r = C_r, \quad A_{r+1} - (1-z)^\nu B_{r+1} = C_{r+1}$$

folgt

(16) $$A_r B_{r+1} - B_r A_{r+1} = C_r B_{r+1} - B_r C_{r+1}.$$

Wegen Hilfssatz 1 beginnt die Entwicklung von $C_r B_{r+1} - B_r C_{r+1}$ nach Potenzen von z mit dem Gliede $\varrho_r z^{2r+1}$. Andererseits ist $A_r B_{r+1} - B_r A_{r+1}$

ein Polynom in z, dessen Grad höchstens $2r+1$ beträgt. Zufolge (16) gilt daher

$$A_r(z)B_{r+1}(z) - B_r(z)A_{r+1}(z) = \varrho_r z^{2r+1},$$

und diese Gleichung enthält wegen $\varrho_r \neq 0$ die Behauptung.

Hilfssatz 3: *Für* $0 < z < 1$ *ist*

$$(17) \qquad 0 < A_r(z) < 1, \quad 0 < C_r(z) < z^{2r+1}A_r(1).$$

Beweis: Auch das Polynom $F(-\nu - r, -r, 1-\nu, 1-z)$ genügt der hypergeometrischen Differentialgleichung für $A_r(z)$. Wäre es nicht von $A_r(z)$ linear abhängig, so ergäbe sich wieder $(1-z)^\nu$ als rationale Funktion. Also ist

$$(18) \qquad A_r(z) = A_r(1)F(-\nu - r, -r, 1-\nu, 1-z).$$

Das Polynom $F(-\nu - r, -r, 1-\nu, w)$ in w hat nun lauter positive Koeffizienten. Ferner ist $A_r(0) = 1$. Zufolge (18) ist dann $A_r(1) > 0$ und $A_r(z)$ als Funktion von z positiv und monoton fallend für $0 < z < 1$, also in diesem Intervall

$$0 < A_r(1) < A_r(z) < A_r(0) = 1.$$

Damit ist die erste Ungleichung in (17) bewiesen.

Nach (11) ist

$$(19) \qquad C_r(1) = A_r(1).$$

Da nun alle Koeffizienten der Reihe für $F(-\nu + r + 1, r+1, 2r+2, z)$ positiv sind, so ergibt Hilfssatz 1 die Ungleichung

$$0 < C_r(z)z^{-2r-1} < C_r(1)$$

für $0 < z < 1$, also wegen (19) die zweite Behauptung in (17).

Hilfssatz 4: *Es ist*

$$(20) \qquad \binom{2r}{r}A_r(1) = \prod_{m=1}^{r}\left(1 - \frac{\nu}{m}\right).$$

Beweis: Durch Benutzung der von Gauß herrührenden Formel

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\gamma - \beta)}$$

liefert (18) die Beziehung

$$1 = A_r(1)F(-\nu - r, -r, 1-\nu, 1) = A_r(1)\frac{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(2r+1)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(r+1-\nu)},$$

$$\frac{(2r)!}{(r!)^2}A_r(1) = \frac{(r-\nu)(r-1-\nu)\dots(1-\nu)}{r(r-1)\dots 1},$$

und dies ist (20).

Fortan sei $\nu = n^{-1}$ die Reziproke der natürlichen Zahl $n \geqq 3$, die in der Behauptung des Satzes auftritt. Ferner bedeute q_r das Produkt

aller in n aufgehenden Primfaktoren von $r!$, wobei jeder mit seiner Vielfachheit gezählt werde. Man setze

$$(21)\qquad s_r = \binom{2r}{r} q_r n^r, \quad t_r = q_r n^r \prod_{m=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{mn}\right),$$

$$(22)\qquad s_r A_r(z) = G_r(z), \quad s_r B_r(z) = H_r(z).$$

Hilfssatz 5: *Die Polynome $G_r(z)$ und $H_r(z)$ haben ganzzahlige Koeffizienten.*

Beweis: Nach (9) und (10) ist

$$G_r(z) = q_r n^r \sum_{m=0}^{r} \binom{r+\nu}{m}\binom{2r-m}{r}(-z)^m,$$

$$H_r(z) = q_r n^r \sum_{m=0}^{r} \binom{r-\nu}{m}\binom{2r-m}{r}(-z)^m.$$

Es genügt also zu zeigen, daß für $m = 1, \ldots, r$ die beiden Zahlen

$$g_m = \prod_{k=r-m+1}^{r} (kn+1), \qquad h_m = \prod_{k=r-m+1}^{r} (kn-1)$$

durch $m!:q_m$ teilbar sind. Zu diesem Zwecke hat man nachzuweisen, daß jede zu n teilerfremde Primzahl p in g_m und in h_m zu mindestens derselben Potenz aufgeht wie in $m!$. Dies folgt aber daraus, daß für jedes natürliche v von den m Faktoren sowohl in g_m wie in h_m mindestens $[mp^{-v}]$ und von den m Zahlen $1, 2, \ldots, m$ genau $[mp^{-v}]$ durch p^v teilbar sind.

Hilfssatz 6: *Für jedes natürliche r gibt es zwei Polynome $G_r(z)$ und $H_r(z)$ vom Grade r mit ganzen Koeffizienten, so daß im Intervall $0 < z < 1$ die Ungleichungen*

$$(23)\qquad G_r(z) H_{r+1}(z) \neq H_r(z) G_{r+1}(z),$$

$$(24)\qquad 0 < G_r(z) < s_r,$$

$$(25)\qquad 0 < G_r(z) - (1-z)^\nu H_r(z) < t_r z^{2r+1}$$

gelten.

Beweis: Die durch (22) erklärten Polynome $G_r(z)$ und $H_r(z)$ haben nach Hilfssatz 5 ganze Koeffizienten und sind vom Grade r. Die Behauptung (23) folgt aus Hilfssatz 2. Für $0 < z < 1$ ist ferner zufolge Hilfssatz 3

$$0 < G_r(z) = s_r A_r(z) < s_r$$

und wegen (11) auch

$$0 < G_r(z) - (1-z)^\nu H_r(z) = s_r C_r(z) < s_r z^{2r+1} A_r(1)$$
$$= \binom{2r}{r} A_r(1) q_r n^r z^{2r+1}.$$

Also gilt (24) und wegen Hilfssatz 4 und (21) auch (25).

Von den bisherigen Hilfssätzen wird weiterhin nur noch der letzte benutzt. Außerdem gebraucht man eine Ungleichung, welche s_{r+2} und t_r mit der in (2) definierten Größe λ_n verknüpft, nämlich

Hilfssatz 7: *Für jedes natürliche r ist*

$$n s_{r+2}\left(\frac{t_r}{1-\frac{1}{n}}\right)^{n-1} < \lambda_n^{r+1}. \tag{26}$$

Beweis: Für $r = 1$ ist in (26) die linke Seite

$$n s_3\left(\frac{t_1}{1-\frac{1}{n}}\right)^{n-1} = 20\,(n, 6)\, n^{n+3} \leqq 120\, n^{n+3}$$

und die rechte Seite

$$\lambda_n^2 = 16\, n^{n+3} \cdot n^{n-3} \prod_{p|n} p^{\frac{2n}{p-1}} \geqq 432\, n^{n+3}.$$

Daher ist die Behauptung im Falle $r = 1$ richtig.

Nun sei $r \geqq 2$. Es ist dann

$$n s_{r+2}\left(\frac{t_r}{1-\frac{1}{n}}\right)^{n-1} = \binom{2r+4}{r+2} q_{r+2}\, q_r^{n-1}\, n^{(r+1)n-(n-3)} \prod_{m=2}^{r}\left(1-\frac{1}{mn}\right)^{n-1} \tag{27}$$

$$\leqq \binom{2r+4}{r+2}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n-1} q_{r+2}\, q_r^{n-1}\, n^{(r+1)n}.$$

Für $k \geqq 5$ gilt

$$\binom{2k}{k} 4^{-k} = \prod_{h=1}^{k}\left(1-\frac{1}{2h}\right) \leqq \prod_{h=1}^{5}\left(1-\frac{1}{2h}\right) = \frac{63}{64}\cdot\frac{1}{4} < \frac{1}{4}. \tag{28}$$

Ferner ist

$$(n-1)\,\log\left(1-\frac{1}{2n}\right) = -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(2n)^{1-h}}{h}$$

$$= -\frac{1}{2} + \sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{2h+2}\right)(2n)^{-h},$$

also wegen $n \geqq 3$

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n-1} \leqq \left(1-\frac{1}{2\cdot 3}\right)^{3-1} = \frac{25}{36},$$

$$\binom{8}{4} 4^{-4}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n-1} \leqq \frac{35}{128}\cdot\frac{25}{36} < \frac{1}{4}. \tag{29}$$

Zufolge (28) und (29) gilt also für alle $r \geqq 2$ die Ungleichung

$$\binom{2r+4}{r+2}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n-1} < 4^{r+1}. \tag{30}$$

Endlich ist

$$\log q_r = \sum_{p|n} \log p \sum_{h=1}^{\infty} [r\, p^{-h}] < r \sum_{p|n} \frac{\log p}{p-1}$$

$$q_{r+2}\, q_r^{n-1} < \Big(\prod_{p|n} p^{\frac{1}{p-1}}\Big)^{n(r+1)-(n-2)} < \Big(\prod_{p|n} p^{\frac{1}{p-1}}\Big)^{n(r+1)}. \tag{31}$$

Aus (27), (30), (31) folgt jetzt wegen (2) die Behauptung auch im Falle $r \geqq 2$.

§ 2.

Hilfssätze über die Lösungen von $|a x^n - b y^n| \leqq c$.

Es mögen a, b, c, n die Voraussetzungen des Satzes erfüllen. Es sind also a, b, c ganz, $c > 0$, $n \geqq 3$. Setzt man noch zur Abkürzung

$$|a b| = \gamma,$$

so geht die Voraussetzung (3) über in

$$\gamma^{\frac{n}{2}-1} \geqq \lambda_n\, c^{2n-2}. \tag{32}$$

Zufolge (32) gilt für jede Lösung von (4) die Ungleichung

$$|a|\, x^n + |b|\, y^n \geqq |a| + |b| \geqq 2\gamma^{\frac{1}{2}} > c^{\frac{2n-2}{n-2}} \geqq c \geqq |a x^n - b y^n|.$$

Daher haben a und b gleiches Vorzeichen, wenn (4) überhaupt lösbar ist. Zum Beweise des Satzes kann man sich deshalb auf den Fall

$$a > 0, \quad b > 0$$

beschränken.

Hilfssatz 8: *Ist die Zahl* $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ *rational, so hat die Ungleichung* (4) *genau eine Lösung in teilerfremden natürlichen* x, y.

Beweis: Da $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ rational ist, so gilt $a = d\,\eta^n$, $b = d\,\xi^n$ mit natürlichem d und teilerfremden natürlichen ξ, η. Dies ergibt die triviale Lösung $x = \xi$, $y = \eta$ von (4). Wäre ξ_1, η_1 eine von dieser verschiedene Lösung, also

$$|a \xi_1^n - b \eta_1^n| \leqq c, \quad \eta \xi_1 - \xi \eta_1 \neq 0,$$

so folgte aus der Zerlegung

$$a \xi_1^n - b \eta_1^n = d(\eta \xi_1 - \xi \eta_1)\, \{(\eta \xi_1)^{n-1} + \ldots + (\xi \eta_1)^{n-1}\}$$

die Ungleichung

$$c > d(\eta^{n-1} + \xi^{n-1}) > d(\xi\eta)^{\frac{n-1}{2}} \geqq (a\, b)^{\frac{n-1}{2n}} = \gamma^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}} \geqq \gamma^{\frac{1}{4}},$$

$$c^{2n-2} > \gamma^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \geqq \gamma^{\frac{n}{2}-1},$$

gegen (32).

Auf Grund von Hilfssatz 8 braucht man weiterhin nur noch den Fall eines irrationalen $\left(\frac{a}{b}\right)^r$ zu behandeln. Für natürliche x, y ist dann stets $a x^n - b y^n \neq 0$. Es werde angenommen, daß (4) im Widerspruch mit der Behauptung zwei verschiedene Lösungen x, y und x_1, y_1 in teilerfremden natürlichen Zahlen hat. Vertauscht man nötigenfalls noch a mit b und x mit y, so kann man voraussetzen, daß die Ungleichungen

$$(33) \qquad 0 < a x^n - b y^n \leqq c, \quad |a x_1^n - b y_1^n| \leqq c,$$

$$(34) \qquad a x^n + b y^n \leqq a x_1^n + b y_1^n$$

gelten.

Man setze

$$a x^n = w, \quad a x_1^n = w_1.$$

Hilfssatz 9: *Es ist*

$$(35) \qquad w > \gamma^{\frac{1}{2}},$$

$$(36) \qquad w_1 > \gamma (2c)^{-n} w^{n-1}.$$

Beweis: Wegen (33) gilt

$$2w = (a x^n - b y^n) + (a x^n + b y^n) > a + b \geqq 2\gamma^{\frac{1}{2}},$$

also (35).

Aus

$$\frac{a x^n - b y^n}{a^r x - b^r y} = (a x^n)^{\frac{n-1}{n}} + \ldots > (a x^n)^{\frac{n-1}{n}}$$

folgt

$$0 < 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^r \frac{y}{x} < \frac{c}{w}$$

und analog nach (33)

$$(37) \qquad \left|1 - \left(\frac{b}{a}\right)^r \frac{y_1}{x_1}\right| < \frac{c}{w_1}.$$

Daher ist

$$\frac{1}{x x_1} \leqq \left|\frac{y}{x} - \frac{y_1}{x_1}\right| < \left(\frac{a}{b}\right)^r \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w_1}\right),$$

$$(38) \qquad \left(\frac{\gamma}{w w_1}\right)^r < 2c \max(w^{-1}, w_1^{-1}),$$

und hieraus folgt (36), wenn noch die Ungleichung

$$(39) \qquad w \leqq w_1$$

bewiesen wird.

Wäre nun (39) falsch, so ergäbe (38) die Beziehung

$$w_1^{1-r} < 2c\gamma^{-r} w^r$$

und in Verbindung mit (2), (3), (33), (34), (35) den Widerspruch

$$0 \geqq \tfrac{1}{2}(a x^n + b y^n - a x_1^n - b y_1^n) \geqq a x^n - a x_1^n - c = w - w_1 - c$$

$$> w^{\frac{1}{n-1}} \left\{ w^{\frac{n-2}{n-1}} - \left(\frac{(2c)^n}{\gamma} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\} - c > \gamma^{\frac{1}{2}} - \left(\gamma^{-\frac{1}{2}} (2c)^n \right)^{\frac{1}{n-1}} - c$$

$$> 3c - \left(\frac{(2c)^n}{3c} \right)^{\frac{1}{n-1}} - c > 3c - 2c - c = 0.$$

Hilfssatz 10: *Für eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl l gilt*

$$s_l w^l \leqq \frac{\gamma^\nu}{n c} w^{-\nu} w_1^{1-\nu} < s_{l+1} w^{l+1};$$

und zwar ist $l \geqq 2$ für $n \geqq 4$.

Beweis: Die Zahlfolge $s_k w^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ wächst monoton ins Unendliche. Daher genügt es zu beweisen, daß die Ungleichung

$$s_k w^k \leqq \frac{\gamma^\nu}{n c} w^{-\nu} w_1^{1-\nu} \tag{40}$$

im Falle $n = 3$ mit $k = 1$ und im Falle $n \geqq 4$ mit $k = 2$ richtig ist. Für $k \leqq \min(n-2, 2)$ ist nun nach Hilfssatz 9 und (3)

$$\frac{\gamma^\nu}{n c s_k} w^{-k-\nu} w_1^{1-\nu} > \frac{\gamma}{n c s_k} (2c)^{1-n} w^{n-2-k} \geqq \frac{(2c)^{1-n}}{n c s_k} \gamma^{\frac{n}{2} - \frac{k}{2}}$$

$$\geqq \frac{2^{1-n} \lambda_n}{n s_k} c^{n-3} \geqq \frac{2^{1-n} \lambda_n}{n s_k}.$$

Nach (21) gilt

$$s_1 = 2n, \quad s_2 = 6(n, 2) n^2 \leqq 12 n^2,$$

also mit Rücksicht auf (2) für $n \geqq 3$

$$\frac{2^{1-n} \lambda_n}{n s_1} > \left(\frac{n}{2} \right)^{n-2} > 1$$

und für $n \geqq 4$

$$\frac{2^{1-n} \lambda_n}{n s_2} \geqq \frac{1}{12} \left(\frac{n}{2} \right)^{n-3} \prod_{p | n} p^{\frac{n}{p-1}} > 1.$$

Folglich besteht tatsächlich (40) mit $k = 1$ im Falle $n = 3$ und mit $k = 2$ im Falle $n \geqq 4$.

§ 3.

Schluß des Beweises.

Man setze

$$1 - \frac{b}{a} \left(\frac{y}{x} \right)^n = z. \tag{41}$$

Dann ist also

$$(1 - z)^\nu = \left(\frac{b}{a} \right)^\nu \frac{y}{x} \tag{42}$$

und nach (33)

$$(43) \qquad 0 < z < 1, \quad z \leqq \frac{c}{w}.$$

Es sei l die in Hilfssatz 10 eingeführte natürliche Zahl und es seien $G_l(z)$, $H_l(z)$ die in § 1 erklärten Polynome. Man wähle $r = l - 1$ oder $r = l$, je nachdem die Zahl

$$\frac{y_1}{x_1} G_l(z) - \frac{y}{x} H_l(z)$$

verschwindet oder nicht. Der Fall $l = 1$, $r = 0$ wird nachträglich auf besonderem Wege erledigt werden. Vorläufig ist dann also $r \geqq 1$. Vermöge der soeben gegebenen Definition von r lehrt (23) in Hilfssatz 6, daß

$$(44) \qquad \frac{y_1}{x_1} G_r(z) - \frac{y}{x} H_r(z) \neq 0$$

ist. Aus (25) in Hilfssatz 6 folgt ferner wegen (42) und (43)

$$0 < G_r(z) - \left(\frac{b}{a}\right)^r \frac{y}{x} H_r(z) < t_r \left(\frac{c}{w}\right)^{2r+1}$$

Endlich ist nach (24) und (37)

$$\left| G_r(z) - \left(\frac{b}{a}\right)^r \frac{y_1}{x_1} G_r(z) \right| < s_r \frac{c}{w_1}.$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen erhält man

$$\left| \frac{y_1}{x_1} G_r(z) - \frac{y}{x} H_r(z) \right| < \left(\frac{a}{b}\right)^r \left\{ s_r \frac{c}{w_1} + t_r \left(\frac{c}{w}\right)^{2r+1} \right\}.$$

Hierin steht links eine rationale Zahl, die zufolge (44) positiv ist. Andererseits ist ihr Nenner nach (41) ein Teiler von $x_1 x w^r$. Folglich gilt

$$(45) \qquad \left(\frac{w_1 w}{\gamma}\right)^r w^r \left\{ s_r \frac{c}{w_1} + t_r \left(\frac{c}{w}\right)^{2r+1} \right\} > 1.$$

Wegen $r \leqq l$ ist nach Hilfssatz 10

$$(46) \qquad \left(\frac{w_1 w}{\gamma}\right)^r w^r \cdot s_r \frac{c}{w_1} \leqq \left(\frac{w_1 w}{\gamma}\right)^r \frac{c}{w_1} s_l w \leqq \frac{1}{n}.$$

Wegen $l \leqq r + 1$ liefert Hilfssatz 10 in Verbindung mit Hilfssatz 7, (3) und (35) die weitere Ungleichung

$$(47) \qquad \begin{aligned} \left(\frac{w_1 w}{\gamma}\right)^r w^r \cdot t_r \left(\frac{c}{w}\right)^{2r+1} &< \gamma^{-r} c^{2r+1} t_r w^{-r-1} (\gamma^{-r} n c s_{r+2} w^{r+3})^{\frac{1}{n-1}} \\ &= t_r (n s_{r+2})^{\frac{1}{n-1}} \gamma^{-\frac{1}{n-1}} c^{2r+1+\frac{1}{n-1}} w^{\frac{2}{n-1} - (r+1)\frac{n-2}{n-1}} \\ &\leqq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\gamma^{1-\frac{n}{2}} \lambda_n c^{2n-2}\right)^{\frac{r+1}{n-1}} \leqq 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Nach (46) und (47) ist die linke Seite in (45) kleiner als 1, und dies ist ein Widerspruch.

Schließlich ist noch der Fall $l = 1$, $r = 0$ zu erledigen. Nach Definition von r ist dann

$$\frac{y_1}{x_1} G_1(z) - \frac{y}{x} H_1(z) = 0, \tag{48}$$

und nach Hilfssatz 10 ist außerdem $n = 3$, also nach (9) und (10)

$$A_1(z) = 1 - \tfrac{2}{3} z, \quad B_1(z) = 1 - \tfrac{1}{3} z. \tag{49}$$

Setzt man noch

$$a x^3 - b y^3 = h, \tag{50}$$

so ist nach (41)

$$z = \frac{h}{w}$$

und nach (22), (48), (49)

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y(3w - h)}{x(3w - 2h)}.$$

Für ein natürliches d gilt daher

$$d x_1 = x(3w - 2h), \quad d y_1 = y(3w - h), \tag{51}$$

$$d^3(a x_1^3 - b y_1^3) = a x^3 (3w - 2h)^3 - b y^3 (3w - h)^3. \tag{52}$$

Nach (50) ist

$$a x^3 (3w - 2h)^3 - b y^3 (3w - h)^3 = h^3 (2w - h), \tag{53}$$

also nach (33) und (52)

$$h^3 |2w - h| \leqq d^3 c. \tag{54}$$

Es sei nun

$$(w, h) = u, \quad w = u w_0, \quad h = u h_0,$$
$$(d, h_0) = v, \quad d = v d_0, \quad h_0 = v h_1,$$

also $(w_0, h_0) = 1$, $(d_0, h_1) = 1$. Nach (51), (52), (53) gilt dann

$$d_0^3 \mid u^4 w_0 (3 w_0 - 2 h_0)^3, \quad d_0^3 \mid u^4 h_1^3 (2 w_0 - h_0). \tag{55}$$

Es ist aber

$$(2 w_0 - h_0, w_0 (3 w_0 - 2 h_0)^3) = (2 w_0 - h_0, w_0^4) = 1.$$

und (55) liefert

$$d_0^3 \mid u^4,$$

$$d = v d_0 \leqq h_0 u^{\frac{4}{3}} \leqq h^{\frac{4}{3}}.$$

Folglich ist nach (54)

$$h^3 |2w - h| \leqq h^4 c,$$

$$w \leqq h \frac{c+1}{2} \leqq c^3$$

im Widerspruch zu (3) und (35), und der Beweis ist beendet.

(Eingegangen am 11. 12. 1936.)

Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.

Der Cartansche Eindeutigkeitssatz in unbeschränkten Körpern[1]).

Von

H. Behnke in Münster (Westf.) und E. Peschl in Jena.

1. Den Untersuchungen über die inneren Abbildungen, insbesondere der Automorphismen, hat Henri Cartan den folgenden Eindeutigkeitssatz zugrunde gelegt:

Ist $\mathfrak{B}$ ein beschränkter, in $O(0,0)$ unverzweigter Bereich, und ist

$$S \quad \begin{aligned} w' &= f(w,z) \equiv w + \ldots \\ z' &= g(w,z) \equiv z + \ldots \end{aligned}$$

eine innere Abbildung von $\mathfrak{B}$, so ist S die identische Abbildung[2]).

Als nun die Untersuchungen über die inneren Abbildungen auf unbeschränkte Bereiche ausgedehnt wurden, ergab sich die Notwendigkeit, den Cartanschen Eindeutigkeitssatz zu erweitern. Wir haben in unserer Arbeit über die unbeschränkten Reinhardtschen Körper[3]) deshalb folgende Verallgemeinerung ausgesprochen:

Satz 1. *$\mathfrak{B}$ sei ein Bereich, in dem zwei Monome $w^\alpha z^\beta$ und $w^\gamma z^\delta$ beschränkt sind. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seien nichtnegative ganze Zahlen und $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. T sei eine Transformation, die $\mathfrak{B}$ auf einen in seinem Innern liegenden Bereich abbildet und dabei einen Punkt P aus $\mathfrak{B}$, der auf einer der beiden Achsen ($w = 0$ oder $z = 0$) liegt, festläßt. In P sei die Funktionalmatrix von T $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Dann ist T die identische Transformation*[4]).

---

[1]) Zugleich ein Nachtrag zu unserer Arbeit: Die unbeschränkten Reinhardtschen Körper. Math. Ann. 112 (1936), § 7.

[2]) Siehe Henri Cartan, Les fonct. de deux var. compl. etc. J. Math. (9) 10 (1931). C. Carathéodory hat gleichzeitig einen dazu äquivalenten Satz bewiesen. Vgl.: C. Carathéodory, Über die Abbildungen, die durch Systeme von analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen erzeugt werden. Mathem. Zeitschr. 34 (1932). Man achte darauf, daß der Cartansche Eindeutigkeitssatz häufig nur in bezug auf Automorphismen und nicht allgemein in bezug auf irgend welche inneren Abbildungen des jeweils vorgegebenen Bereiches ausgesprochen wird. In diesen Zeilen handelt es sich um den allgemeinen Eindeutigkeitssatz in bezug auf irgend welche inneren Abbildungen.

[3]) Math. Annalen 112 (1936).

[4]) l. c. Satz 14, S. 458.

Herr Hartogs hat uns darauf aufmerksam gemacht, daß im Beweise dieses Satzes noch eine Lücke vorhanden ist. Bei der Ausfüllung dieser Lücke gelangten wir zu dem noch umfassenderen

Satz 2. *$\mathfrak{B}$ sei ein Bereich, der im inneren Punkte O $(0,0)$ nicht verzweigt ist. Ferner gebe es zwei in $\mathfrak{B}$ reguläre und beschränkte Funktionen $F(w,z)$ und $G(w,z)$, deren Diagonalentwicklung um O (Entwicklung nach homogenen Polynomen) als Anfangsglieder $F_0(w,z)$ und $G_0(w,z)$ Polynome mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante aufweist. Jede innere Abbildung*

$$S \quad \begin{aligned} w' &= f(w,z) = w + \ldots \\ z' &= g(w,z) = z + \ldots \end{aligned}$$

ist dann die Identität[5]).

Hieraus folgt unmittelbar

Satz 3. *$\mathfrak{B}$ sei ein Bereich, in dem zwei dort reguläre Funktionen $F(w,z)$ und $G(w,z)$ beschränkt sind. Ist der Punkt O $(0,0)$ aus $\mathfrak{B}$ keine Verzweigungsstelle des Bereiches und ist dort $\frac{\partial(F,G)}{\partial(w,z)} \neq 0$, so ist jede innere Abbildung*

$$S\colon \quad \begin{aligned} w' &= w + \ldots \\ z' &= z + \ldots \end{aligned}$$

die Identität.

Ebenso läßt sich Satz 1 aus Satz 2 erschließen, wie wir am Schlusse der Arbeit zeigen.

Diese Sätze betreffen also Bereiche, in denen es jeweils zwei reguläre und beschränkte Funktionen mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante gibt. Sicher lassen sich diese Sätze nicht mehr allgemein für Bereiche aussprechen, in denen je zwei beschränkte, reguläre Funktionen voneinander abhängig sind. Beispiele dafür liefern die Bereiche $|w^\alpha z^\beta| < 1$, (α, β positive ganze Zahlen), mit dem Nullpunkt als Entwicklungspunkt O. Diese gestatten nämlich u. a. die Automorphismen:

$$\begin{aligned} w' &= w\,e^{-\beta w^\alpha z^\beta} = w + \ldots \\ z' &= z\,e^{\alpha w^\alpha z^\beta} \;= z + \ldots . \end{aligned}$$

2. Nun zu den Vorbereitungen des Beweises von Satz 2! Im größten in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Kreiskörper $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkt O $(0,0)$ gestatten

[5]) Siehe auch H. Zumbusch: Die Automorphismen der unbeschränkten, eigentlichen Kreiskörper. Mathem. Zeitschr. 41 (1936). Dort wird die Aussage des Satzes 2 für den Sonderfall, daß $F(w,z)$ und $G(w,z)$ selbst homogene Polynome sind, bewiesen.

die in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen Entwicklungen nach homogenen Polynomen (Entwicklung in eine Diagonalreihe).

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(w,z) &= w + R_\varkappa(w,z) + \ldots \\ g(w,z) &= z + Q_\mu(w,z) + \ldots . \end{aligned}$$

Dabei schreiben wir in diesen und den folgenden Entwicklungen nur die *nicht identisch verschwindenden homogenen Polynome*, nach wachsenden Graden[6]) geordnet, wirklich hin. Wäre nun die durch die vorstehenden Funktionen vermittelte innere Abbildung S nicht die Identität, so müßte mindestens $\varkappa$ oder μ existieren. Neben S betrachten wir nun die inneren Abbildungen S^m, $m = 1, 2, \ldots$,

$$S^m \qquad \begin{aligned} w_m &= f_m(w,z) = w + m R_\varkappa + \ldots, \\ z_m &= g_m(w,z) = z + m Q_\mu + \ldots . \end{aligned}$$

Es ist also

$$(2)\qquad \begin{aligned} H_1(w,z) &= f_m(w,z) - w = m R_\varkappa + \ldots, \\ H_2(w,z) &= g_m(w,z) - z = m Q_\mu + \ldots . \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung der Voraussetzung können wir weiter annehmen, daß die in $\mathfrak{B}$ gegebenen und beschränkten Funktionen $F(w,z)$ und $G(w,z)$ in $\mathfrak{B}$ vom absoluten Betrage kleiner 1 sind. In sie setzen wir nun die Funktionen f_m und g_m der Transformationen S^m ein.

Wir bilden also

$$\begin{aligned} F_m(w,z) &= F(f_m(w,z),\ g_m(w,z)), \\ G_m(w,z) &= G(f_m(w,z),\ g_m(w,z)). \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind alle regulär und absolut kleiner 1 innerhalb $\mathfrak{B}$. Um sie nach homogenen Polynomen entwickeln zu können, benötigen wir noch die entsprechende Entwicklung von F und G in $\mathfrak{K}$:

$$(3)\qquad \begin{aligned} F &= \sum_{l=1}^{\infty} A_{\nu_l}(w,z);\ A_{\nu_l} \neq 0, \\ G &= \sum_{l=1}^{\infty} B_{\lambda_l}(w,z);\ B_{\nu_l} \neq 0\,^{7}). \end{aligned}$$

3. Zum Beweise von Satz 2 nehmen wir vorerst an, daß weder $f(w,z) \equiv w$, noch $g(w,z) \equiv z$. Die ganzen Zahlen $\varkappa$ und μ aus Gleichung (1) existieren in diesem Falle also beide. Wir setzen zunächst weiter voraus, daß $\varkappa \neq \mu$. Um $F_m(w,z)$ in eine nach steigenden Potenzen geordnete Reihe homogener Polynome von w und z zu entwickeln, schreiben wir zunächst

$$(4)\qquad F_m(w,z) = F(w + H_1,\ z + H_2) = F(w,z) + F'_w(w,z)H_1 + F'_z(w,z)H_2 \\ + \text{höhere Potenzen in } H_1,\ H_2.$$

[6]) die wir als Indizes verwenden

[7]) bzw. im Falle endlicher Summen: $\sum_{l=1}^{K}\ldots,\ \sum_{l=1}^{L}\ldots$.

In (4) ist nun wieder (2) und (3) einzusetzen. Dann treten u. a. die homogenen Polynome $R_\varkappa \frac{\partial}{\partial w} A_{\nu_1}$ und $Q_\mu \frac{\partial}{\partial z} A_{\nu_1}$ auf. Der Grad dieser Polynome ist $\varkappa(\nu_1 - 1)$ bzw. $\mu(\nu_1 - 1)$ oder Null; jedoch ist wegen $A_{\nu_1} \neq 0$ sicher einer der beiden Grade positiv. Der kleinste positive der beiden Grade sei N. Bei der Entwicklung von F_m nach homogenen Polynomen wachsenden Grades ist dann das Polynom N-ten Grades $\varphi_N^{(m)}$:

(5) $$m R_\varkappa \frac{\partial}{\partial w} A_{\nu_1} + A_N^* \quad \text{oder} \quad m Q_\mu \frac{\partial}{\partial z} A_{\nu_1} + A_N^*.$$

Dabei ist A_N^* folgendermaßen eingeführt:

$A_N^* = A_{\nu_\varrho}$, falls es ein ν_ϱ gibt, so daß $\nu_\varrho = N$;

$A_N^* = 0$, falls kein solches ν_ϱ existiert.

Innerhalb $\mathfrak{K}$ gilt

$$|A^*(w, z)| < 1$$

und ebenso *für alle* m

$$|\varphi_N^{(m)}(w, z)| < 1,$$

wie etwa aus der Integraldarstellung der Glieder einer Diagonalreihe hervorgeht[8]). Wegen der Darstellung (5) für $\varphi_N^{(m)}$ ist dies nur möglich, wenn mindestens $R_\varkappa$ oder Q_μ identisch Null sind entgegen der Voraussetzung.

Gilt nun statt der obigen Voraussetzung $\mu \neq \varkappa$ die Gleichung $\mu = \varkappa$, so gilt entsprechend

$$\varphi_N^{(m)} = m\left(R_\varkappa \frac{\partial}{\partial w} A_{\nu_1} + Q_\mu \frac{\partial}{\partial z} A_{\nu_1}\right) + A_N^*.$$

Es folgt

(6) $$R_\varkappa \frac{\partial}{\partial w} A_{\nu_1} + Q_\mu \frac{\partial}{\partial z} A_{\nu_1} \equiv 0.$$

Wir entwickeln jetzt

$G_m(w, z) = G(w + H_1, z + H_2) = G(w, z) + G'_w(w, z) H_1 + G'_z(w, z) H_2 + \dots$ nach steigenden Graden in homogene Polynome $\psi_k^{(m)}$ (entsprechend den $\varphi_l^{(m)}$). Der kleinste positive der Grade von $R_\varkappa \frac{\partial}{\partial w} B_{\lambda_1}$ und $Q_\mu \frac{\partial}{\partial z} B_{\lambda_1}$ sei M. B_M^* sei entsprechend A_N^* gebildet. Dann ist

$$\psi_M^{(m)} = m\left(R_\varkappa \frac{\partial}{\partial w} B_{\lambda_1} + Q_\mu \frac{\partial}{\partial z} B_{\lambda_1}\right) + B_M^*.$$

Wie oben folgt

(7) $$R_\varkappa \frac{\partial}{\partial w} B_{\lambda_1} + Q_\mu \frac{\partial}{\partial z} B_{\lambda_1} \equiv 0.$$

---

[8]) Siehe etwa Behnke-Thullen, Theorie d. Funkt. mehr. kompl. Veränd. Ergebn. d. Math. III, 3, S. 43.

Auf Grund der Voraussetzung

$$\frac{\partial (A_{\nu_1}, B_{\nu_1})}{\partial (w, z)} \neq 0$$

ergibt sich aus (6) und (7) $R_\varkappa \equiv Q_\mu \equiv 0$, gleichfalls im Widerspruch zur Voraussetzung.

Schließlich ist noch der Fall zu behandeln, daß $f(w, z) \equiv w$, also $\varkappa$ nicht existiert (bzw. $g(w, z) \equiv z$, also μ nicht existiert). Da $\frac{\partial}{\partial z} A_{\nu_1}$ oder mindestens $\frac{\partial}{\partial z} B_{\lambda_1} \neq 0$ ist, folgt entsprechend wie oben $Q_\mu \equiv 0$ entgegen der Voraussetzung (bzw. $R_\varkappa \equiv 0$). Damit ist Satz 2 vollständig und als unmittelbare Folgerung auch Satz 3 bewiesen.

Zum Schlusse ist nachzuweisen, daß Satz 1 eine Folgerung von Satz 2 ist.

Ist der Punkt P des Satzes 1 der Punkt $(0, 0)$, so sind die Voraussetzungen von Satz 2 für $O = P$, $F(w, z) = w^\alpha z^\beta$ und $G(w, z) = w^\gamma z^\delta$ erfüllt.

Ist $P \neq (0,0)$, so können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen: $P = (1, 0)$. Da wegen $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ sicher $(\beta, \delta) \neq (0, 0)$ gilt, können wir weiter voraussetzen, daß $\delta \neq 0$. Wir bilden nun

$$F(w, z) = (w^{\alpha\delta} - w^{\beta\gamma})\, z^{\beta\delta}$$

$$G(w, z) = w^\gamma z^\delta.$$

In bezug auf diese beiden Funktionen und $O = P$ sind nunmehr die Voraussetzungen von Satz 2 wieder erfüllt. Es ist nämlich

$$F(w, z) = (w^\alpha z^\beta)^\delta - (w^\gamma z^\delta)^\beta$$

wegen $\beta, \delta \geqq 0$ ebenfalls in $\mathfrak{B}$ beschränkt. Entwickeln wir nun $F(w, z)$ und $G(w, z)$ nach homogenen Polynomen von

$$W = w - 1,$$

$$Z = z,$$

so beginnt $F(w, z)$ mit $(\alpha\delta - \beta\gamma)\, W Z^{\beta\delta}$ und $G(w, z)$ mit Z^δ. Die Anfangsglieder der beiden Entwicklungen weisen also eine nicht identisch verschwindende Funktionaldeterminante auf.

So ist auch Satz 1 bewiesen.

(Eingegangen am 16. 8. 1936.)

Über Reduzibilitätseigenschaften gewisser Polynome, die einen Parameter enthalten.

Von

Erik L. Petterson in Stockholm[1]).

In einem Aufsatz „Die Begrenzung der Anzahl usw." (Ark. mat. astron. fys. **25** B, Nr. 16 (1936)) habe ich gezeigt, daß es nur eine endliche Anzahl reduzibler Polynome der Form

$$f(x) = F(x) + E\,M(x)$$

gibt, wo $F(x)$ und $M(x)$ feste, ganzzahlige und teilerfremde Polynome mit $\mathrm{Gr}\, M(x) = \mathrm{Gr}\, F(x) - 1$[2]) sind, und wo E alle ganzen rationalen Zahlen durchläuft. Zugrunde lag der Körper der rationalen Zahlen.

Ein allgemeines Polynom in x und E kann folgendermaßen geschrieben werden

$$H(x, E) = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu(x) E^\nu,$$

wo die $h_\nu(x)$ Polynome in x sind. Ist $H(x, E)$ in x und E irreduzibel so weiß man nach dem Hilbertschen Satz, daß unendlich viele in x irreduzible Polynome erzeugt werden, wenn E alle ganzen Zahlen durchläuft. Dabei kann aber gleichzeitig sein, daß auch unendlich viele in x reduzible Polynome erzeugt werden. Im folgenden werde ich ein Polynom der Form

$$G(x, E) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(x)\, x E^\nu + g_0(x)$$

untersuchen und die Beschränktheit der Anzahl reduzibler Polynome in x beweisen für den Fall, daß E alle ganzen Zahlen durchläuft. Es wird sich ergeben, daß eine Irreduzibilitätsvoraussetzung über $G(x, E)$ hier nicht notwendig ist. Zugrunde soll ein imaginärquadratischer Körper K liegen.

Daß auch der Satz über das Polynom $F(x) + E\,M(x)$ hiermit bewiesen ist, folgt nach der Substitution $x = \frac{1}{y}\cdot$

Satz 1. *Es sei $f(x)$ ein Polynom der Form*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(x)\, x E^\nu + g_0(x),$$

---

[1]) Nach einem Vortrag auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß, Oslo, 1936.

[2]) $\mathrm{Gr}\, M(x)$ bedeutet den Grad von $M(x)$.

wo alle $g_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$, *ganzzahlige Polynome eines imaginär-quadratischen Körpers* K *sind. Es seien ferner* $g_0(0) \neq 0$, $g_n(0) \neq 0$ *und kein Faktor allen* $g_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ *gemeinsam. Wenn dann* E *alle ganzen Zahlen aus* K *durchläuft, so enthält die dadurch erzeugte unendliche Menge von Polynomen* $f(x)$ *eine endliche und nur von den Koeffizienten der* $g_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ *abhängige Anzahl in* K *reduzibler Polynome.*

Bemerkung. Eine Folgerung aus diesem Satz ist die Irreduzibilität des $f(x)$ für alle ganzen E aus K mit

$$|E| > U,$$

wo U eine feste und nur von den Koeffizienten in $g_\nu(x)$, $(\nu = 0, 1, \ldots n)$ abhängige Zahl ist.

Beweis. Folgende Limesbeziehung, die schon in meinem erwähnten Aufsatz in „Ark. mat. astron. fys." (für den Körper der rationalen Zahlen) benutzt war, wird auch hier, aber im allgemeineren Körper K Anwendung finden.

Es sei $\varphi(E)$ eine Funktion (nicht notwendig Polynom) von E und

$$\lim_{|E| = \infty} \varphi(E) = T,$$

wo E eine beliebige unendliche Reihe ganzer Zahlen aus K durchläuft. Ist dann $\varphi(E)$ ganz für unendlich viele E, so muß der Limeswert T ganz sein und schon für endliche E erreicht werden, und es gilt sogar

$$\varphi(E) = T$$

für alle hinreichend großen, ganzen E, für welche $\varphi(E)$ ganz ist. Es ist hier zu bemerken, daß es im Körper K nur eine endliche Anzahl ganzer Zahlen von gegebenem endlichen absoluten Betrag gibt.

Es sei vorausgesetzt, daß $f(x)$ reduzibel ist für unendlich viele ganze E. Dann ergibt sich

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(x)\, x\, E^\nu + g_0(x) = A(x)\, B(x),$$

wo $A(x)$ und $B(x)$ ganzzahlige Polynome aus K sind und von E abhängen. Da diese Zerlegung für unendlich viele E gilt und $f(x)$, wenigstens für hinreichend große E, von konstantem Grade ist, so müssen Faktoren $A(x)$ und $B(x)$ von konstanten Graden r bzw. s für wenigstens gewisse unendlich viele E vorkommen. Man kann also setzen:

$$A(x) = b_0(E)\, x^r + b_1(E)\, x^{r-1} + \ldots + b_r(E),$$
$$B(x) = c_0(E)\, x^s + c_1(E)\, x^{s-1} + \ldots + c_s(E),$$

wo alle $b_\varrho(E)$ und $c_\sigma(E)$ ganze Zahlen aus K sind.

Es seien

$$\operatorname{Gr} f(x) = m$$

und $\xi_\lambda(E)$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, m$ die Wurzeln von $f(x)$. Ferner seien

$$\mathrm{Gr}\, g_n(x) = k$$

und η_μ die Wurzeln von $g_n(x)$ für $\mu = 1, 2, \ldots, k$.

Ist

$$m = k + 1,$$

so kann man die $\xi_\nu(E)$ so numerieren, daß als Folgerung eines Fundamentalsatzes der Funktionentheorie gilt

$$\lim_{|E| = \infty} \xi_\lambda(E) = \eta_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, k$$

und

$$\lim_{|E| = \infty} \xi_{k+1}(E) = 0,$$

wo E die fraglichen unendlich vielen ganzen Zahlen durchläuft. Ist

$$m > k + 1,$$

so erhält man der Reihe nach:

$$\lim_{|E| = \infty} \xi_\lambda(E) = \eta_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, k$$

$$\lim_{|E| = \infty} \xi_{k+1}(E) = 0,$$

$$\lim_{|E| = \infty} |\xi_\lambda(E)| = \infty, \quad \lambda = k + 2, k + 3, \ldots, m.$$

Aus

$$f(0) = g_0(0) = b_r(E)\, c_s(E)$$

folgt, daß $b_r(E)$ und $c_s(E)$ beschränkt sind. Ferner gilt

$$|b_0(E)| \geqq 1, \quad |c_0(E)| \geqq 1.$$

Für jeden Faktor gilt also, daß das Produkt seiner Wurzeln beschränkt ist. Ein Faktor, etwa $B(x)$, muß also, wenn $m > k + 1$ ist, die $\xi_\lambda(E)$ für wenigstens $\lambda = k + 1, k + 2, \ldots, m$ zu Wurzeln haben. Jedenfalls kann also vorausgesetzt werden, daß $\xi_\lambda(E)$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, r$, die Wurzeln von $A(x)$ sind, und daß sie die Beziehungen

$$\lim_{|E| = \infty} \xi_\lambda(E) = \eta_\lambda \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, r$$

erfüllen, wo E gewisse unendlich viele ganze Zahlen aus K durchläuft.

Da $b_r(E)$ wegen

$$b_r(E)\, c_s(E) = g_0(0)$$

ein ganzer Faktor von $g_0(0)$ ist und also nur endlich viele Werte annehmen kann, so muß ein festes $b_r(E)$ für unendlich viele ganze E vorkommen. Es ergibt sich demnach

$$\lim_{|E| = \infty} b_\varrho(E) = b_\varrho, \qquad \varrho = 0, 1, 2 \ldots, r,$$

wo E die fraglichen unendlich vielen ganzen Zahlen aus K durchläuft und die b_ϱ fest sind. Nach der früher genannten Limesbeziehung gilt dann

$$b_\varrho(E) = b_\varrho, \qquad \varrho = 0, 1, \ldots, r,$$

mit ganzen b_ϱ, für alle fraglichen ganzen E von hinreichend großem absolutem Betrag. Die Wurzeln von $A(x)$ sind aber durch diese b_ϱ eindeutig bestimmt, und sie müssen daher ihre Limeswerte erreicht haben. Man erhält also

$$\xi_\lambda(E) = \eta_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, r$$

für alle fraglichen ganzen E von hinreichend großem absolutem Betrag. Daraus würde aber folgen

$$f(\eta_\lambda) = 0 \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, r$$

und, wegen $g_n(\eta_\lambda) = 0$,

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} g_\nu(\eta_\lambda)\,\eta_\lambda E^\nu + g_0(\eta_\lambda) = 0$$

für unendlich viele E. Diese Beziehung ist eine Gleichung in E, deren Grad $\leqq n-1$ ist. Sie ist ferner nicht identisch gleich 0, weil die Polynome $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_n(x)$ nach der Voraussetzung keinen gemeinsamen Faktor haben. Die Auflösungen in E müssen also von endlicher Anzahl sein.

Satz 2. *Gegeben sei ein Polynom $f(x)$ der Form*

$$f(x) = x\sum_{\nu=1}^{n} E_\nu g_\nu(x) + g_0(x)$$

mit ganzzahligen Polynomen $g_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ des Körpers K und ferner $g_0(0) \neq 0$, $g_n(0) = 0$. Die E_ν sollen unendliche Reihen gleicher oder verschiedener ganzer Zahlen

$$E_\nu = E_\nu^{(1)}, E_\nu^{(2)}, \ldots, E_\nu^{(\lambda)}, \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

aus K durchlaufen derart, daß

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{|E_n^{(\lambda)}|}{|E_\nu^{(\lambda)}|} = \infty \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ist, und daß $g_n(x)$ und

$$x\sum_{\nu=1}^{n-1} E_\nu^{(\lambda)} g_\nu(x) + g_0(x)$$

keinen gemeinsamen Faktor haben für alle $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$. Die dadurch erzeugte unendliche Menge von Polynomen $f(x)$ enthält nur eine endliche Anzahl reduzibler Polynome.

Bemerkung. Die Voraussetzung, daß $g_n(x)$ und

$$x\sum_{\nu=1}^{n-1} E_\nu^{(\lambda)} g_\nu(x) + g_0(x)$$

teilerfremd sein sollen, ist sicher erfüllt, wenn $g_n(x)$ in K irreduzibel ist, und wenn außerdem gilt:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Gr}\, g_n(x) > \mathrm{Gr}\, g_\nu(x) + 1, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-1, \\ &\mathrm{Gr}\, g_n(x) > \mathrm{Gr}\, g_0(x). \end{aligned}$$

Beweis. Es ist hier der Grad von $f(x)$ beschränkt. Wenigstens ein fester

$$\operatorname{Gr} f(x) = m$$

muß demnach für unendlich viele $f(x)$ vorkommen. Der Beweis des Satzes 1 ist dann auch auf diesen allgemeineren Satz direkt anwendbar. Aus der Annahme, daß es unendlich viele reduzible Polynome gibt, folgt dann aber in diesem Falle die Gleichung

$$\eta \sum_{\nu=1}^{n-1} E_\nu^{(\lambda)} g_\nu(\eta) + g_0(\eta) = 0,$$

wo η eine Wurzel von $g_n(x)$ ist. Dieses ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß $g_n(x)$ und

$$x \sum_{\nu=1}^{n-1} E_\nu^{(\lambda)} g_\nu(x) + g_0(x)$$

teilerfremd sein sollen.

(Eingegangen am 14. 7. 1936.)

Einige aus den Größenbeziehungen der Wurzeln abgeleitete Irreduzibilitätskriterien.

Von

Erik L. Petterson in Stockholm.

Ein schon von O. Perron[1]) benutztes Prinzip ist folgendes:

Liegen $m-1$ von 0 verschiedene Wurzeln des normierten[2]) ganzzahligen Polynoms $f(x)$ des Grades m innerhalb des Einheitskreises, so ist $f(x)$ irreduzibel.

Im folgenden werde ich einen allgemeineren Kreis $|x| = \varrho$ mit veränderlichem Radius ϱ anwenden. Wenn dem ϱ ein geeigneter Wert gegeben wird, so lassen sich zuweilen scharfe Irreduzibilitätsbedingungen ableiten. Als Beispiel wird unter anderem ein Kriterium für die von I. Schur und G. Pólya[3]) zuerst untersuchten Polynome der Form

$$f(x) = \prod_{\nu=0}^{n} (x - b_\nu) + a$$

abgeleitet.

Folgende Irreduzibilitätsbedingung wird benutzt:

Liegen $m-1$ Wurzeln des normierten ganzzahligen Polynoms $f(x)$ des Grades m außerhalb des Kreises $|x| = \varrho$, und ist $0 < |f(0)| \leqq \varrho$, so ist $f(x)$ irreduzibel.

Der Beweis dieser Bedingung folgt unmittelbar daraus, daß $f(x)$, wenn es reduzibel ist, wenigstens einen Faktor enthalten muß, dessen sämtliche Wurzeln absolut $> \varrho$ sind, und der also ein konstantes Glied absolut $> \varrho \geqq |f(0)|$ enthält. Dieses konstante Glied soll aber ein Teiler von $f(0)$ sein und ist demnach, im Widerspruch mit dem eben bewiesenen, absolut kleiner als oder gleich $|f(0)|$.

Durch die gleichzeitige Anwendung eines Fundamentalsatzes der Funktionentheorie (von Rouché) wird zuerst folgender Satz bewiesen.

S a t z 1. *Es sei $f(x)$ ein normiertes Polynom der Form*

$$f(x) = g(x)\,x + M(x),$$

---

[1]) „Neue Kriterien für die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen", Journ. f. Math. **132** (1907), S. 288.

[2]) Normiert heißt ein Polynom, wenn der höchste Koeffizient $= 1$ ist.

[3]) S. etwa G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze II, S. 136/137.

wo $g(x)$ und $M(x)$ ganzzahlige Polynome sind. $f(x)$ ist dann irreduzibel, falls es eine Zahl ϱ gibt, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. *$g(x)$ hat keine Wurzeln innerhalb des Kreises $|x| = \varrho$,*
2. *$|g(x)| > \frac{|M(x)|}{\varrho}$ längs des Kreises $|x| = \varrho$,*
3. *$1 \leqq |M(0)| \leqq \varrho$.*

Beweis. Nach der Voraussetzung 1 liegt nur eine Wurzel ($x = 0$) des Polynoms $g(x)\,x$ innerhalb des Kreises $|x| = \varrho$.

Nach der Voraussetzung 2 gilt, daß auch nur *eine* Wurzel von $f(x)$ innerhalb des Kreises $|x| = \varrho$ liegt, und daß die übrigen außerhalb liegen.

Die Irreduzibilität von $f(x)$ folgt dann aus der Voraussetzung 3.

Als Beispiel soll

$$f(x) = (x^m - a)\,x + x^m - b$$

gesetzt werden mit

$$g(x) = x^m - a$$

und

$$M(x) = x^m - b.$$

Der absolute Betrag jeder Wurzel von $g(x)$ ist $|a|^{\frac{1}{m}}$. Für ϱ soll also gelten

$$\varrho^m < |a|. \tag{1}$$

Die Relation

$$|x^m - a| > \frac{|x^m - b|}{\varrho}, \quad (\varrho \geqq 1),$$

die auf dem ganzen Rande des Kreises $|x| = \varrho$ gelten soll, ist dann erfüllt, wenn

$$\varrho^m < \frac{|a+b|}{2} \tag{2}$$

ist. Auch soll zuletzt gelten

$$1 \leqq |b| \leqq \varrho. \tag{3}$$

Aus (2) folgt der Reihe nach

$$|a+b| > 2\varrho^m,$$
$$|a| > 2\varrho^m - |b|.$$

Nach (3) ergibt sich hieraus

$$|a| > 2\varrho^m - \varrho = \varrho^m\left(2 - \frac{1}{\varrho^{m-1}}\right) \geqq \varrho^m, \quad (m \geqq 1).$$

Die Beziehung (1) ist also eine Folgerung aus (2) und (3). Nach diesen beiden letzten Relationen läßt sich eine Zahl ϱ sicher bestimmen, wenn

$$\frac{|a+b|}{2} > |b|^m$$

ist. Damit ist gezeigt:

Das ganzzahlige Polynom

$$f(x) = (x^m - a)\, x + x^m - b, \quad b \neq 0,$$

ist irreduzibel, wenn

$$|a + b| > 2\,|b|^m$$

ist.

Wird $M(x) = a$ gesetzt, so kann man den Satz 1 folgendermaßen formulieren.

Satz 2. *Das normierte ganzzahlige Polynom*

$$f(x) = g(x)\, x + a, \quad a \neq 0,$$

ist irreduzibel, falls es eine Zahl ϱ *und ein zugehöriges*

$$\operatorname*{Min}_{|x| = \varrho} |g(x)| = k(\varrho)$$

mit folgenden Bedingungen gibt:

1. $g(x)$ *hat keine Wurzeln innerhalb des Kreises* $|x| = \varrho$.
2. $\frac{|a|}{\varrho} < k(\varrho)$.
3. $\frac{|a|}{\varrho} \leqq 1$.

Sind alle Wurzeln von $g(x)$ reell und ist z irgendeine komplexe Zahl, so gilt

$$|g(z)| > |g(\Re z)|,$$

wo $\Re z$ den Realteil von z bezeichnet. Es sei η die absolut kleinste Wurzel von $g(x)$. Für jede Zahl ϱ aus dem Intervall

$$0 < \varrho < |\eta|$$

gilt dann

$$\operatorname*{Min}_{-\varrho \leqq x \leqq \varrho} |g(x)| = \operatorname{Min}(|g(\varrho)|, |g(-\varrho)|).$$

Alle Zahlen z auf dem Rande des Kreises $|x| = \varrho$ erfüllen also folgende Beziehung:

$$|g(z)| \geqq |g(\Re z)| \geqq \operatorname{Min}(|g(\varrho)|, |g(-\varrho)|).$$

Für den Minimalwert $k(\varrho)$ aus Satz 2 findet man demnach

$$k(\varrho) = \operatorname{Min}(|g(\varrho)|, |g(-\varrho)|).$$

Die Irreduzibilität des Polynoms

$$f(x) = g(x)\, x + a$$

ist dann eine Folgerung aus

$$|a| < \varrho \operatorname{Min}(|g(\varrho)|, |g(-\varrho)|),$$
$$|a| \leqq \varrho.$$

Außerdem soll ϱ nur derart bestimmt sein, daß alle Wurzeln von $g(x)$ absolut größer als ϱ sind. Die schärfste Irreduzibilitätsbedingung erhält man, wenn ϱ so bestimmt wird, daß

$$\operatorname{Min}(|g(\varrho)|, |g(-\varrho)|) = 1$$

ist. Es ist dann zu bemerken, daß die Gleichung

$$|g(x)| = 1$$

wegen der Voraussetzung, daß alle Wurzeln von $g(x)$ reell und $\neq 0$ sein sollen, wenigstens eine reelle Wurzel hat, die absolut kleiner als die absolut kleinste Wurzel von $g(x)$ ist. Ist ϱ der absolute Betrag der absolut kleinsten reellen Wurzel der Gleichung $|g(x)| = 1$, so ist die Beziehung

$$\operatorname{Min}\left(|g(\varrho)|, |g(-\varrho)|\right) = 1$$

erfüllt und als Irreduzibilitätsbedingung erhält man

$$|a| < \varrho.$$

Folgender Satz ist damit bewiesen.

Satz 3. *Es seien $f(x)$ ein normiertes ganzzahliges Polynom der Form*

$$f(x) = g(x)x + a, \quad a \neq 0,$$

und sämtliche Wurzeln des Polynoms $g(x)$ reell und $\neq 0$. Ist dann ϱ der absolute Betrag der absolut kleinsten reellen Wurzel der Gleichung

$$|g(x)| = 1,$$

so ist $f(x)$ irreduzibel für

$$|a| < \varrho.$$

Bemerkung. Die absolut kleinste Wurzel von $g(x)$ sei mit η bezeichnet. Da das Polynom $g(x)$ ganz ist für alle ganzen x, so muß es für diese x entweder 0 oder absolut $\geqq 1$ sein. ϱ erfüllt demnach, wie man leicht findet, die Beziehung

$$\varrho \geqq |\eta| - 1.$$

Die Irreduzibilität von $f(x)$ folgt also auch aus

$$|a| < |\eta| - 1.$$

Der Satz 3 ist auch auf die von I. Schur und G. Pólya zuerst untersuchten Polynome

$$f(x) = \prod_{\nu=0}^{n} (x - b_\nu) + a$$

mit ganzen b_ν und a anwendbar. Wird nämlich

$$g(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - b_\nu)$$

gesetzt und ist

$$1 < |b_1| \leqq |b_2| \leqq \cdots \leqq |b_n|,$$

so ist die Zahl ϱ durch die Gleichung

$$\left|\prod_{\nu=1}^{n} (x - b_\nu)\right| = 1$$

bestimmt und man findet

$$\varrho \geqq |b_1| - 1.$$

Man erhält also folgenden Satz.

Satz 4. *Das Polynom*

$$f(x) = x \prod_{\nu=1}^{n} (x - b_\nu) + a, \quad a \neq 0,$$

wo a und alle b_ν ganz sind und

$$1 < |b_1| \leqq |b_2| \leqq \cdots \leqq |b_n|$$

ist, ist irreduzibel für

$$|a| < |b_1| - 1.$$

Hierzu ist zu bemerken, daß $f(x)$, wenn

$$|a| = |b_1| - 1$$

ist, reduzibel sein kann. Wir geben ein Beispiel für den Fall

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n.$$

Die Polynome

$$x(x-b)^n + (b-1), \quad 2 \nmid n,$$

$$x(x-b)^n - (b-1), \quad 2 \mid n,$$

sind durch $x - b + 1$ teilbar und für positive b ist die obige Gleichung

$$|a| = |b_1| - 1$$

erfüllt. Für negative b ist diese Gleichung auch bei dem Polynom

$$x(x-b)^n - (b+1)$$

erfüllt, wo außerdem $x - b - 1$ jedenfalls ein Faktor ist.

Eine Menge von normierten ganzzahligen Polynomen mit beschränkten Gradzahlen und Wurzeln muß endlich sein. Nach diesem Prinzip werde ich in einer späteren Arbeit unter anderem folgenden Satz beweisen.

Gegeben sei ein Polynom $f(x)$ der Form

$$f(x) = g(x)^n M(x) + N(x)$$

mit festen normierten ganzzahligen Polynomen $g(x)$ und $M(x)$ und festem ganzzahligem Polynom $N(x)$. Ferner soll $N(x)$ keinen Faktor mit $g(x) \cdot M(x)$ gemeinsam haben. Von den Gradzahlen der irreduziblen Faktoren von $f(x)$, die nicht Teiler eines Polynoms der Form

$$g(x)^t - 1, \quad (t \geqq 1)$$

sind, sei r_n die kleinste. Dann gilt:

$$\lim_{n=\infty} r_n = \infty.$$

(Eingegangen am 14. 7. 1936.)

Über den Automorphismenbereich einer Gruppe.

Von

Hans Fitting in Königsberg (Pr.).

Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1]) hat der Verfasser gezeigt, daß man auch für die Automorphismen nichtkommutativer Gruppen eine Addition und eine Multiplikation so definieren kann, daß die Automorphismen in ihrer Gesamtheit zwar keinen Ring, aber doch so etwas Ähnliches: einen sogenannten „*Bereich*" (Ring mit beschränkter Addier- und Subtrahierbarkeit) bilden.

Unter einem Bereich ist dabei ein System $\mathfrak{B}$ von Elementen zu verstehen, in dem die folgenden Axiome erfüllt sind:

I. 1. In speziellen Fällen existiert zu Elementen eines Bereichs $\mathfrak{B}$ eine „Summe", die dann eindeutig bestimmt und wieder ein Element von $\mathfrak{B}$ ist. Die betreffenden Elemente heißen in diesem Falle „*addierbar*". 2. Endlich viele Elemente von $\mathfrak{B}$ sind stets dann und nur dann addierbar, wenn sie es paarweise sind. 3. Es gilt $a + b = b + a$ und $(a + b) + c = a + (b + c)$, falls a, b bzw. a, b, c addierbar sind.

II. Zu jedem geordneten Paar von Elementen a, b gibt es innerhalb eines Bereichs entweder kein oder genau ein die Gleichung $a + x = b$ lösendes Element $x = b - a$; im letzten Fall heißt a von b „*subtrahierbar*".

III. 1. Zu zwei Elementen eines Bereichs $\mathfrak{B}$ existiert stets ein eindeutig bestimmtes Produkt, das wieder ein Element von $\mathfrak{B}$ ist. 2. Es gilt $(ab)c = a(bc)$

IV. Mit a, b sind für jedes c auch ca, cb bzw. ac, bc addierbar und die Gleichungen $c(a + b) = ca + cb$, $(a + b)c = ac + bc$ erfüllt.

V. 1. In einem Bereich $\mathfrak{B}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes der Bedingung $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ genügendes Einselement 1. 2. Ein zum Einselement addierbares Element ist zu allen Elementen addierbar und von allen Elementen subtrahierbar. 3. Ein Bereich $\mathfrak{B}$ enthält mindestens ein zum Einselement addierbares Element, also auch ein (eindeutig bestimmtes) zu allen Elementen a von $\mathfrak{B}$ addierbares Nullelement 0, für das $0 + a = a + 0 = a$ gilt.

---

[1]) H. Fitting: Die Theorie der Automorphismenringe abelscher Gruppen und ihre Analogen bei nichtkommutativen Gruppen. Math. Annalen 107 (1933), S. 514—543; diese Arbeit wird im folgenden mit *F* zitiert.

Ein Beispiel für einen Bereich erhält man u. a. folgendermaßen:

Es sei $\mathfrak{r}$ ein (kommutativer oder nichtkommutativer) Ring mit Einselement 1, $\mathfrak{k}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{r}$ und $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l$ ein System von Elementen aus $\mathfrak{r}$, die den Bedingungen

$$(1) \qquad \eta_i \eta_j = \begin{matrix} 0 & \text{für } i \neq j \\ \eta_i & \text{für } i = j, \end{matrix}$$

$$(2) \qquad \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_l \equiv 1 \quad (\text{mod } \mathfrak{k}),$$

$$(3) \qquad \eta_\lambda \not\equiv 0 \quad (\text{mod } \mathfrak{k})$$

für jedes $\lambda = 1, 2, \ldots, l$ genügen. Unter diesen Voraussetzungen ist die Menge $\mathfrak{a}$ aller Summen von der Gestalt

$$\sigma = \varkappa + \sum_{\lambda=1}^{l} \alpha_\lambda \cdot \eta_\lambda,$$

in denen α entweder $= 0$ oder $= 1$ ist und $\varkappa$ alle Elemente aus $\mathfrak{k}$ durchläuft, bei additiver und multiplikativer Verknüpfung ein Bereich, falls n Elemente $\sigma_\nu = \varkappa_\nu + \sum_{\lambda=1}^{l} \alpha_\lambda^{(\nu)} \cdot \eta_\lambda$ der Menge $\mathfrak{a}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ addierbar genannt werden, wenn in jeder Spalte der Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} & \cdots & \cdots & \alpha_l^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \alpha_\lambda^{(\nu)} \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{(n)} & \cdots & \cdots & \alpha_l^{(n)} \end{pmatrix}$$

höchstens einmal das Einselement des Ringes $\mathfrak{r}$ vorkommt. (Die Forderung (3) hat zur Folge, daß die Elemente aus $\mathfrak{a}$ alle voneinander verschieden sind, die Forderung (2), daß $\mathfrak{a}$ das Einselement von $\mathfrak{r}$ enthält.)

Das vorausgeschickte Beispiel ist, wie im folgenden gezeigt werden soll, auch für die Theorie der Gruppenautomorphismen von Bedeutung. Es stellt sich nämlich heraus, daß der aus den Automorphismen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gebildete Bereich $\mathfrak{A}$ gerade vom Typus des Bereichs $\mathfrak{a}$ dieses Beispiels ist, falls man sich — genau wie in F (siehe Fußnote [1]) — auf die mit den Transformationen (inneren Automorphismen)

$$\vartheta(B) = \{A \to B^{-1} \cdot A \cdot B\}$$

vertauschbaren, d. h. der Bedingung $(B^{-1} \cdot A \cdot B)\,\Theta = B^{-1} \cdot A\Theta \cdot B$ genügenden („*normalen*") Automorphismen beschränkt und außerdem in der zugrundegelegten Gruppe $\mathfrak{G}$ die Gültigkeit des Doppelkettensatzes für die Normalteiler, d. h. die Existenz einer Hauptreihe voraussetzt. Insbesondere zeigt sich, daß dann $\mathfrak{A}$ immer in einen Ring $\mathfrak{R}$ eingebettet werden kann, in dem die Menge $\mathfrak{K}$ aller Automorphismen, welche die Gruppe $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe ihres Zentrums (d. h. „ins Zentrum") abbilden, ein

zweiseitiges Ideal ist. Bedeutet $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2 \times \ldots \times \mathfrak{U}_h$ eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ als direktes Produkt direkt-unzerlegbarer Untergruppen $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_h$, von denen die l ersten nichtkommutativ, die $h - l$ letzten aber kommutativ sein mögen (was ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden darf), und ist H_λ derjenige Automorphismus von $\mathfrak{G}$, der entsteht, wenn jedem Element $A \in \mathfrak{G}$ seine $\mathfrak{U}_\lambda$-Komponente A_λ zugeordnet wird: $\mathsf{H}_\lambda = \{A \to A_\lambda\}$, so ergibt sich $\mathfrak{A}$ als Spezialfall der Bereiche $\mathfrak{a}$ des obigen Beispiels, wenn $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{k}$ durch $\mathfrak{K}$, $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l)$ durch $(\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots, \mathsf{H}_l)$ ersetzt wird.

Neben diesem Resultat werde ich noch die folgenden über die Ergebnisse von F (siehe Fußnote [1])) hinausgehenden Sätze beweisen:

a) *Die Menge* $\mathfrak{K}$ der ins Zentrum abbildenden Automorphismen *ist* ein Ring und zwar *der maximale Unterring des Automorphismenbereichs* $\mathfrak{A}$ (der alle übrigen Unterringe von $\mathfrak{A}$ umfaßt).

b) $\mathfrak{K}$ ist sogar zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{A}$. *Der Restklassenbereich* $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ *ist die direkte Summe endlich vieler Bereiche, die nur aus dem Null- und Einselement bestehen, wobei das Einselement nicht zu sich selber addierbar ist.*

c) *Das Radikal* $\mathfrak{C}$ *des Bereichs* $\mathfrak{A}$ *ist zugleich das Radikal von* $\mathfrak{K}$; insbesondere ist also $\mathfrak{C}$ stets Untermenge von $\mathfrak{K}$.

d) $\mathfrak{C}$ ist zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{A}$, also auch von $\mathfrak{K}$. *Der Restklassenring* $\mathfrak{K}/\mathfrak{C}$ *ist vollständig reduzibel* (direkte Summe endlich vieler einfacher Links- bzw. Rechtsideale). *Folglich ist* $\mathfrak{K}$ *vom Typus der Ringe, die Herr Köthe in der Arbeit: „Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist"* [2]), *untersucht hat,* wobei noch das Besondere hinzukommt, daß das Radikal von $\mathfrak{K}$ nicht nur aus lauter nilpotenten Elementen besteht, sondern selber nilpotent ist. *Der Restklassenbereich* $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ *zerfällt in die direkte Summe zweier Bereiche, von denen der eine mit* $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$, *der andere mit* $\mathfrak{K}/\mathfrak{C}$ *isomorph ist.*

Die im folgenden abgeleiteten Resultate bilden die Grundlage für eine weitere Arbeit, in der die Automorphismengruppe einer Gruppe (mit Doppelkettensatz für die Normalteiler) untersucht werden soll.

§ 1.

Satz 1: *Die Menge* $\mathfrak{K}$ *aller Automorphismen* [3]), *durch welche eine Gruppe* $\mathfrak{G}$ *auf eine Untergruppe ihres Zentrums (d. h. „ins Zentrum") ab-*

---

[2]) Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 161—186.

[3]) Unter einem *„Automorphismus"* soll in dieser Arbeit durchweg eine operatorhomomorphe (eindeutige, relations- und operatortreue) Abbildung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ verstanden werden. Ist die Abbildung umkehrbar eindeutig und außerdem $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$, so heißt der Automorphismus *„eigentlich"*, sonst *„uneigentlich"*.

gebildet wird, ist ein Ring. Derselbe ist in dem Bereich[4]) $\mathfrak{A}$ *aller normalen*[5]) *Automorphismen von* $\mathfrak{G}$ *enthalten und maximal in dem Sinne, daß er alle übrigen Unterringe von* $\mathfrak{A}$ *umfaßt.* $\mathfrak{K}$ *besteht aus den- und nur denjenigen Elementen von* $\mathfrak{A}$, *die zu allen Elementen von* $\mathfrak{A}$ *addierbar sind.*

Beweis: K_1 und K_2 seien irgend zwei Elemente der Menge $\mathfrak{K}$.

1. Die Bildgruppen $\mathfrak{G}\mathsf{K}_1$, $\mathfrak{G}\mathsf{K}_2$ sind dann als Untergruppen des Zentrums von $\mathfrak{G}$ elementweise vertauschbar, also sind K_1 und K_2 addierbar[4]). Die Summe $\mathsf{K}_1 + \mathsf{K}_2$ ist — wie sich sofort aus der Definition[4]) ergibt — wieder ein Element von $\mathfrak{K}$.

2. Wegen $B\mathsf{K}_1 \cdot B^{-1}\mathsf{K}_2 \cdot C\mathsf{K}_1 \cdot C^{-1}\mathsf{K}_2 = (B \cdot C)\mathsf{K}_1 \cdot (B \cdot C)^{-1}\mathsf{K}_2$ ist die Zuordnung

$$\Delta = \{A \to A\mathsf{K}_1 \cdot A^{-1}\mathsf{K}_2\}$$

ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$, der zu $\mathfrak{K}$ gehört und der Gleichung $\mathsf{K}_2 + \Delta = \mathsf{K}_1$ genügt.

3. Ferner ist das Produkt $\mathsf{K}_1\mathsf{K}_2$ in $\mathfrak{K}$ enthalten, was aus $\mathfrak{G}\mathsf{K}_1 \subseteqq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}\mathsf{K}_1\mathsf{K}_2 \subseteqq \mathfrak{G}\mathsf{K}_2$ unmittelbar zu ersehen ist.

4. Schließlich gilt für jedes $\mathsf{K} \in \mathfrak{K}$

$$\begin{aligned} B^{-1} \cdot A\mathsf{K} \cdot B &= A\mathsf{K} = (B\mathsf{K})^{-1} \cdot A\mathsf{K} \cdot B\mathsf{K} \\ &= B^{-1}\mathsf{K} \cdot A\mathsf{K} \cdot B\mathsf{K} = (B^{-1} \cdot A \cdot B)\,\mathsf{K} \end{aligned}$$

also

$$\mathsf{K} \in \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{A}.$$

Durch 1., 2., 3., 4. wird $\mathfrak{K}$ als Unterring von $\mathfrak{A}$ charakterisiert. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\mathfrak{K}$ jeden weiteren Unterring $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{A}$ umfaßt. Ist Λ ein Element eines solchen Ringes $\mathfrak{L}$, so muß mit Λ auch $\Lambda + \Lambda$ in $\mathfrak{L}$ enthalten sein. Λ muß also zu sich selber addierbar sein, was nur

---

[4]) Endlich viele Automorphismen $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ werden „*addierbar*" genannt, wenn die Bildgruppen $\mathfrak{G}\Theta_1, \ldots, \mathfrak{G}\Theta_n$ zu je zweien elementweise vertauschbar sind; in diesem Falle wird zu $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ eine „*Summe*" $\Theta_1 + \ldots + \Theta_n$ erklärt; diese Summe ist der Automorphismus $\Theta_1 + \ldots + \Theta_n = \{A \to A\Theta_1 \cdot A\Theta_2 \cdot \ldots \cdot A\Theta_n\}$. Zu zwei Automorphismen Θ und Π von $\mathfrak{G}$ kann man immer ein „*Produkt*" als den aus Θ und Π zusammengesetzten Automorphismus $\Theta\Pi = \{A \to (A\Theta)\Pi\}$ definieren, ohne über Θ und Π irgendwelche einschränkende Voraussetzungen machen zu müssen. Man bestätigt leicht, daß die Automorphismen einer Gruppe bei additiver und multiplikativer Verknüpfung in dem in der Einleitung definierten Sinne einen Bereich bilden.

[5]) „*Normal*" wird ein Automorphismus Θ genannt, wenn er mit allen Transformationen (inneren Automorphismen) $\vartheta(B) = \{A \to B^{-1} \cdot A \cdot B\}$ vertauschbar ist [d. h. der Bedingung $(B^{-1} \cdot A \cdot B)\Theta = B^{-1} \cdot A\Theta \cdot B$ genügt], wenn er also auch nach Hinzunahme der Transformationen zum Operatorensystem der Gruppe noch operatorentreu bleibt. Die normalen Automorphismen bilden natürlich bei der in Fußnote [4]) definierten additiven und multiplikativen Verknüpfung für sich wieder einen Bereich, der in dieser Arbeit mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet wird.

dann der Fall ist, wenn die Bilder AA und BA von zwei beliebigen Elementen A und B aus $\mathfrak{G}$ miteinander vertauschbar sind. Da A normal ist, folgt hieraus: $AA = (BA)^{-1} \cdot AA \cdot (BA) = B^{-1}A \cdot AA \cdot BA = (B^{-1} \cdot A \cdot B)A = B^{-1} \cdot AA \cdot B$, womit $A \in \mathfrak{K}$, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$ bewiesen ist.

Ist ein Automorphismus Π der Gruppe $\mathfrak{G}$ zu jedem Automorphismus, insbesondere auch zum identischen Automorphismus von $\mathfrak{G}$ addierbar, so ist $\Pi \in \mathfrak{K}$ und umgekehrt.

§ 2.

Satz 2: *Der Ring $\mathfrak{K}$ ist sogar ein zweiseitiges Ideal*[6]) *des Bereichs* $\mathfrak{A}$.

Beweis: Es sei $\Theta \in \mathfrak{A}$, $\mathsf{K} \in \mathfrak{K}$. Dann ist

1. $\Theta \cdot \mathsf{K} \in \mathfrak{K}$; denn es gilt $\mathfrak{G}\Theta \subseteq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}\Theta\mathsf{K} \subseteq \mathfrak{G}\mathsf{K}$;

2. $\mathsf{K}\Theta \in \mathfrak{K}$; denn es gilt für beliebige Elemente A und B aus $\mathfrak{G}$ $AK\Theta = (AK)\Theta = (B^{-1} \cdot AK \cdot B)\Theta = B^{-1} \cdot AK\Theta \cdot B$.

§ 3.

Auf Grund des Satzes 2 läßt sich zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{K}$ ein „Restklassenbereich" in der üblichen Weise definieren, da die Elemente von $\mathfrak{K}$ zu allen Elementen von $\mathfrak{A}$ addierbar sind. In diesem Paragraphen soll die Struktur dieses Bereichs untersucht werden. Zu diesem Zweck beweise ich zunächst

Hilfssatz 1: Jeder normale Automorphismus Θ ist vom identischen Automorphismus[7]) P_1 subtrahierbar.

Beweis: Nach Definition (siehe Fußnote [5])) ist

$$B^{-1} \cdot A\Theta \cdot B = (B^{-1} \cdot A \cdot B)\,\Theta = B^{-1}\Theta \cdot A\Theta \cdot B\Theta = (B\Theta)^{-1} \cdot A\Theta \cdot (B\Theta),$$

also

$$A\Theta \cdot B \cdot (B\Theta)^{-1} = B \cdot (B\Theta)^{-1} \cdot A\Theta. \tag{1}$$

Es gilt daher

$$A \cdot (A\Theta)^{-1} \cdot \underbrace{B \cdot (B\Theta)^{-1}} = A \cdot \underbrace{B \cdot (B\Theta)^{-1} \cdot (A\Theta)^{-1}} = A \cdot B \cdot [(A \cdot B)\Theta]^{-1},$$

woraus folgt, daß die Zuordnung

$$\Theta' = \{B \to B \cdot (B\Theta)^{-1}\}$$

---

[6]) „*Ideal*" heißt jedes Teilsystem eines Bereichs, das mit einem Element a und einem zu a addierbaren Element b bzw. einem von a subtrahierbaren Elemente c immer auch die Summe $a + b$ bzw. die Differenz $a - c$ und außerdem alle Produkte $r \cdot a$ bzw. $a \cdot r$ enthält, wenn r alle Elemente des Bereichs durchläuft. Genau wie in Ringen, werden die Ideale eines Bereichs in links-, rechts- und zweiseitige eingeteilt.

[7]) Der „*identische*" Automorphismus $\{A \to A\}$ (der jedes Element auf sich selber abbildet) wird in der ganzen Arbeit immer mit P_1, der „*Nullautomorphismus*" $\{A \to E\}$ (bei dem jedem Element das Einheitselement E zugewiesen ist) durchweg mit P_0 bezeichnet.

ein Automorphismus ist, der wegen (1) zu Θ addierbar ist und der Bedingung

$$A(\Theta' + \Theta) = A\Theta' \cdot A\Theta = A \cdot (A\Theta)^{-1} \cdot A\Theta = A = A\mathsf{P}_1,$$

d. h. $\Theta' + \Theta = \mathsf{P}_1$ genügt.

Zusatz: Für jeden normalen Automorphismus Θ gilt $\Theta(\mathsf{P}_1 - \Theta) = (\mathsf{P}_1 - \Theta)\Theta \equiv \mathsf{P}_0$[7]) (mod $\mathfrak{K}$): denn Θ und $\Theta' = \mathsf{P}_1 - \Theta$ sind addierbar, also gilt wegen $\Theta\Theta' = \Theta'\Theta$ für beliebige Elemente A, B aus $\mathfrak{G}$

$$\begin{aligned} A\Theta\Theta' &= (B\Theta)^{-1} \cdot A\Theta\Theta' \cdot (B\Theta) = B^{-1}\Theta \cdot A\Theta\Theta' \cdot B\Theta = B^{-1}\Theta \cdot A\Theta'\Theta \cdot B\Theta \\ &= (B^{-1} \cdot A\Theta' \cdot B)\Theta = B^{-1} \cdot A\Theta'\Theta \cdot B = B^{-1} \cdot A\Theta\Theta' \cdot B. \end{aligned}$$

I. Jeder normale Automorphismus Θ ist modulo $\mathfrak{K}$ idempotent: $\mathsf{P}_0 \equiv \Theta(\mathsf{P}_1 - \Theta) \equiv \Theta - \Theta^2$ (mod $\mathfrak{K}$).

II. Modulo $\mathfrak{K}$ sind normale Automorphismen Θ, Π multiplikativ vertauschbar: $\Theta\Pi \equiv \Pi\Theta$ (mod $\mathfrak{K}$); es ist nämlich

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{cases} \mathsf{P}_0 \equiv \Theta \cdot \Pi \cdot \underbrace{(\mathsf{P}_1 - \Theta) \cdot \Theta} \cdot \Pi \cdot (\mathsf{P}_1 - \Theta) \equiv \Theta \cdot \Pi \cdot (\mathsf{P}_1 - \Theta) \\ \mathsf{P}_0 \equiv (\mathsf{P}_1 - \Theta) \cdot \Pi \cdot \Theta. \end{cases}\right\} \text{(mod } \mathfrak{K}\text{)},$$

also

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} \Theta \cdot \Pi \equiv \Theta \cdot \Pi \cdot \mathsf{P}_1 &\equiv \Theta \cdot \Pi \cdot [\Theta + (\mathsf{P}_1 - \Theta)] \\ &\equiv \Theta \cdot \Pi \cdot \Theta + \Theta \cdot \Pi \cdot (\mathsf{P}_1 - \Theta) \equiv \Theta \cdot \Pi \cdot \Theta \\ \equiv (\mathsf{P}_1 - \Theta) \cdot \Pi \cdot \Theta + \Theta \cdot \Pi \cdot \Theta &\equiv [(\mathsf{P}_1 - \Theta) + \Theta] \cdot \Pi \cdot \Theta \\ &\equiv \mathsf{P}_1 \cdot \Pi \cdot \Theta \equiv \Pi \cdot \Theta \quad \text{(mod } \mathfrak{K}\text{)}. \end{aligned}$$

III. Normale Automorphismen Θ, Π sind stets dann und nur dann addierbar, wenn $\Theta\Pi \equiv \mathsf{P}_0$ (mod $\mathfrak{K}$).

Beweis: 1. Sind Θ und Π addierbar, so gilt für beliebige Elemente A, B aus $\mathfrak{G}$:

$$A\Theta\Pi = (A\Theta)\Pi = (B\Theta)^{-1} \cdot (A\Theta)\Pi \cdot (B\Theta) = B^{-1}\Theta \cdot A\Theta\Pi \cdot B\Theta.$$

Nun ist nach II. $\Theta\Pi \equiv \Pi\Theta$ (mod $\mathfrak{K}$), d. h. $\Theta\Pi = \Pi\Theta + \mathsf{K}$ mit $\mathsf{K} \in \mathfrak{K}$; also wird

$$\begin{aligned} A\Theta\Pi &= B^{-1}\Theta \cdot A\Theta\Pi \cdot B\Theta = B^{-1}\Theta \cdot A\Pi\Theta \cdot A\mathsf{K} \cdot B\Theta = A\mathsf{K} \cdot B^{-1}\Theta \cdot A\Pi\Theta \cdot B\Theta \\ &= (B^{-1} \cdot A\Pi \cdot B)\Theta \cdot A\mathsf{K} = B^{-1} \cdot A\Pi\Theta \cdot B \cdot A\mathsf{K} = B^{-1} \cdot A\Pi\Theta \cdot A\mathsf{K} \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot A(\Pi\Theta + \mathsf{K}) \cdot B = B^{-1} \cdot A\Theta\Pi \cdot B. \end{aligned}$$

2. Ist $\Theta\Pi \equiv \mathsf{P}_0$ (mod $\mathfrak{K}$), so gilt

$$\begin{aligned} A\Pi = (B\Theta\Pi)^{-1} \cdot A\Pi \cdot (B\Theta\Pi) &= (B\Theta)^{-1}\Pi \cdot A\Pi \cdot (B\Theta)\Pi \\ &= \big((B\Theta)^{-1} \cdot A \cdot (B\Theta)\big)\Pi = (B\Theta)^{-1} \cdot A\Pi \cdot (B\Theta), \end{aligned}$$

so daß $\mathfrak{G}\Theta$ mit $\mathfrak{G}\Pi$ elementweise vertauschbar, folglich Θ zu Π addierbar ist.

Aus I., II., III. erhält man zusammenfassend:

Satz 3a: *Der Restklassenbereich $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ besteht aus lauter idempotenten, multiplikativ miteinander vertauschbaren Elementen, von denen endlich viele*

$\bar{\Theta}_1, \ldots, \Theta_n$ *stets dann und nur dann addierbar sind, falls für* $i \neq j$ *das Produkt* $\bar{\Theta}_i \cdot \bar{\Theta}_j$ *immer gleich Null ist.* $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ *hat dieselbe Struktur wie derjenige Bereich, der aus dem System* $\mathfrak{S}$ *aller Teilmengen* T *einer festen Menge* M *entsteht, wenn man*

1. *das Produkt von* T *und* T' *aus* $\mathfrak{S}$ *als den Durchschnitt* $T \frown T'$ *definiert,*

2. *endliche viele Mengen* $T_1, \ldots, T_n$ *des Systems* $\mathfrak{S}$ *addierbar nennt, falls sie paarweise elementefremd sind, und in diesem Falle unter der Summe* $T_1 + \ldots + T_n$ *die Vereinigungsmenge der* T_i *versteht.*

Erweitert man in $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ *den Definitionsbereich der Addition, indem man auch für solche Elemente, deren Produkt nicht verschwindet, eine Summe durch die Gleichung*

$$\bar{\Theta} \oplus \bar{\Pi} = (\bar{\Theta} - \bar{\Theta}\bar{\Pi}) + (\bar{\Pi} - \bar{\Pi}\bar{\Theta})$$

erklärt, so wird $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ *zu einem kommutativen Ring, in dem jedes Element idempotent ist, d. h. zu einem Booleschen Ring.*

Genauere Aussagen über die Struktur des Bereichs $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ lassen sich machen unter der Voraussetzung, daß in der Gruppe $\mathfrak{G}$ die Doppelkettenbedingung für die Normalteiler gilt (d. h. eine Hauptreihe existiert), an der von jetzt an bis zum Schluß der Arbeit festgehalten werden soll. Bekanntlich ist dann $\mathfrak{G}$ direktes Produkt endlich vieler direkt-unzerlegbarer Untergruppen $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_h$, deren Numerierung wir so gewählt denken, daß die nichtkommutativen $\mathfrak{U}$ die Indizes 1 bis l, die kommutativen die Indizes $(l+1)$ bis h haben. Es ist also

(I)	$\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_1 \times \ldots \times \mathfrak{U}_h$,	$\mathfrak{U}_i$ direkt-unzerlegbar,
(II)	$\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_l$	nicht kommutativ,
(III)	$\mathfrak{U}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{U}_h$	kommutativ.

Die Struktur des Bereichs $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ ergibt sich aus den folgenden Hilfssätzen.

Hilfssatz 2: Jeder nilpotente, normale Automorphismus Θ der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist ein Element des Ringes $\mathfrak{K}$.

Beweis: Voraussetzungsgemäß ist $\Theta^n = \mathsf{P}_0$, falls n hinreichend groß gewählt wird; also gilt für beliebige Elemente A und B aus $\mathfrak{G}$:

$$B\Theta^n = B\mathsf{P}_0 = E,$$

$$\begin{aligned} A\Theta = E^{-1} \cdot A\Theta \cdot E = (B\Theta^n)^{-1} \cdot A\Theta \cdot (B\Theta^n) &= B^{-1}\Theta^n \cdot A\Theta \cdot B\Theta^n \\ &= (B^{-1}\Theta^{n-1} \cdot A \cdot B\Theta^{n-1})\Theta. \end{aligned}$$

Da Θ normal sein sollte, ist weiter

$$\begin{aligned} A\Theta = (B^{-1}\Theta^{n-1} \cdot A \cdot B\Theta^{n-1})\Theta &= B^{-1}\Theta^{n-1} \cdot A\Theta \cdot B\Theta^{n-1} = \ldots \\ &= B^{-1}\Theta^{n-i} \cdot A\Theta \cdot B\Theta^{n-i} = \ldots = B^{-1} \cdot A\Theta \cdot B, \end{aligned}$$

woraus folgt, daß $A\Theta$ und damit überhaupt die ganze Bildgruppe $\mathfrak{G}\Theta$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$ enthalten ist. Daher ist in der Tat $\Theta \in \mathfrak{K}$.

Ein zweiter Beweis ergibt sich direkt aus Satz 3a, demzufolge gilt: $\Theta \equiv \Theta^2 \equiv \ldots \equiv \Theta^n \equiv \mathsf{P}_0 \pmod{\mathfrak{K}}$.

Hilfssatz 3: Ist $\mathfrak{G}$ eine direkt-unzerlegbare, nichtkommutative Gruppe (mit Hauptreihe!), so läßt sich jeder normale Automorphismus Θ von $\mathfrak{G}$ eindeutig als Summe von der Gestalt $\Theta = \mathsf{P}_\alpha + \mathsf{K}$ darstellen, in der K ein Element des Ringes $\mathfrak{K}$ bedeutet und α entweder $= 0$ oder $= 1$, d. h. P_α entweder der Null- oder der identische Automorphismus von $\mathfrak{G}$ ist (vgl. Fußnote [7])). Die Summen $\mathsf{P}_1 + \mathsf{K}$ sind die eigentlichen, die Summen $\mathsf{P}_0 + \mathsf{K}$ die uneigentlichen, normalen Automorphismen von $\mathfrak{G}$.

Beweis: Zunächst sei Θ uneigentlich. Bekanntlich[8]) ist dann Θ nilpotent, nach Hilfssatz 2 also Element aus $\mathfrak{K}$, womit die behauptete Darstellbarkeit für die uneigentlichen (normalen) Antomorphismen von $\mathfrak{G}$ bereits bewiesen ist. Als Summe von der Gestalt $\mathsf{K}' + \mathsf{P}_1$ mit $\mathsf{K}' \in \mathfrak{K}$ läßt sich ein uneigentliches Θ sicherlich nicht darstellen. Da nämlich $\mathfrak{G}$ nicht kommutativ sein sollte, muß K' als ein Automorphismus, der $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe des Zentrums abbildet, uneigentlich und daher nilpotent sein (vgl. Fußnote [8])). Für hinreichend großes n gilt also $[\mathsf{K}']^n = \mathsf{P}_0$ und daher $(\mathsf{P}_1 + \mathsf{K}')\cdot(\mathsf{P}_1 - \mathsf{K}' + [\mathsf{K}']^2 - [\mathsf{K}']^3 + \ldots) = \mathsf{P}_1 + [\mathsf{K}']^n = \mathsf{P}_1$, wodurch $\mathsf{K}' + \mathsf{P}_1$ als eigentlicher Automorphismus charakterisiert wird, der mit dem uneigentlichen Automorphismus Θ nicht identisch sein kann.

Es sei jetzt Θ ein eigentlicher Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Unter dieser Annahme ist $A\Theta \cdot A^{-1}$ bei beliebigem $A \in \mathfrak{G}$ stets im Zentrum von $\mathfrak{G}$ enthalten; denn es ist

$$A^{-1}\cdot B\Theta\cdot A = (A^{-1}\cdot B\cdot A)\Theta = A^{-1}\Theta\cdot B\Theta\cdot A\Theta = (A\Theta)^{-1}\cdot B\Theta\cdot(A\Theta),$$
$$\underbrace{A\Theta\cdot A^{-1}}\cdot B\Theta = B\Theta\cdot\underbrace{A\Theta\cdot A^{-1}},$$

woraus folgt, daß $A\Theta\cdot A^{-1}$ in der Tat mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist, da $B\Theta$ mit B alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft. Wegen

$$B\Theta\cdot B^{-1}\cdot\underbrace{C\Theta\cdot C^{-1}} = B\Theta\cdot\underbrace{C\Theta\cdot C^{-1}}\cdot B^{-1} = (B\cdot C)\Theta\cdot(B\cdot C)^{-1}$$

ist daher die Zuordnung

$$\mathsf{K} = \{A \to A\Theta\cdot A^{-1}\}$$

[8]) Nach F § 4, Satz II vermittelt jeder normale Automorphismus Θ einer Gruppe $\mathfrak{G}$, in der die Doppelkettenbedingung für die Normalteiler gilt, eine direkte Produktzerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^* \times \mathfrak{G}^{**}$, die entsteht, wenn unter $\mathfrak{G}^*$ die Bildgruppe $\mathfrak{G}\Theta^n$, unter $\mathfrak{G}^{**}$ die Gruppe aller von Θ^n auf das Einheitselement E abgebildeten Elemente aus $\mathfrak{G}$ verstanden wird; die natürliche Zahl n ist dabei so groß zu wählen, daß in der absteigenden Kette $\mathfrak{G} \supseteqq \mathfrak{G}\Theta \supseteqq \mathfrak{G}\Theta^2 \supset \ldots : \mathfrak{G}\Theta^n = \mathfrak{G}\Theta^{n+1}$ ausfällt. Da im Spezialfall des Textes $\mathfrak{G}$ direkt-unzerlegbar und Θ uneigentlich ist, gilt $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}\Theta^n = (E)$, $\mathfrak{G}^{**} = \mathfrak{G}$, also $\Theta^n = \mathsf{P}_0$.

ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$, für den $\Theta = \mathsf{K} + \mathsf{P}_1$ gilt, womit die behauptete Darstellbarkeit auch für die eigentlichen (normalen) Automorphismen von $\mathfrak{G}$ bewiesen ist, da K offensichtlich der Menge $\mathfrak{K}$ angehört. Daß ein eigentliches Θ nicht auch noch als Summe von der Gestalt $\mathsf{P}_0 + \mathsf{K}'$ mit $\mathsf{K}' \in \mathfrak{K}$ hergestellt werden kann, ist trivial, weil — wie wir bereits oben bemerkten — bei nichtkommutativen Gruppen jedes $\mathsf{K}' \in \mathfrak{K}$ notwendig ein uneigentlicher Automorphismus sein muß.

Hilfssatz 4: Im allgemeinen Falle einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ (mit Hauptreihe!) läßt sich jeder normale Autormorphismus Θ von $\mathfrak{G}$ eindeutig als Summe von der Gestalt

$$\Theta = \mathsf{P}_{\alpha_1}\mathsf{H}_1 + \dots + \mathsf{P}_{\alpha_l}\mathsf{H}_l + \mathsf{K}$$

darstellen. K ist dabei wieder ein Element aus $\mathfrak{K}$, H_λ ist der durch die Zuordnungsvorschrift $\mathsf{H}_\lambda = \{A \to A_\lambda\}$ definierte Automorphismus von $\mathfrak{G}$, in der A_λ die $\mathfrak{U}_\lambda$-Komponente von A bei der Zerlegung (I) bedeutet und α_λ — genau wie α in Hilfssatz 3 — entweder $= 0$ oder $= 1$, d. h. $\mathsf{P}_{\alpha_\lambda}$ entweder der Null- oder der identische Automorphismus von $\mathfrak{G}$ ist (vgl. Fußnote [7])). Hinsichtlich der Bedeutung von l vgl. (II).

Beweis: Die Automorphismen $\mathsf{H}_1, \dots, \mathsf{H}_h$ sind addierbar, da die Bildgruppen $\mathfrak{G}\mathsf{H}_1 = \mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{G}\mathsf{H}_h = \mathfrak{U}_h$ zu je zweien elementweise miteinander vertauschbar sind. Sie genügen der „Vollständigkeitsrelation":

$$\mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_2 + \dots + \mathsf{H}_h = \mathsf{P}_1 \tag{1}$$

und den „Orthogonalitätsrelationen":

$$\mathsf{H}_\mu \cdot \mathsf{H}_\nu = \begin{matrix} \mathsf{H}_\mu & \text{für} & \mu = \nu \\ \mathsf{P}_0 & \text{für} & \mu \neq \nu \end{matrix}; \tag{2}$$

denn es ist

$$A(\mathsf{H}_1 + \dots + \mathsf{H}_h) = A\,\mathsf{H}_1 \cdot A\,\mathsf{H}_2 \cdot \ldots \cdot A\,\mathsf{H}_h = A = A\,\mathsf{P}_1$$

und

$$A\,\mathsf{H}_\mu\mathsf{H}_\nu = (A\,\mathsf{H}_\mu)\,\mathsf{H}_\nu = \begin{matrix} A\,\mathsf{H}_\mu & \text{für} & \mu = \nu \\ E = A\,\mathsf{P}_0 & \text{für} & \mu \neq \nu \end{matrix}.$$

Weiter sind die H_λ sogar noch normale Automorphismen, was aus

$$B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\lambda \cdot B = (B\,\mathsf{H}_l)^{-1} \cdot \ldots \cdot (B\,\mathsf{H}_1)^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\lambda \cdot (B\,\mathsf{H}_1) \cdot \ldots \cdot (B\,\mathsf{H}_l)$$
$$= (B\,\mathsf{H}_\lambda)^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\lambda \cdot (B\,\mathsf{H}_\lambda) = (B^{-1} \cdot A \cdot B)\,\mathsf{H}_\lambda$$

unmittelbar hervorgeht.

Aus (1) folgt

$$\Theta = \mathsf{P}_1\Theta\mathsf{P}_1 = \sum_{\mu=1}^{h} \sum_{\nu=1}^{h} \mathsf{H}_\mu\Theta\mathsf{H}_\nu \tag{3}$$

$$= \sum_{\mu \neq \nu} \mathsf{H}_\mu\Theta\mathsf{H}_\nu + \sum_{\mu=l+1}^{h} \mathsf{H}_\mu\Theta\mathsf{H}_\mu + \sum_{\mu=1}^{l} \mathsf{H}_\mu\Theta\mathsf{H}_\mu.$$

Im Fall $\mu \neq \nu$ gilt $\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu \in \mathfrak{K}$. Ist nämlich B_ν irgendein Element aus $\mathfrak{U}_\nu$, so wird, da die Automorphismen H_μ, H_ν, Θ normal sind,

$$B_\nu^{-1} \cdot A\, \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu \cdot B_\nu = B_\nu^{-1}\, \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu \cdot A\, \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu \cdot B_\nu\, \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu = A\, \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu,$$

woraus folgt, daß das Element $A\, \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu$, das wegen $A\, \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu = (A\, \mathsf{H} \Theta) \mathsf{H}_\nu$ jedenfalls in $\mathfrak{U}_\nu$ enthalten ist, sogar zum Zentrum von $\mathfrak{U}_\nu$, also auch zum Zentrum von $\mathfrak{G}$ gehört.

Für $\mu = l+1, l+2, \ldots, h$ ist auch $\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\mu \in \mathfrak{K}$, weil ja $\mathfrak{U}_{l+1}$, $\mathfrak{U}_{l+2}, \ldots, \mathfrak{U}_h$ gerade die abelschen Faktoren der Zerlegung (I) sein sollten [siehe (III)].

Einer genaueren Diskussion bedarf nur noch der Fall $\mu = \nu \leqq l$, dessen Erledigung sich aber sofort aus Hilfssatz 3 ergibt. Nach diesem Satz ist nämlich $\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\mu$ für $\mu \leqq l$ entweder von der Form $\mathsf{H}_\mu + \mathsf{K}_\mu$ oder von der Form $\mathsf{P}_0 + \mathsf{K}_\mu$, wobei K_μ ein gewisses Element des Ringes $\mathfrak{K}$ bedeutet. Der erste oder der zweite der beiden genannten Fälle liegt vor, je nach dem, ob der durch die Zuordnungsvorschrift

$$\{A_\mu \to A_\mu\, \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu\} = \Theta^{(\mu)}, \quad A_\mu \in \mathfrak{U}_\mu$$

definierte Automorphismus von $\mathfrak{U}_\mu$ eigentlich oder uneigentlich ist. Denn im ersten Fall ist nach Hilfssatz 3: $\Theta^{(\mu)} = \mathsf{P}_1^{(\mu)} + \mathsf{K}^{(\mu)}$, im zweiten $\Theta^{(\mu)} = \mathsf{P}_0^{(\mu)} + \mathsf{K}^{(\mu)}$, wenn mit $\mathsf{P}_1^{(\mu)}$ der identische, mit $\mathsf{P}_0^{(\mu)}$ der Nullautomorphismus von $\mathfrak{U}_\mu$ bezeichnet wird und $\mathsf{K}^{(\mu)}$ einen ins Zentrum abbildenden Automorphismus von $\mathfrak{U}_\mu$ bedeutet. Nun ist in leicht verständlicher Schreibweise $\mathsf{H}_\mu \Theta^{(\mu)} = \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\mu$, $\mathsf{H}_\mu \mathsf{P}_1^{(\mu)} = \mathsf{H}_\mu = \mathsf{P}_1 \mathsf{H}_\mu$ und $\mathsf{H}_\mu \mathsf{P}_0^{(\mu)} = \mathsf{P}_0 = \mathsf{P}_0 \mathsf{H}_\mu$, also $\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\mu = \mathsf{P}_1 \mathsf{H}_\mu + \mathsf{K}_\mu$ bzw. $= \mathsf{P}_0 \mathsf{H}_\mu + \mathsf{K}_\mu$, wenn $\mathsf{H}_\mu \mathsf{K}^{(\mu)} = \mathsf{K}_\mu$ gesetzt wird. Faßt man beide Fälle in eine Gleichung $\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\mu = \mathsf{P}_{\alpha_\mu} \mathsf{H}_\mu + \mathsf{K}_\mu$ zusammen und setzt man schließlich noch

$$\sum_{\mu \neq \nu} \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu + \sum_{\mu > l} \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\mu + \sum_{\mu \leqq l} \mathsf{K}_\mu = \mathsf{K} \in \mathfrak{K},$$

so ergibt sich nach (3)

$$\Theta = \mathsf{K} + \sum_{\mu=1}^{l} \mathsf{P}_{\alpha_\mu} \mathsf{H}_\mu,$$

womit zunächst die Möglichkeit der in Hilfssatz 3 behaupteten Darstellung nachgewiesen ist.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit dieser Darstellung zu beweisen: Sind

$$\Theta = \mathsf{K} + \sum_{\mu=1}^{l} \mathsf{P}_{\alpha_\mu} \mathsf{H}_\mu = \mathsf{K}' + \sum_{\mu=1}^{l} \mathsf{P}_{\beta_\mu} \mathsf{H}_\mu$$

zwei Darstellungen im Sinne des Hilfssatzes 3, so gilt für $0 < \mu \leqq l$

$$\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\mu = \mathsf{P}_{\alpha_\mu} \mathsf{H}_\mu + \mathsf{H}_\mu \mathsf{K} \mathsf{H}_\mu = \mathsf{P}_{\beta_\mu} \mathsf{H}_\mu + \mathsf{H}_\mu \mathsf{K}' \mathsf{H}_\mu,$$

woraus auf Grund der Eindeutigkeitsaussage des Hilfssatzes 3, die auf

den Automorphismus $\Theta^{(\mu)}$ von $\mathfrak{U}_\mu$ (siehe oben) anzuwenden ist, sofort $\mathsf{P}_{\alpha_\mu} = \mathsf{P}_{\beta_\mu}$, hieraus weiter $\sum_{\mu=1}^{l} \mathsf{P}_{\alpha_\mu} \mathsf{H}_\mu = \sum_{\mu=1}^{l} \mathsf{P}_{\beta_\mu} \mathsf{H}_\mu$ und schließlich $\mathsf{K} = \mathsf{K}'$ folgt.

Aus Hilfssatz 4 erhält man jetzt unmittelbar

Satz 3b: *Der Restklassenbereich* $\mathfrak{A}/\mathfrak{K} = \overline{\mathfrak{A}}$ *zerfällt in die direkte Summe*[9]) *der* l *zweiseitigen Ideale* $\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathsf{H}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathsf{H}}_l$, *von denen* $\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathsf{H}}_\lambda$ *nur aus den beiden Elementen* $\overline{\mathsf{P}}_0, \overline{\mathsf{H}}_\lambda$ *besteht, für welche*

$$\overline{\mathsf{P}}_0 \cdot \overline{\mathsf{P}}_0 = \overline{\mathsf{P}}_0 \cdot \overline{\mathsf{H}}_\lambda = \overline{\mathsf{H}}_\lambda \cdot \overline{\mathsf{P}}_0 = \overline{\mathsf{P}}_0, \quad \overline{\mathsf{H}}_\lambda \cdot \overline{\mathsf{H}}_\lambda = \overline{\mathsf{H}}_\lambda$$

und

$$\overline{\mathsf{P}}_0 + \overline{\mathsf{P}}_0 = \overline{\mathsf{P}}_0, \quad \overline{\mathsf{P}}_0 + \overline{\mathsf{H}}_\lambda = \overline{\mathsf{H}}_\lambda + \overline{\mathsf{P}}_0 = \overline{\mathsf{H}}_\lambda$$

gilt, während $\overline{\mathsf{H}}_\lambda$ *zu* $\overline{\mathsf{H}}_\lambda$ *nicht addierbar ist.* (Unter $\overline{\mathsf{P}}_0$, $\overline{\mathsf{H}}_\lambda$ sind natürlich die von P_0, H_λ [siehe oben] modulo $\mathfrak{K}$ erzeugten Restklassen zu verstehen.) *Elemente, die verschiedenen Idealen der Serie* $\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathsf{H}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathsf{H}}_l$ *angehören, sind stets addierbar, so daß* $\overline{\mathfrak{A}}$ *aus endlich vielen, und zwar aus genau* 2^l *Elementen besteht.* (Die Bedeutung der natürlichen Zahl l ist den Formeln (I) und (II) zu entnehmen!)

Korollar: $\mathfrak{A}$ *enthält einen zu* $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ *isomorphen Teilbereich, der aus den* 2^l *Summen* $\Sigma \mathsf{P}_{\alpha_\lambda} \mathsf{H}_\lambda$ $(\alpha_\lambda = 0, 1)$ *besteht.*

§ 4.

Satz 4: *Nach F,* § 16, Satz 11 *enthält der Automorphismenbereich* $\mathfrak{A}$ *ein zweiseitiges Ideal* $\mathfrak{C}$, *das einerseits alle nilpotenten*[10]) *Ideale von* $\mathfrak{A}$ *umfaßt, andererseits selber nilpotent ist. Dieses Ideal* $\mathfrak{C}$, *das Radikal des Bereichs* $\mathfrak{A}$, *ist eine Teilmenge und daher auch zweiseitiges Ideal von* $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{C}$ *ist sogar das Radikal (maximale nilpotente Ideal) des Ringes* $\mathfrak{K}$.

Beweis: Daß $\mathfrak{C}$ Teilmenge von $\mathfrak{K}$ sein muß, folgt ohne weiteres aus Hilfssatz 2, da $\mathfrak{C}$ aus lauter nilpotenten, normalen Automorphismen besteht. Zu zeigen ist daher nur, daß $\mathfrak{C}$ zugleich das Radikal von $\mathfrak{K}$ ist, d. h. einerseits nilpotent ist (was keines weiteren Beweises bedarf), andererseits alle nilpotenten Ideale des Ringes $\mathfrak{K}$ enthält. Dies letztere ergibt sich nun folgendermaßen:

[9]) Ein Bereich $\mathfrak{B}$ ist „*direkte Summe*" der links- (bzw. rechts-) seitigen Ideale $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_n$ (bzw. $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$), wenn jedes Element x aus $\mathfrak{B}$ sich *eindeutig* als Summe von der Gestalt $x = x_1 + \ldots + x_n$ mit $x_i \in \mathfrak{L}_i$ (bzw. $\in \mathfrak{R}_i$) darstellen läßt.

[10]) Eine beliebige Menge von Elementen eines Bereiches heißt „*nilpotent*", wenn für ein hinreichend großes s *jedes* Produkt aus s Elementen der Menge verschwindet.

$\mathfrak{J}$ sei ein nilpotentes Ideal von $\mathfrak{R}$, und zwar $\mathfrak{J}^n = \mathsf{P}_0$. Es ist dann $\mathfrak{J} \subseteqq \mathfrak{R}$ und daher nach Satz 2 auch $\mathfrak{A}\mathfrak{J}\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{R}$[11]). Ist $\mathfrak{J}$ Linksideal von $\mathfrak{R}$, so folgt weiter $\mathfrak{A}\mathfrak{J}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{J} \subseteqq \mathfrak{J}$, $(\mathfrak{A}\mathfrak{J}\mathfrak{A}\mathfrak{J})^n = \mathsf{P}_0$, so daß in der Menge $\mathfrak{A}\mathfrak{J}$ *jedes* Produkt aus $2n$ Elementen verschwindet. $\mathfrak{A}\mathfrak{J}$ ist daher nilpotent. Nun ist $\mathfrak{A}\mathfrak{J}$ überdies ein Linksideal des Bereichs $\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{J} \subseteqq \mathfrak{A}\mathfrak{J} \subseteqq \mathfrak{C}$. Ist $\mathfrak{J}$ Rechtsideal, so schließt man genau so, nur daß man an Stelle der Linksideale $\mathfrak{A}\mathfrak{J}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{J}\mathfrak{A}\mathfrak{J}$ die entsprechend definierten Rechtsideale $\mathfrak{J}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{J}\mathfrak{A}\mathfrak{J}\mathfrak{A}$ zu betrachten hat.

Bemerkung: Der wesentliche Inhalt des Satzes 4 gilt auch dann, wenn in $\mathfrak{G}$ die Doppelkettenbedingung *nicht* erfüllt ist. Nennt man ein Element Φ des Ringes $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{A}$ (bzw. in $\mathfrak{R}$) eigentlich nilpotent, wenn jede Summe aus endlich vielen Gliedern von der Form $\Theta\cdot\Phi\cdot\Theta'$ mit $\Theta \in \mathfrak{A}$, $\Theta' \in \mathfrak{A}$ (bzw. von der Form $\mathsf{K}\cdot\Phi\cdot\mathsf{K}'$ mit $\mathsf{K} \in \mathfrak{R}$, $\mathsf{K}' \in \mathfrak{R}$) nilpotent ist, und versteht man unter dem Radikal von $\mathfrak{A}$ (bzw. von $\mathfrak{R}$) die Menge $\mathfrak{C}$ (bzw. $\mathfrak{C}'$) aller in $\mathfrak{A}$ (bzw. in $\mathfrak{R}$) eigentlich nilpotenten Elemente, so besagt die Behauptung, die dem Satz 4 im allgemeinen Fall entspricht, *daß das Radikal $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ wieder mit dem Radikal $\mathfrak{C}'$ von $\mathfrak{R}$ übereinstimmt.* Jedenfalls ist $\mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{C}'$. Es sei nun Φ' irgendein Element aus $\mathfrak{C}'$ und Ψ eine Summe aus endlich vielen Gliedern von der Form $\Theta\Phi'\Theta'$ mit $\Theta \in \mathfrak{A}$, $\Theta' \in \mathfrak{A}$. Ψ^3 ist dann eine Summe endlich vieler Glieder von der Gestalt $\Theta_1\Phi'\Theta'_1\Theta_2\Phi'\Theta'_2\Theta_3\Phi'\Theta'_3$ mit $\Theta_i \in \mathfrak{A}$, $\Theta'_i \in \mathfrak{A}$. Nach Satz 2 ist $\Theta_1\Phi'\Theta'_1\Theta_2 \in \mathfrak{R}$, $\Theta'_2\Theta_3\Phi'\Theta'_3 \in \mathfrak{R}$, also Ψ^3 und damit auch Ψ nilpotent, woraus $\Phi' \in \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$ und mit $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}'$ zusammen schließlich $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$ folgt. — Übrigens ist das Radikal $\mathfrak{C}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{A}$ (also auch von $\mathfrak{R}$); denn 1. gilt für $\Phi \in \mathfrak{C}$, $\Theta \in \mathfrak{A} : \Theta\Phi \in \mathfrak{C}$, $\Phi\Theta \in \mathfrak{C}$, 2. ist die Summe zweier Elemente Φ und Ψ aus $\mathfrak{C}$ jedenfalls nilpotent, da die Gleichung $(\Phi + \Psi)^n = \Phi^n + \Psi_n$ besteht, in der Ψ_n eine Summe endlich vieler Glieder von der Form $\Theta\Psi\Theta'$ mit $\Theta \in \mathfrak{A}$, $\Theta' \in \mathfrak{A}$ bedeutet und daher nilpotent ist, so daß für hinreichend große natürliche Zahlen n und m: $[(\Phi + \Psi)^n]^m = (\Phi^n + \Psi_n)^m = (\Psi_n)^m = \mathsf{P}_0$ gilt, 3. folgt aus 1. und 2., daß $\Phi + \Psi$ sogar eigentlich nilpotent sein muß. Durch 1. und 3. wird aber $\mathfrak{C}$ als zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{A}$ charakterisiert. *Wegen des Hilfssatzes 2* (der natürlich unabhängig von der Doppelkettenbedingung gilt) *ist das Radikal $\mathfrak{C}$ gleichzeitig im Automorphismenbereich $\mathfrak{A}$ und im Ring $\mathfrak{R}$ das maximale, zweiseitige Ideal, das aus lauter nilpotenten Elementen besteht.*

---

[11]) Unter $\mathfrak{A}\mathfrak{J}$ (bzw. $\mathfrak{A}\mathfrak{J}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{J}\mathfrak{A}\mathfrak{J}$) werde die Menge aller Summen aus je endlich vielen Gliedern von der Gestalt $\Theta\Phi$ (bzw. $\Theta\Phi\Theta'$, $\Theta\Phi\Theta'\Phi'$) verstanden; Θ, Θ' sind dabei Elemente aus $\mathfrak{A}$ und Φ, Φ' Elemente aus $\mathfrak{J}$. Um die Addierbarkeitsbedingungen braucht man sich nicht zu kümmern, da die Elemente $\Theta\Phi$, $\Theta\Phi\Theta'$, $\Theta\Phi\Theta'\Phi'$ nach Satz 2 alle zu $\mathfrak{R}$ gehören.

§ 5.

Satz 5: *Der Restklassenring* $\mathfrak{R}/\mathfrak{C}$ *ist vollständig reduzibel* (halbeinfach): *Ist* $\mathfrak{U}_{r_1}, \ldots, \mathfrak{U}_{r_t}$ *ein vollständiges Repräsentantensystem für die (maximalen) Klassen untereinander isomorpher Gruppen, in welche die abelschen Faktoren* (III) *der Zerlegung* (I) *zerfallen* (so daß jedes kommutative $\mathfrak{U}$ mit genau einem $\mathfrak{U}_{r_\tau}$ isomorph ist) *und ist weiter* g_τ *die Anzahl der* $\mathfrak{U}$ *in der durch* $\mathfrak{U}_{r_\tau}$ *repräsentierten Klasse* (d. h. die Anzahl der mit $\mathfrak{U}_{r_\tau}$ isomorphen $\mathfrak{U}_i$), *so ist* $\mathfrak{R}/\mathfrak{C}$ *direkte Summe vollständiger Matrizenringe bzw. über den Restklassenringen* $\mathfrak{A}_\tau/\mathfrak{C}_\tau$ *und bzw. vom Grade* g_τ. $\mathfrak{A}_\tau$ *bedeutet dabei den Automorphismenring von* $\mathfrak{U}_{r_\tau}$ *und* $\mathfrak{C}_\tau$ *das Radikal dieses Ringes. Nach F,* § 14, Satz 8, *ist* $\mathfrak{A}_\tau/\mathfrak{C}_\tau$ *ein Schiefkörper.*

Beweis: Man erhält Satz 5 unmittelbar, wenn man in der Darstellung des Ringes $\mathfrak{R}$, die von der im Sinne von F, § 15 aus (I) hervorgehenden Darstellung

$$(\mathfrak{D}) \quad \Theta \rightleftarrows \begin{pmatrix} \Lambda_1'\Theta_{11}\Lambda_1 \ldots & . & \ldots \Lambda_1'\Theta_{1h}\Lambda_h \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & \ldots \Lambda_\mu'\Theta_{\mu\nu}\Lambda_\nu \ldots & . \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_h'\Theta_{h1}\Lambda_1 \ldots & . & \ldots \Lambda_h'\Theta_{hh}\Lambda_h \end{pmatrix} \quad \text{(vgl. hierzu } F\text{, §15, Satz 10b)}$$

des Bereichs $\mathfrak{A}$ induziert wird, sowohl Θ wie jeden Koeffizienten $\Lambda_\mu\Theta_{\mu\nu}\Lambda_\nu$ der darstellenden Matrizen durch die von Θ (bzw. von $\Lambda_\mu'\Theta_{\mu\nu}\Lambda_\nu$) modulo $\mathfrak{C}$ erzeugte Restklasse ersetzt.

Auf Grund des Satzes 5 lassen sich in $\mathfrak{R}$ die von Herrn Köthe, a. a. O. (vgl. Fußnote [9])) bewiesenen Sätze anwenden, die noch weitere Aussagen über die Struktur von $\mathfrak{R}$ ermöglichen, worauf hier aber nicht näher eingegangen werden soll.

Genau wie Satz 5 beweist man schließlich noch

Satz 6. *Der Restklassenbereich* $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ [12]) *zerfällt in die direkte Summe* (siehe Fußnote [9])) *von zwei zweiseitigen Idealen, von denen das eine — als Bereich aufgefaßt — mit* $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$, *das andere mit* $\mathfrak{R}/\mathfrak{C}$ *isomorph ist; ein Element des einen Ideals ist zu jedem des anderen addierbar.*

§ 6.

Satz 7. *Der Automorphismenbereich* $\mathfrak{A}$ *läßt sich in einen Ring* $\mathfrak{N}$ *einbetten, in dem das zweiseitige Ideal* $\mathfrak{R}$ *von* $\mathfrak{A}$ *ebenfalls zweiseitiges Ideal ist.* $\mathfrak{A}$ *ist vom Typus der Bereiche* $\mathfrak{a}$, *die durch das in der Einleitung*

---

[12]) $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ läßt sich — genau wie $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ — in gewohnter Weise definieren, da $\mathfrak{C}$ auch in $\mathfrak{A}$ zweiseitig ist und wegen $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{R}$ nur aus solchen Elementen besteht, die zu allen Elementen von $\mathfrak{A}$ addierbar sind.

angegebene Beispiel charakterisiert wurden, $\mathfrak{R}$ spielt dabei die Rolle des Ringes $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{K}$ die Rolle des zweiseitigen Ideals $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{r}$ und das System der in Hilfssatz 3 definierten Automorphismen $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_l$ *die Rolle des Systems der „orthogonalen“ Elemente* $\eta_1, \ldots, \eta_l$.

Beweis: Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller rein formal gebildeten Komplexe von der Form

$$V = (n_1 \mathsf{H}_1, n_2 \mathsf{H}_2, \ldots, n_l \mathsf{H}_l, \mathsf{K}),$$

bei denen jede der Zahlen $n_1, \ldots, n_l$ unabhängig von den übrigen alle ganzen rationalen Zahlen und K alle Elemente des Ringes $\mathfrak{K}$ durchläuft. Zwei Komplexe

$$V = (n_1 \mathsf{H}_1, \ldots, n_l \mathsf{H}_l, \mathsf{K})$$

und

$$V' = (n_1' \mathsf{H}_1, \ldots, n_l' \mathsf{H}_l, \mathsf{K}')$$

sollen gleich genannt werden, wenn $n_i = n_i'$ $(i = 1, \ldots, l)$, $\mathsf{K} = \mathsf{K}'$ gilt. Definiert man Summe, Differenz und Produkt zweier Komplexe

$$V_1 = (n_1^{(1)} \mathsf{H}_1, \ldots, n_l^{(1)} \mathsf{H}_l, \mathsf{K}_1)$$

und

$$V_2 = (n_1^{(2)} \mathsf{H}_1, \ldots, n_l^{(2)} \mathsf{H}_l, \mathsf{K}_2)$$

durch die Gleichungen

$$V_1 \pm V_2 = ((n_1^{(1)} \pm n_1^{(2)}) \mathsf{H}_1, \ldots, (n_l^{(1)} \pm n_l^{(2)}) \mathsf{H}_l, (\mathsf{K}_1 \pm \mathsf{K}_2))$$

$$V_1 \cdot V_2 = (n_1^{(1)} n_1^{(2)} \mathsf{H}_1, \ldots, n_l^{(1)} n_l^{(2)} \mathsf{H}_l, \mathsf{K}_1 \mathsf{K}_2 + \sum_{i=1}^{l} n_i^{(1)} \mathsf{H}_i \mathsf{K}_2 + n_i^{(2)} \mathsf{H}_i \mathsf{K}_1),$$

so wird $\mathfrak{M}$ — wie man leicht nachrechnet — zu einem Ring.

Neben $\mathfrak{M}$ wird nun noch eine zweite Menge, die Gesamtheit $\mathfrak{N}$ aller Abbildungen

$$\mathsf{Z} = \{A \to (A\,\mathsf{H}_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (A\,\mathsf{H}_l)^{n_l} \cdot A\,\mathsf{K}\}$$

betrachtet, bei denen A alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft und $n_1, n_2, \ldots, n_l, \mathsf{K}$ dieselbe Bedeutung haben wie in den Komplexen V. Diese Abbildungen sind selbstverständlich im allgemeinen *keine* Automorphismen. Das Bild des Elements A bei der Abbildung Z werde aber trotzdem genau wie bei Automorphismen mit $A\,\mathsf{Z}$ bezeichnet. Zwei Abbildungen Z, Z' aus $\mathfrak{N}$ sind natürlich als gleich anzusehen, wenn $A\,\mathsf{Z}$ für jedes $A \in \mathfrak{G}$ mit $A\,\mathsf{Z}'$ identisch ist, d. h. wenn die Bilder eines jeden Elements aus $\mathfrak{G}$ übereinstimmen. Unter Summe, Differenz und Produkt zweier Abbildungen Z_1 und Z_2 aus $\mathfrak{N}$ werde die durch Z_1 und Z_2 eindeutig bestimmte, wieder zu $\mathfrak{N}$ gehörige Zuordnung

$$\mathsf{Z}_1 + \mathsf{Z}_2 = \{A \to A\,\mathsf{Z}_1 \cdot A\,\mathsf{Z}_2\}$$

bzw.

$$\mathsf{Z}_1 - \mathsf{Z}_2 = \{A \to (A\,\mathsf{Z}_1)(A\,\mathsf{Z}_2)^{-1}\}$$

bzw.

$$Z_1 \cdot Z_2 = \{A \to (A Z_1) Z_2\}$$

verstanden. Ordnet man nun jedem Komplex $V = (n_1 H_1, \ldots, n_l H_l, K)$ aus $\mathfrak{M}$ die mit denselben n_i und demselben K gebildete Abbildung

$$Z = \{A \to (A H_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (A H_l)^{n_l} \cdot A K\}$$

aus $\mathfrak{R}$ zu, so ergibt eine einfache Rechnung, daß der Summe, Differenz und dem Produkt zweier V die Summe, Differenz und das Produkt der entsprechenden Z zugewiesen ist, woraus sofort folgt, daß $\mathfrak{R}$ ebenfalls ein Ring (und zwar ein zu $\mathfrak{M}$ homomorpher Ring) sein muß.

Nach Hilfsatz 4 ist jeder normale Automorphismus von Θ eine Summe von der Form

$$K + \sum_{\mu=1}^{l} P_{a_\mu} H_\mu = \Theta = \{A \to (A H_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (A H_l)^{a_l} \cdot A K\},$$

wo die Zahlen a_μ auf 0 und 1 beschränkt bleiben. Es ist also $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{R}$. Da nun — wie man unmittelbar einsieht — die Menge $\mathfrak{K}$ nicht nur im Automorphismenreich $\mathfrak{A}$ (siehe Satz 4), sondern auch im Ring $\mathfrak{R}$ ein zweiseitiges Ideal ist, bilden die normalen Automorphismen Θ auch bei der in $\mathfrak{R}$ definierten Addition, Subtraktion und Multiplikation einen Bereich und zwar einen solchen vom Typus der Bereiche $\mathfrak{a}$ des in der Einleitung angegebenen Beispiels, falls n normale Automorphismen

$$\Theta_\nu = \{A \to (A H_1)^{\alpha_1^{(\nu)}} \cdot \ldots \cdot (A H_l)^{\alpha_l^{(\nu)}} \cdot A K_\nu\} \qquad \nu = 1, \ldots, n, \quad \alpha_\lambda^{(\nu)} = 0, 1$$

addierbar genannt werden, wenn in jeder Spalte der Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \ldots & . & \ldots \alpha_l^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & \ldots \alpha_\lambda^{(\nu)} \ldots & . \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{(n)} \ldots & . & \ldots \alpha_l^{(n)} \end{pmatrix}$$

höchstens einmal eine Eins, sonst überall nur Null vorkommt. Da sich diese Addierbarkeitsbedingung aber offensichtlich mit der in der Fußnote [4]) angegebenen Bedingung für die Addierbarkeit normaler Automorphismen als äquivalent erweist, ist hiermit der Satz bewiesen.

(Eingegangen am 17. 8. 1936.)

Die Teilräume eines linearen Koordinatenraumes.

Von

Gottfried Köthe in Münster (Westf.).

Für eine Theorie der Auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten ist in einer früheren Arbeit von O. Toeplitz und mir[1]) der Grund gelegt worden. Die vollkommenen Koordinatenräume wurden als diejenigen linearen Räume erkannt, in denen eine solche Theorie sich erfolgreich durchführen zu lassen verspricht. Die vorliegende Arbeit will einen weiteren vorbereitenden Schritt zu dieser Auflösungstheorie vollziehen: Sie untersucht die linearen Teilräume eines gegebenen vollkommenen Raumes λ und ihre Invarianten bei umkehrbar stetigen linearen Transformationen von λ in sich.

Im n-dimensionalen Raum, d. h. für die Theorie von n Gleichungen mit n Unbekannten, stellt diese Typeneinteilung der linearen Teilräume nach umkehrbaren Transformationen des Raumes in sich den eigentlichen Kern der Auflösungstheorie dar. Man beweist die Tatsachen dieser Theorie zwar meist mit Hilfe der Determinanten, am klarsten und einfachsten wird ihre Ableitung aber, wenn man davon ausgeht, daß jeder lineare Teilraum des n-dimensionalen Raumes λ in einen der Form $x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0$ transformiert werden kann und daß seine Dimension r seine einzige Invariante ist.

Ist nämlich ein lineares Gleichungssystem mit der n-reihigen Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$ gegeben, so sind mit dieser unmittelbar vier lineare Teilräume verknüpft, zwei in λ, zwei in λ^*, dem zu λ dualen Raum: Erstens $\mu = \mathfrak{A}(\lambda)$, der Bildraum von λ bei der Transformation $\mathfrak{A}$, zweitens $\bar{\mu} = \mathfrak{A}'(\lambda^*)$, der Bildraum, in den λ^* durch $\mathfrak{A}'$, die zu $\mathfrak{A}$ transponierte Matrix, übergeführt wird, drittens der Teilraum η von λ, den die Lösungen der homogenen Gleichungen $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ bilden, und viertens der Teilraum $\bar{\eta}$ von λ^*, den die Lösungen der transponierten homogenen Gleichungen $\mathfrak{u}\mathfrak{A} = \mathfrak{o}$ bilden. Zwischen diesen vier Teilräumen ergeben sich zwei einfache Beziehungen, wenn man den Begriff des „Orthogonalraumes" einführt: Die Menge aller Stellen $\mathfrak{u}$ von λ^*, die zu allen Stellen $\mathfrak{x}$ eines linearen Teilraumes μ von λ in der Beziehung $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = 0$ stehen, bilden einen linearen Teilraum von λ^*, der als der **Orthogonalraum** $\bar{\mu}$ von μ bezeichnet werde.

[1]) Journal f. d. reine u. angew. Math. 171 (1934), S. 193—226, im folgenden als K. T. zitiert.

Zwischen den vier mit $\mathfrak{A}$ verknüpften linearen Räumen bestehen nun die Beziehungen $\tilde{\eta} = \bar{\mu}$, $\eta = \bar{\tilde{\mu}}$. Die beiden Bildräume μ und $\tilde{\mu}$ bestimmen also η, $\tilde{\eta}$ mit. Führt man nun μ und $\tilde{\mu}$ durch eineindeutige Transformation von λ bzw. λ^* in die oben angegebene Normalform über, so gehen alle vier Räume gleichzeitig in die Normalform über und eine einfache Überlegung liefert, daß dies so geschehen kann, daß $\mathfrak{A}$ dabei die Normalform

$$\mathfrak{E}_r = \begin{Vmatrix} 1 & . & . & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & 0 & . & 0 \end{Vmatrix}$$

annimmt, aus der sich alle Tatsachen der Auflösungstheorie unmittelbar ablesen lassen. Die Auflösungstheorie ist damit in der inhaltsreicheren Form gewonnen, daß jede Matrix $\mathfrak{A}$ einer Matrix $\mathfrak{E}_r$ äquivalent ist, d. h. man kann eindeutig umkehrbare Transformationen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ von λ in sich finden, so daß $\mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}_r$ wird, und zwei Matrizen $\mathfrak{E}_r$ nur dann äquivalent sind, wenn sie identisch sind.

Handelt es sich um einen unendlichdimensionalen Raum λ, so übertragen sich die eben gebrauchten Begriffe und die Beziehungen $\tilde{\eta} = \bar{\mu}$, $\eta = \bar{\tilde{\mu}}$ unmittelbar mit den in K. T. bereitgestellten Hilfsmitteln auf die vollkommenen Koordinatenräume λ. Wir nennen insbesondere zwei lineare Teilräume μ und ν von λ **kongruent**, wenn es eine umkehrbar stetige eineindeutige Transformation von λ in sich gibt, die μ in ν überführt, μ und ν heißen **ähnlich**, wenn μ und ν umkehrbar stetig und eineindeutig aufeinander bezogen werden können. Im n-dimensionalen Raum fallen die beiden Begriffe zusammen, ist λ unendlichdimensional, so brauchen ähnliche Teilräume keineswegs auch kongruent zu sein. Da diese beiden Begriffe die Grundlage dieser Arbeit bilden, sei hervorgehoben, daß die Ähnlichkeit von μ und ν nicht mit der in K. T. § 8 eingehend behandelten Homöomorphie verwechselt werden darf; denn bei der letzteren ist der Limesbegriff, auf den die Stetigkeit bezogen wird, bezüglich μ^* bzw. ν^* zu verstehen, während er bei der Ähnlichkeit und Kongruenz auf λ^* zu beziehen ist.

Das Problem, ein volles Typensystem unähnlicher linearer Teilräume von λ aufzustellen, scheint unübersehbar zu sein. Glücklicherweise ist es für die Gleichungstheorie nicht notwendig, es in voller Allgemeinheit anzugreifen. Denn uns interessieren ja nur solche Teilräume von λ, die Bildräume $\mathfrak{A}(\lambda)$ sind, und nicht jeder Teilraum braucht Bildraum zu sein. Der Fall des Raumes ω aller Stellen $(x_1, x_2, \ldots)$ mit komplexen Koordi-

naten zeigt dies bereits. Hier liegt die ganze Auflösungstheorie vor[2]), es besteht volle Analogie zur Algebra, insbesondere gilt, daß jeder Bildraum einem „Stückraum" kongruent ist, d. h. einem durch $x_{a_1} = 0$, $x_{a_2} = 0, \ldots$ gegebenen Teilraum. ω besitzt aber eine Fülle von Teilräumen, nämlich alle denkbaren Koordinatenräume, und es ist leicht einzusehen, daß die meisten von ihnen, z. B. alle von ω verschiedenen vollkommenen Räume, Stückräumen nicht ähnlich sind.

Das Problem der vorliegenden Arbeit ist also das Studium derjenigen linearen Teilräume μ eines vollkommenen Raumes λ, die Bildräume $\mathfrak{A}(\lambda)$ sind, ihre Kongruenz und Ähnlichkeit.

Wir stellen zu diesem Zweck eine Reihe von Invarianten auf, und zwar die folgenden:

1. Ist μ irgend ein linearer Teilraum λ und nimmt man zu μ alle Grenzstellen von konvergenten Teilfolgen aus μ hinzu, so entsteht wieder ein linearer Raum $\mu' \geqq \mu$. Dieser braucht keineswegs immer abgeschlossen zu sein, der Raum μ'', der aus μ' auf dieselbe Weise entsteht, kann also wiederum $> \mu'$ sein. Dieser Prozeß kann transfinit fortgesetzt werden. In den konvergenzfreien Räumen φ, ω, $\varphi + \omega$, $\omega\varphi$, ferner im Hilbertschen Raum σ_2 und allen anderen Hölder-Rieszschen Räumen σ_r, $r \geqq 1$, kommt dies allerdings nicht vor; hier ist jeder lineare Teilraum regulär, d. h. $\mu' = \mu''$. Aber bereits in $\varphi\omega$ wird es gelingen (§ 3) Teilräume anzugeben, für die die Ableitungen μ', μ'', ... bis zu irgend einem Index der zweiten Zahlklasse anwachsen. Dasselbe gilt für jeden konvergenzfreien Raum höherer als zweiter Stufe und für den Raum σ_∞ der beschränkten Folgen (§ 4)[3]).

Die erste Ordnungszahl α, für die $\mu^{(\alpha)} = \mu^{(\alpha+1)}$ ist, die Ableitungszahl von μ, ist eine Invariante von μ, ebenso die Dimensionen und der Typus der Differenzenräume $\mu' - \mu$, $\mu'' - \mu'$, ...

Ein Teilraum μ von λ heißt abgeschlossen, wenn die Grenzstellen aller konvergenten Teilfolgen aus μ in μ liegen. Auch die Abgeschlossenheit ist eine Invariante, sie bedeutet ja nichts anderes als $\mu' = \mu$, d. h. μ hat die Ableitungszahl 0. Die abgeschlossene Hülle $\mathring{\mu}$ eines Teilraumes μ ist gleich $\mu^{(\alpha)}$, wenn α die Ableitungszahl von μ ist.

2. Jeder Orthogonalraum $\bar{\mu}$ eines linearen Teilraumes μ von λ ist abgeschlossen. Der Orthogonalraum $\bar{\bar{\mu}}$ von $\bar{\mu}$ ist ein Teilraum von λ^{**}, also, da wir λ als vollkommen vorausgesetzt haben, auch ein Teilraum von λ. Man sieht sofort, daß $\bar{\bar{\mu}} \geqq \mu$ ist. Da $\bar{\bar{\mu}}$ als Orthogonalraum ab-

---

[2]) O. Toeplitz, Palermo Rendiconti 28 (1909), S. 88—96.

[3]) In einem nicht vollkommenen Funktionalraum hat bereits St. Banach ein solches Beispiel gebildet, vgl. das später als B. zitierte Buch „Théorie des opérations linéaires", Warschau 1932, S. 213.

geschlossen ist, entsteht die Frage, ob $\bar{\bar{\mu}}$ stets gleich $\hat{\mu}$ ist. In $\varphi\omega + \omega\varphi$ gelingt der Nachweis, daß dies nicht immer der Fall ist (§ 7). In Wahrheit besitzt nämlich jeder Orthogonalraum eine Eigenschaft, die schärfer ist als Abgeschlossenheit und die ich als Vollabgeschlossenheit bezeichne. Sie stützt sich auf die in K. T., Anm. [11]), S. 197 in λ eingeführte Topologie und verlangt, daß μ nicht nur alle Grenzstellen von konvergenten Folgen, sondern auch alle Häufungsstellen im Sinne der Topologie enthält (§ 5).

$\bar{\bar{\mu}}$ ist also vollabgeschlossen und es entsteht jetzt die Frage, ob $\bar{\bar{\mu}}$ stets die vollabgeschlossene Hülle von μ darstellt, oder anders ausgedrückt, ob für vollabgeschlossenes μ stets $\bar{\bar{\mu}} = \mu$ gilt. Daß dies der Fall ist, ist der Inhalt des „Orthogonalraumsatzes" (§ 6). Die Vollabgeschlossenheit stellt eine neue Invariante dar.

3. Ist μ ein linearer Teilraum von λ, so soll ν Komplementärraum von μ heißen, wenn jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ auf eine und nur eine Weise als Summe $\mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ einer Stelle $\mathfrak{y}$ aus μ und einer Stelle $\mathfrak{z}$ aus ν dargestellt werden kann, und wenn aus der Konvergenz von $\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{y}^{(n)} + \mathfrak{z}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ stets folgt, daß $\lim \mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{y}$, $\lim \mathfrak{z}^{(n)} = \mathfrak{z}$ ist[4]).

Besitzt μ einen Komplementärraum, so ist μ vollabgeschlossen (§ 6). In $\varphi\omega + \omega\varphi$ zeigt sich, daß die Umkehrung nicht zu gelten braucht (vgl. die anschließende Arbeit von E. Hagemann, § 7, Satz 4). Die Existenz eines Komplementärraumes ist daher wieder eine neue Invariante.

Die hier aufgestellten Invarianten ermöglichen ein tieferes Verständnis der bisher bekannten Auflösungstheorien.

In φ und ω ist jeder Teilraum regulär, ferner $\hat{\mu} = \bar{\bar{\mu}}$, d. h. abgeschlossen gleich vollabgeschlossen, und jeder abgeschlossene Teilraum hat einen Komplementärraum. Für Bildräume gilt darüber hinaus, daß jeder Bildraum abgeschlossen ist und als einzige Invariante seine Dimension hat. Aus diesem nicht schwer zu erkennenden Tatbestand ergibt sich die ganze Auflösungstheorie und diese Ableitung ist begrifflich einfacher als die von O. Toeplitz zuerst gegebene[2]).

Im halbfiniten Raum $\psi = \varphi + \omega$ ist ebenfalls jeder Teilraum regulär und jeder abgeschlossene Teilraum besitzt einen Komplementärraum. Aber nicht jeder Bildraum braucht abgeschlossen zu sein. Hier ergibt sich analog ein neuer Aufbau der Auflösungstheorie, der durchsichtiger und bedeutend einfacher ist als der frühere[5]). Das Auftreten nichtabgeschlossener

---

[4]) Vgl. F. Menn, Die konvergenzfreien linearen Räume endlicher Stufe und die dazugehörigen Matrizenringe, Diss. Münster 1934, § 2, Definition 1 oder G. Köthe, Math. Annalen **111** (1935), S. 229—258, § 5, Definition 1.

[5]) G. Köthe und O. Toeplitz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **165** (1931), S. 116—127.

Bildräume hat hier zur Folge, daß $\mathfrak{A}$ nicht stets einer Matrix $\mathfrak{E}_r$ äquivalent ist ($r = 1, 2, \ldots, \infty$), man kann nur erreichen, daß $\mathfrak{A}$ einer **solitären** Matrix äquivalent ist, d. h. einer Matrix, in deren Zeilen und Spalten höchstens je eine Nichtnull steht (die in ψ übrigens noch gleich 1 gewählt werden können).

In σ_2 gelten bezüglich der drei Invarianten dieselben Tatsachen wie in ψ, dementsprechend ist in σ_2, wie ich kürzlich bewies[6]), ebenfalls jede Matrix einer solitären äquivalent.

$\varphi\omega$ ist, wie oben bemerkt wurde, der erste konvergenzfreie Raum, in dem nichtreguläre Bildräume vorkommen. Es war mir schon länger bekannt, daß in $\varphi\omega$ nicht jede Matrix einer solitären äquivalent ist. Dafür ist jetzt der Grund klar geworden. Denn man sieht leicht ein, daß der Bildraum einer solitären Matrix stets regulär ist, eine Matrix, deren Bildraum nicht regulär ist, kann also keiner solitären äquivalent sein. Umgekehrt gilt, wie ich an anderer Stelle zeigen werde, daß in $\varphi\omega$ jede Matrix $\mathfrak{A}$, deren Bildraum $\mathfrak{A}(\varphi\omega)$ regulär ist, einer solitären äquivalent ist.

Da ich auch in σ_∞ nichtreguläre Bildräume nachgewiesen habe (§ 4), ergibt sich für die Auflösungstheorie in σ_∞, daß auch hier im Gegensatz zu σ_2 nicht jede Matrix einer solitären äquivalent ist.

Eine weitere Anwendung auf die Gleichungstheorie wird in der anschließenden Arbeit von E. Hagemann gemacht. Die Gleichheit bzw. Verschiedenheit der in 2. und 3. aufgeführten Invarianten spiegelt sich wieder in dem Kriterium für die Existenz einer linken Reziproken einer Matrix $\mathfrak{A}$, das wiederum in *den* Räumen seine einfachste Gestalt annimmt, in denen jeder abgeschlossene Teilraum einen Komplementärraum hat.

Die vorliegende Arbeit geht auf gemeinsame Überlegungen mit O. Toeplitz und E. Hagemann zurück, denen der Verfasser viele Anregungen und einige der Resultate verdankt.

§ 1.

Grenzstellensatz und starke Separabilität.

Es sei kurz an die wichtigsten Definitionen aus K. T. erinnert[7]).

Ein **linearer Koordinatenraum** λ enthält mit jeder Stelle $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, x_i komplex, alle Stellen $r\mathfrak{x}$, r beliebig komplex, und mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ stets ihre Summe $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$.

---

[6]) Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 153—162.

[7]) Wir setzen die dort entwickelten Begriffe und Sätze im übrigen als bekannt voraus, speziell § 1—6.

Der zu λ duale Raum λ^* enthält alle Stellen $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots)$, für die $\sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i$ stets absolut konvergiert, wenn $\mathfrak{x}$ irgendeine Stelle aus λ ist. λ heißt vollkommen, wenn $\lambda = \lambda^{**}$ ist.

Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ von Stellen aus λ heißt konvergent, wenn für jedes $\mathfrak{u}$ aus λ^* die Folge $\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i^{(n)}$ einen Limes hat $\mathfrak{x}^{(n)}$ hat den Limes oder die Grenzstelle $\mathfrak{x}$, wenn für alle $\mathfrak{u}$ aus λ^* $\lim \mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{u}\,\mathfrak{x}$ ist.

Eine Menge M von Stellen $\mathfrak{x}$ aus λ heißt beschränkt, wenn zu jedem $\mathfrak{u}$ aus λ^* ein $N(\mathfrak{u})$ existiert, so daß $|\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}| \leqq N(\mathfrak{u})$ ist für alle $\mathfrak{x}$ aus M.

Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ von Stellen aus λ heißt stark konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder beschränkten Menge U aus λ^* ein n gibt, so daß

$$\sup_{\mathfrak{u} \text{ aus } U} |\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| \leqq \varepsilon \text{ für alle } p, q \geqq n(\varepsilon, U)$$

ist. Analog ist der starke Limes erklärt.

Definition 1. *In dem vollkommenen Raum λ gilt der Grenzstellensatz, wenn jede beschränkte unendliche Menge von Stellen aus λ eine konvergente Teilfolge enthält.*

Satz 1. *In dem vollkommenen Raum λ gilt dann und nur dann der Grenzstellensatz, wenn jede beschränkte und in den einzelnen Koordinaten konvergente Folge von Stellen aus λ auch konvergiert.*

Beweis. a) In λ sei jede beschränkte und koordinatenweise konvergente Folge zugleich konvergent. M sei eine beschränkte unendliche Menge von Stellen aus λ. Dann sind auch die ersten Koordinaten aller Stellen aus M beschränkt (für $\mathfrak{u} = \mathfrak{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots)$ folgt dies unmittelbar aus der Definition der Beschränktheit). Es gibt also eine in der ersten Koordinate konvergente Folge von Stellen $\mathfrak{x}^{(1,1)}, \mathfrak{x}^{(1,2)}, \ldots$ aus M. Eine geeignete Teilfolge $\mathfrak{x}^{(2,1)}, \mathfrak{x}^{(2,2)}, \ldots$ ist auch in der zweiten Koordinate konvergent usf. Die Diagonalfolge $\mathfrak{x}^{(1,1)}, \mathfrak{x}^{(2,2)}, \ldots$ ist in allen Koordinaten konvergent und beschränkt, nach Voraussetzung also konvergent.

b) Sei der Grenzstellensatz in λ richtig. $\mathfrak{x}^{(n)}$ sei beschränkt und koordinatenweise konvergent. Wäre $\mathfrak{x}^{(n)}$ nicht konvergent, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und ein $\mathfrak{u}_0$ aus λ^*, ferner eine Folge von Indexpaaren n_i, m_i, so daß

$$(1) \qquad |\mathfrak{u}_0(\mathfrak{x}^{(n_i)} - \mathfrak{x}^{(m_i)})| \geqq \varepsilon$$

ist für $n_i, m_i \to \infty$. Nun ist die Folge $\mathfrak{x}^{(n_i)} - \mathfrak{x}^{(m_i)}$ aber ebenfalls beschränkt, nach dem Grenzstellensatz enthält sie also eine konvergente Teilfolge $\mathfrak{x}^{(n_j)} - \mathfrak{x}^{(m_j)}$. Der wegen der Vollständigkeit von λ (K. T. § 3) existierende

Limes dieser Folge muß aber $\mathfrak{o} = (0, 0, \ldots)$ sein, da die einzelnen Koordinaten gegen Null gehen. Also hätten wir von einem geeigneten j_0 ab

$$|\mathfrak{u}_0(\mathfrak{x}^{(n_j)} - \mathfrak{x}^{(m_j)})| < \varepsilon$$

im Widerspruch zu (1).

Definition 2. *Der vollkommene Raum λ heiße **stark separabel**, wenn es in λ eine abzählbare Menge R von Stellen gibt, so daß jede Stelle aus λ starker Limes einer Folge von Stellen aus R ist.*

Satz 2. *In dem vollkommenen Raum λ gilt dann und nur dann der Grenzstellensatz, wenn λ^* stark separabel ist.*

Satz 3. *In dem vollkommenen Raum λ gilt dann und nur dann der Grenzstellensatz, wenn in λ^* die Abschnitte $\mathfrak{u}_n = (u_1, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots)$ jeder Stelle $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots)$ stark gegen $\mathfrak{u}$ konvergieren.*

Beweis von Satz 2 und 3. a) *Aus der Gültigkeit des Grenzstellensatzes in λ folgt die starke Konvergenz der Abschnitte in λ^*.*

Die Abschnitte $\mathfrak{u}_n^{(0)}$ der Stelle $\mathfrak{u}^{(0)}$ seien nicht stark konvergent gegen $\mathfrak{u}^{(0)}$. Es gibt also eine beschränkte Menge X von Stellen aus λ und eine Folge von Indexpaaren $n_i, m_i, n_i > m_i, m_i \to \infty$, so daß für alle i $\sup\limits_{\mathfrak{x} \text{ aus } X} |\mathfrak{x}(\mathfrak{u}_{n_i}^{(0)} - \mathfrak{u}_{m_i}^{(0)})| \geqq \varepsilon$ bleibt. Zu jedem $\mathfrak{u}_{n_i}^{(0)} - \mathfrak{u}_{m_i}^{(0)}$ gibt es ein $\mathfrak{x}^{(i)}$ aus X mit $|\mathfrak{x}^{(i)}(\mathfrak{u}_{n_i}^{(0)} - \mathfrak{u}_{m_i}^{(0)})| \geqq \frac{\varepsilon}{2}$, $\mathfrak{y}^{(i)}$ sei die Stelle, die aus $\mathfrak{x}$ durch Nullsetzen der Koordinaten entsteht, die in $\mathfrak{u}_{n_i}^{(0)} - \mathfrak{u}_{m_i}^{(0)}$ Null sind. Die $\mathfrak{y}^{(i)}$ bilden eine beschränkte Menge (K. T. § 5, Satz 2), die koordinatenweise gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert. Jede konvergente Teilfolge der $\mathfrak{y}^{(i)}$ könnte also nur den Limes $\mathfrak{o}$ haben. Da aber $|\mathfrak{y}^{(i)}\mathfrak{u}^{(0)}| = |\mathfrak{y}^{(i)}(\mathfrak{u}_{n_i}^{(0)} - \mathfrak{u}_{m_i}^{(0)})| \geqq \frac{\varepsilon}{2}$ ist, gibt es keine solche Teilfolge im Widerspruch zum vorausgesetzten Grenzstellensatz.

b) *Aus der starken Konvergenz der Abschnitte in λ^* folgt die starke Separabilität von λ^*.*

R sei die Menge der finiten Stellen mit rationalen Koordinaten. *R* ist abzählbar. $\mathfrak{u}$ sei irgend eine Stelle aus λ^*. Zu $\mathfrak{u}_n$ bestimme man eine Stelle $\mathfrak{v}^{(n)}$ aus R, für die $|u_1 - v_1^{(n)}| \leqq \frac{|u_1|}{n}, \ldots, |u_n - v_n^{(n)}| \leqq \frac{|u_n|}{n}$, $v_{n+k}^{(n)} = 0$ ist. Dann ist für ein $\mathfrak{x}$ aus λ und genügend großes $n(\mathfrak{x})$

$$|(\mathfrak{u} - \mathfrak{v}^{(n)})\mathfrak{x}| \leqq |(\mathfrak{u} - \mathfrak{u}_n)\mathfrak{x}| + |(\mathfrak{u}_n - \mathfrak{v}^{(n)})\mathfrak{x}| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_1^\infty |x_p u_p| \leqq \varepsilon,$$

es ist also $\mathfrak{u} = \lim \mathfrak{v}^{(n)}$.

c) *Aus der starken Separabilität von λ^* folgt die Gültigkeit des Grenzstellensatzes in λ.*

$\mathfrak{u}^{(1)}, \mathfrak{u}^{(2)}, \ldots$ sei die abzählbare Teilmenge von Definition 2. N sei eine beschränkte Menge von Stellen aus λ. Es läßt sich durch das Diagonalverfahren aus N eine Teilfolge $\mathfrak{x}^{(p)}$ auswählen, so daß $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{u}^{(i)}\mathfrak{x}^{(n)}$ für alle i existiert, also

$$(2) \qquad |\mathfrak{u}^{(i)}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } p, q \geqq n(\varepsilon, i)$$

ist. Sei $\mathfrak{u}$ eine beliebige Stelle aus λ^*. $\mathfrak{u}$ ist starker Limes einer Teilfolge der $\mathfrak{u}^{(i)}$, sie heiße wieder $\mathfrak{u}^{(i)}$. Die Menge aller Differenzen $\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)}$, $p, q = 1, 2, \ldots$, ist beschränkt. Es läßt sich also ein i bestimmen, so daß $|(\mathfrak{u}-\mathfrak{u}^{(i)})(\mathfrak{x}^{(p)}-\mathfrak{x}^{(q)})| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ ist für alle p, q. Nach (2) kann man $n(\varepsilon, i)$ so bestimmen, daß für alle $p, q \geqq n(\varepsilon, i)$

$$|\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| \leqq |(\mathfrak{u} - \mathfrak{u}^{(i)})(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| + |\mathfrak{u}^{(i)}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ist. Die Folge $\mathfrak{x}^{(p)}$ ist also konvergent.

Zieht man K. T. § 12 bis § 14 heran, so ergibt sich aus Satz 3 mühelos, daß in allen Hölder-Rieszschen Räumen σ_r, $r > 1$, und in σ_∞ der Grenzstellensatz gilt, in σ_1 jedoch falsch ist.

Der Grenzstellensatz ist ferner in sämtlichen konvergenzfreien vollkommenen Räumen richtig, denn nach K. T. § 15 sind die dualen Räume auch konvergenzfrei; in jedem konvergenzfreien Raum fallen Konvergenz und starke Konvergenz zusammen, aus der in jedem vollkommenen Raum gültigen Konvergenz der Abschnitte einer Stelle $\mathfrak{x}$ gegen $\mathfrak{x}$ (K. T. § 3, Satz 2) ergibt sich also die Behauptung.

Definition 3. *Eine Funktion $u(\mathfrak{x})$, die jeder Stelle $\mathfrak{x}$ eines vollkommenen Raumes λ eine komplexe Zahl zuordnet, heißt eine **stark stetige Linearfunktion**, wenn sie die Linearitätseigenschaften $u(r\mathfrak{x}) = ru(\mathfrak{x})$, $u(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{x}) + u(\mathfrak{y})$ besitzt, und wenn aus der starken Konvergenz $\mathfrak{x}^{(n)} \Rightarrow \mathfrak{x}$ stets* $\lim u(\mathfrak{x}^{(n)}) = u(\mathfrak{x})$ *folgt.*

Ersetzt man die starke Konvergenz durch die gewöhnliche Konvergenz, so gilt, wie in K. T § 3, Satz 6 bewiesen wurde, daß jede solche stetige Linearfunktion durch eine Stelle $\mathfrak{u}$ aus λ^* vermittelt wird, $u(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$. Für stark stetige Linearfunktionen ist dies im allgemeinen nicht mehr richtig, z. B. in σ_∞ [8]), es gilt aber

Satz 4. *Ist λ ein stark separabler vollkommener Raum, so ist jede stark stetige Linearfunktion von λ auch stetig, wird also durch eine Stelle aus λ^* vermittelt.*

Beweis. Nach Satz 2 und 3 gilt $\mathfrak{x}_n \Rightarrow \mathfrak{x}$ für die Abschnitte jeder Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ. Ist $u(\mathfrak{x})$ stark stetig, so ist daher $u(\mathfrak{x}) = \lim u(\mathfrak{x}_n)$ $= \lim u(x_1 \mathfrak{e}_1 + \ldots + x_n \mathfrak{e}_n) = \sum_1^\infty x_n u(\mathfrak{e}_n)$. Mit $\mathfrak{x}$ liegt jede Stelle $\mathfrak{x}'$ mit $|x_i'| = |x_i|$ in λ, $\sum_1^\infty x_n u(\mathfrak{e}_n)$ ist also absolut konvergent, die Stelle $\mathfrak{u} = (u(\mathfrak{e}_1), u(\mathfrak{e}_2), \ldots)$ liegt in λ^*. Es ist $u(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$, die Linearfunktion $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ ist aber stetig.

---

[8]) Vgl. etwa F. Hausdorff, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 167 (1931), S. 305.

§ 2.

Die höheren Ableitungen von Mengen und Teilräumen.

Ist M eine Menge von Stellen eines vollkommenen Raumes λ, so zeigen schon einfache Beispiele, daß ein Limes von Limites von Stellen aus M nicht selbst Limes von Stellen aus M zu sein braucht.

Wir untersuchen die Verhältnisse in den symmetrischen Räumen. Ein vollkommener Raum heißt **symmetrisch** (K. T. § 14), wenn ihm mit jeder Stelle $\mathfrak{x}$ auch alle Stellen angehören, die durch eine Permutation der Koordinaten aus $\mathfrak{x}$ hervorgehen. φ und ω sind symmetrisch, alle σ_r sind es. Ein von φ und ω verschiedener symmetrischer vollkommener Raum σ liegt zwischen σ_1 und σ_∞, $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_\infty$ (K. T. § 14, Satz 2).

In σ_1 fallen Konvergenz und starke Konvergenz zusammen, es gibt in σ_1 sogar eine lineare Metrik, so daß $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}| \to 0$ gleichbedeutend ist (vgl. z. B. K. T. § 13, Satz 3). Bei metrischer Konvergenz ist aber jede Grenzstelle von Grenzstellen selbst wieder eine Grenzstelle[9]). Für ω wird dies in § 5 ebenfalls bewiesen werden.

ω und σ_1 sind die einzigen symmetrischen vollkommenen Räume, in denen jede Grenzstelle von Grenzstellen selbst Grenkstelle ist.

B e w e i s. σ sei vollkommen und symmetrisch. Da wir für φ weiter unten ein Gegenbeispiel angeben werden, können wir $\sigma_1 < \sigma \leqq \sigma_\infty$ annehmen. Da $\sigma_1^* = \sigma_\infty$, $\sigma_\infty^* = \sigma_1$ ist, folgt aus K. T. § 2, Satz 4 für den dualen Raum die Beziehung $\sigma_1 \leqq \sigma < \sigma_\infty$.

M sei die Menge der Stellen $\mathfrak{x}_{pq} = \mathfrak{e}_p + p\,\mathfrak{e}_{p+q}$, $p, q, = 1, 2, \ldots$. Da $\sigma^* \geqq \sigma_1 = \sigma_\infty^*$ ist, kann eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ von Stellen aus σ nur dann konvergieren, wenn $|x_i^{(n)}| \leqq M$ ist unabhängig von n, i. Eine Folge $\mathfrak{x}_{p_i q_i}$ ist also nur dann konvergent, wenn die p_i beschränkt bleiben, also nur bis auf endlich viele Glieder konstant sind. Ist aber $p_i = p$ und wächst q_i über alle Grenzen, so ist $\lim\limits_{i \to \infty} \mathfrak{x}_{p q_i} = \mathfrak{e}_p$, denn wegen $\sigma^* < \sigma_\infty$ bilden die Koordinaten jeder Stelle $\mathfrak{u}$ aus σ^* eine Nullfolge, also ist $\lim\limits_{q \to \infty} \mathfrak{u}\,\mathfrak{e}_{p+q} = \lim u_{p+q} = 0$, d. h. $\mathfrak{e}_{p+q}$ konvergiert gegen $\mathfrak{o}$. Weiter ist $\lim\limits_{p \to \infty} \mathfrak{e}_p = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}$ ist also Grenzstelle von Grenzstellen von M, aber nicht Grenzstelle.

---

[9]) Ist $\lim\limits_k \lim\limits_n \mathfrak{x}^{(k,n)} = \lim\limits_k \mathfrak{x}^{(k)} = \mathfrak{x}$, so gibt es zu jedem m, $m = 1, 2, \ldots$, ein $k(m)$ mit $|\mathfrak{x}^{(k)} - \mathfrak{x}| < \frac{1}{2m}$ und dazu ein $n(m)$ mit $|\mathfrak{x}^{(k,n)} - \mathfrak{x}^{(k)}| < \frac{1}{2m}$, also $|\mathfrak{x}^{(k,n)} - \mathfrak{x}| < \frac{1}{m}$, also ist $\mathfrak{x} = \lim\limits_m \mathfrak{x}^{(k,n)}$.

Definition 1. *M sei eine Menge von Stellen des vollkommenen Raumes λ, $\mathfrak{x}^{(n)}$ sei eine Folge von Elementen von M mit einer von allen $\mathfrak{x}^{(n)}$ verschiedenen Grenzstelle $\mathfrak{x}$. Als* erste Ableitung *M' von M bezeichnen wir die Menge aller dieser Grenzstellen.*

Für eine beliebige Ordnungszahl α werde die α-te Ableitung *$M^{(\alpha)}$ induktiv erklärt:*

a) *Ist α nicht Limeszahl, $\alpha = \beta + 1$, so sei $M^{(\alpha)}$ die erste Ableitung von $M^{(\beta)}$.*

b) *α sei Limeszahl, $\beta_n < \alpha$ sei irgendeine Folge von Ordnungszahlen mit dem Limes α. $M^{(\alpha)}$ bestehe aus allen Grenzstellen $\mathfrak{x}$ der Folgen $\mathfrak{x}^{(n)}$ mit $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus $M^{(\beta_n)}$ und $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{x}^{(n)}$.*

Wir bringen in φ noch ein Beispiel dafür, daß es zu jeder natürlichen Zahl n wirklich Mengen gibt, deren $(n+1)$-te Ableitung von der n-ten verschieden ist. Es kann leicht auf beliebige Zahlen der zweiten Zahlklasse ausgedehnt werden (vgl. auch § 3).

φ ist der Raum aller Stellen $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ mit nur endlichvielen $x_i \neq 0$. Der duale Raum ist ω, der Raum der Stellen $(x_1, x_2, \ldots)$ mit beliebigen komplexen Koordinaten.

Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ aus φ ist dann und nur dann konvergent, wenn $x_i^{(n)}$ für jedes i konvergiert und wenn ein i_0 existiert, so daß $x_i^{(n)} = 0$ ist für $i \geqq i_0$ und alle n (vgl. § 1, Satz 1 und K. T. § 15, Satz 3).

Die Menge M_n enthalte alle Stellen

$$\mathfrak{x}_{p_1,\ldots,p_n} = \mathfrak{e}_1 + \frac{1}{p_1}\mathfrak{e}_2 + \frac{1}{p_2}\mathfrak{e}_{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n}\mathfrak{e}_{p_{n-1}},$$

wobei $p_1, \ldots, p_n$ n elementefremde Folgen von natürlichen Zahlen > 2 durchlaufen. Es sei $\mathfrak{x}_{p_1^{(1)},\ldots,p_n^{(1)}}, \mathfrak{x}_{p_1^{(2)},\ldots,p_n^{(2)}}, \ldots$ konvergent. Die $p_1^{(i)}$ müssen beschränkt sein; $\mathfrak{x}_{p_1^{(i)},\ldots,p_n^{(i)}}$ hat nämlich als $p_1^{(i)}$-te Koordinate $\frac{1}{p_2^{(i)}} \neq 0$, die Indizes der Koordinaten $\neq 0$ haben aber eine obere Schranke. Durch Betrachtung der zweiten Koordinaten folgt weiter, daß $p_1^{(i)}$ sogar von einem i_1 ab konstant sein muß. Ebenso schließt man auf die Fastkonstanz von $p_2^{(i)}, \ldots, p_{n-1}^{(i)}$, nur $p_n^{(i)}$ kann über alle Grenzen gehen oder auch fastkonstant sein. Die zweite Möglichkeit kommt wegen der Bedingung $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{x}^{(n)}$ für die Bildung von M_n' nicht in Betracht, die erste liefert als Limes ein Element $\mathfrak{e}_1 + \frac{1}{p_1}\mathfrak{e}_2 + \ldots + \frac{1}{p_{n-1}}\mathfrak{e}_{p_{n-2}}$. Alle und nur diese Elemente sind daher in M_n', es ist $M_n' = M_{n-1}$. Mithin ist $M_n^{(n-1)} = M_1$, $M_n^{(n)}$ besteht aus dem einzigen Element $\mathfrak{e}_1$, $M_n^{(n+1)}$ ist schließlich die Nullmenge.

M sei nun ein linearer Teilraum μ von λ. Die Ableitungen $\mu^{(\alpha)}$ von μ sind wieder lineare Teilräume und es gilt

$$\mu \leqq \mu' \leqq \mu'' \leqq \cdots \leqq \mu^{(\omega)} \leqq \mu^{(\omega+1)} \leqq \cdots$$

In dieser transfiniten Folge muß einmal das Gleichheitszeichen auftreten, denn da λ nur kontinuumviele Elemente enthält und jedes $<$-Zeichen bedeutet, daß wenigstens ein Element neu hinzukommt, muß spätestens bei der Anfangszahl der auf die Mächtigkeit des Kontinuums folgenden Kardinalzahl das Gleichheitszeichen auftreten.

Definition 2. *Die kleinste Ordnungszahl α, für die $\mu^{(\alpha)} = \mu^{(\alpha+1)}$ ist, heiße die* **Ableitungszahl** *von μ. Ist $\mu' = \mu$, also die Ableitungszahl* 0, *so heiße μ* **abgeschlossen**. *Ist $\mu' = \mu''$, also die Ableitungszahl* 0 *oder* 1, *so heiße μ* **regulär**.

Mit $\hat{\mu}$ bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle von μ. Offenbar ist $\hat{\mu} = \mu^{(\alpha)}$, wenn α die Ableitungszahl von μ ist.

Aus der Tatsache, daß in λ nicht jeder Limes von Limites ein Limes ist, braucht nicht zu folgen, daß es nichtreguläre Teilräume gibt. So gilt z. B. in φ:

Jeder lineare Teilraum μ von φ ist abgeschlossen, also regulär.

Beweis. Man suche in μ eine Stelle $\mathfrak{a}_1 = (a_1^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}, 0, 0, \ldots)$ kleinster Länge n_1 auf, $\mathfrak{a}_2$ sei eine von der nächstkleineren usw. Die $\mathfrak{a}_i$ sind linear unabhängig und μ besteht aus allen endlichen Linearkombinationen der $\mathfrak{a}_i$. Ist $\mathfrak{b}^{(n)}$ eine konvergente Folge aus μ, so sind die Längen der $\mathfrak{b}^{(n)}$ unter einer festen Schranke, die $\mathfrak{b}^{(n)}$ haben also die Form $\mathfrak{b}^{(n)} = \sum_{i=1}^{M} b_i^{(n)} \mathfrak{a}_i$. Nun müssen die einzelnen Koordinaten der $\mathfrak{b}^{(n)}$ konvergieren, daraus folgt, daß $b_M^{(1)}, b_M^{(2)}, \ldots$ gegen ein b_M konvergiert, ebenso $b_{M-1}^{(1)}, b_{M-1}^{(2)}, \ldots$ gegen b_{M-1} usw. Die Grenzstelle der $\mathfrak{b}^{(n)}$ ist also $\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{M} b_i \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}$ liegt aber in μ.

In den beiden nächsten Paragraphen werden die Ableitungszahlen der Teilräume der konvergenzfreien und der metrischen vollkommenen Räume untersucht.

§ 4.

Die Ableitungen in konvergenzfreien Räumen.

In φ hat jeder Teilraum die Ableitungszahl 0. In ω gibt es Teilräume der Ableitungszahl 1, z. B. ist φ ein nichtabgeschlossener Teilraum von ω mit $\hat{\varphi} = \omega$. In ω und $\varphi + \omega$ ist aber jeder Teilraum regulär.

Wir verzichten auf einen Beweis dieser Tatsache, er kann nach dem Muster des jetzt für $\omega\varphi$ zu führenden Beweises gebildet werden.

Satz 1. *Jeder lineare Teilraum von $\omega\varphi$ ist regulär.*

Beweis. $\omega\varphi$ besteht aus allen Stellen

$$\mathfrak{x} = (x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, 0, 0, \ldots | x_{21}, \ldots, x_{2n_2}, 0, 0, \ldots | \ldots)$$

mit nur endlich vielen Nichtnullen in jeder Abteilung. Eine Folge von Stellen $\mathfrak{x}^{(n)}$ ist dann und nur dann konvergent, wenn sie koordinatenweise konvergiert und wenn zu jedem i ein N_i gehört, so daß $x_{ik}^{(n)} = 0$ ist für $k > N_i$ unabhängig von n [10]).

$\mathfrak{x}$ hat die Länge (i, k), wenn die i-te Abteilung die erste ist, in der eine von Null verschiedene Koordinate vorkommt und wenn k der größte Index einer Nichtnull in der i-ten Abteilung von $\mathfrak{x}$ ist.

(i, k) heiße kleiner wie (j, l), wenn entweder $i > j$ oder für $i = j$ $k < l$ ist.

Wählt man aus μ zu jeder vorkommenden Länge (p, q) eine Stelle $\mathfrak{a}_{pq}$ dieser Länge aus, so zeigt man, wie in § 6 der nachfolgenden Arbeit von E. Hagemann, daß jede Stelle aus μ als eventuell unendliche Summe

$$\mathfrak{x} = \sum_{p,q} a_{pq} \mathfrak{a}_{pq}$$

darstellbar ist; nur solche a_{pq} sind dabei von Null verschieden, deren zugehörige $\mathfrak{a}_{pq}$ kleinere Länge haben wie $\mathfrak{x}$, ferner sind bei festem p nur endlich viele $a_{pq} \neq 0$.

Nicht alle dieser Bedingung genügenden Stellen $\mathfrak{y} = \sum\limits_{p,q} b_{pq} \mathfrak{a}_{pq}$ brauchen in μ zu liegen. Alle diese Stellen $\mathfrak{y}$ gehören aber als Grenzstellen ihrer in μ liegenden Partialsummen zu μ'. Unser Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß bereits der Raum $\nu \leqq \mu'$ aller dieser $\mathfrak{y}$ abgeschlossen ist.

Sei $\mathfrak{y}^{(n)} = \sum b_{pq}^{(n)} \mathfrak{a}_{pq}$ konvergent. Es gibt dann zu jedem p ein $q_0(p)$, so daß $b_{pq}^{(n)} = 0$ ist für alle $q \geqq q_0(p)$. Ferner konvergieren die einzelnen Koordinaten der $\mathfrak{y}^{(n)}$. Sei $\mathfrak{a}_{p_1 q_1}$ das $\mathfrak{a}_{pq}$ größter Länge, das in einem der $\mathfrak{y}^{(n)}$ auftritt. Aus der Konvergenz der (p_1, q_1)-ten Koordinate von $\mathfrak{y}^{(n)}$ folgt, daß $\lim\limits_{n \to \infty} b_{p_1 q_1}^{(n)} = b_{p_1 q_1}$ existiert. Man schließt nun weiter, daß auch $\lim b_{p_1 q_1 - 1}^{(n)} = b_{p_1 q_1 - 1}, \ldots, \lim b_{p_1 1}^{(n)} = b_{p_1 1}$ existiert. Ist $\mathfrak{a}_{p_1+1 q_2}$ das $\mathfrak{a}_{p_1+1 q}$ größter Länge, das in einem der $\mathfrak{y}^{(n)}$ vorkommt, so folgt jetzt

[10]) Dies folgt aus § 1, Satz 1, und K. T., § 15, Satz 3.

die Konvergenz von $b^{(n)}_{p_1+1\,q_2}$ gegen eine Zahl $b_{p_1+1\,q_2}$ usw. Setzt man die übrigen b_{pq} Null, so wird also

$$\lim \mathfrak{y}^{(n)} = \sum_{p,q} b_{pq}\mathfrak{a}_{pq},$$

die Grenzstelle der Folge $\mathfrak{y}^{(n)}$ liegt in v, v ist abgeschlossen.

Satz 2. *In $\varphi\omega$ gibt es nichtreguläre Teilräume, deren Ableitungszahl eine beliebige Ordnungszahl der zweiten Zahlklasse ist.*

Beweis. 1. $\varphi\omega$ besteht aus allen Stellen

$$\mathfrak{x} = (x_{11}, x_{12}, \ldots | x_{21}, x_{22}, \ldots | \ldots | \ldots) = \sum_{i,k=1}^{\infty} x_{ik}\mathfrak{e}_{ik}$$

mit $x_{ik} = 0$ für $i \geqq i_0$, $k = 1, 2, \ldots$; $\mathfrak{e}_{ik}$ ist die Stelle, deren (i, k)-te Koordinate Eins ist, während die übrigen Koordinaten verschwinden.

Eine Folge von Stellen $\mathfrak{x}^{(n)} = \sum x^{(n)}_{ik}\mathfrak{e}_{ik}$ ist dann und nur dann konvergent, wenn sie koordinatenweise konvergiert und wenn es ein i_0 gibt, so daß $x^{(n)}_{ik} = 0$ ist für $i \geqq i_0$ und alle k und n[10]).

μ_2 sei der von allen endlichen Linearkombinationen der Stellen

$$\mathfrak{x}_{rs} = \mathfrak{e}_{11} + \mathfrak{e}_{1,r+1} + \mathfrak{e}_{r+1,s}, \qquad r, s = 1, 2, \ldots$$

gebildete lineare Teilraum von $\varphi\omega$. Eine Stelle $\mathfrak{x} = \sum a_{rs}\mathfrak{x}_{rs}$ aus μ hat offenbar die Gestalt

$$\mathfrak{x} = (\sum_r \sum_s a_{rs}, \sum_s a_{1s}, \sum_s a_{2s}, \ldots | a_{11}, a_{12}, \ldots | a_{21}, a_{22}, \ldots | \ldots).$$

Es sei nun $\mathfrak{x}^{(i)} = \sum a^{(i)}_{rs}\mathfrak{x}_{rs}$ konvergent. Aus den oben formulierten Konvergenzbedingungen ergibt sich sofort, daß die $a^{(i)}_{rs} = 0$ sein müssen für $r \geqq N$ unabhängig von i und s. Nur die ersten N Summen $\sum_s a^{(i)}_{rs}$ können daher von Null verschieden sein. Aus der koordinatenweisen Konvergenz ergibt sich ferner, daß $\lim_{i\to\infty} \sum_s a^{(i)}_{rs} = b_r$ existiert, und es ist der Limes der (1, 1)-ten Koordinate von $\mathfrak{x}^{(i)}$ gleich $b_1 + \ldots + b_N$. Die Folge $\mathfrak{x}^{(i)}$ hat also einen Limes der Form

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = (\sum_1^N b_i, b_1, \ldots, b_N, 0, 0, \ldots | \ldots | \ldots).$$

Die Stelle $\mathfrak{e}_{11}$ ist daher nicht Grenzstelle einer konvergenten Folge aus μ_2, $\mathfrak{e}_{11}$ liegt nicht in μ_2'. $\mathfrak{e}_{11}$ liegt aber in μ_2'', denn, wie man sofort bestätigt, ist $\lim_{s\to\infty} \mathfrak{e}_{rs} = \mathfrak{e}_{11} + \mathfrak{e}_{1r+1}$, die Folge $\mathfrak{x}_r = \mathfrak{e}_{11} + \mathfrak{e}_{1r+1}$ aus μ_2' hat aber den Limes $\mathfrak{e}_{11}$.

Wir haben damit gezeigt, daß μ_2 wenigstens die Ableitungszahl 2 hat. Daß μ_2 genau die Ableitungszahl 2 hat, folgt daraus, daß $\mu_2'' = \varphi\omega$ ist. μ_2' enthält ja alle e_{ik} mit $i \geqq 2$ als Differenzen $x_{rs} - x_r$, ferner alle x_r, und eine einfache Überlegung zeigt, daß jede Stelle aus $\varphi\omega$ Limes von endlichen Linearkombinationen dieser Stellen ist.

2. Dieses Beispiel läßt sich nun auf beliebige Ordnungszahlen der zweiten Zahlklasse durch transfinite Induktion fortsetzen.

Wenn α Limeszahl ist, sei $\beta_1, \beta_2, \ldots$ eine aufsteigende Folge von Ordnungszahlen mit dem Limes α. Ist $\alpha = \beta + 1$, so setzen wir $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \beta, \ldots$. μ_{β_i} sei ein linearer Teilraum von $\varphi\omega$ mit der Ableitungszahl β_i. μ_{β_i} bestehe aus allen endlichen Linearkombinationen von Stellen der Form $e_{11} +$ endlichviele e_{ik}, $(i, k) \neq (1, 1)$ e_{11} sei β_i-ter Limes von Stellen aus μ_{β_i} und nicht früherer.

μ_α wird nun folgendermaßen konstruiert. Wir betrachten abzählbar viele voneinander verschiedene Räume $\varphi\omega$, wir unterscheiden sie durch den Index i. Wir fassen μ_{β_i} als Teilraum von $\varphi\omega_i$ auf. Aus $\varphi\omega_1$, $\varphi\omega_2, \ldots$ bilden wir einen neuen Raum $\varphi\omega_\infty$ vom Typus $\varphi\omega$, indem wir die $(1, 1)$-ten Koordinaten von $\varphi\omega_1, \varphi\omega_2, \ldots$ in die erste Abteilung von $\varphi\omega_\infty$ nehmen, dann den Rest der ersten Abteilung von $\varphi\omega_1$ zur zweiten Abteilung von $\varphi\omega_\infty$ machen, allgemein ordnen wir die Koordinaten der $(n-1)$-ten Abteilung von $\varphi\omega_1$, der $(n-2)$-ten Abteilung von $\varphi\omega_2, \ldots$, der zweiten von $\varphi\omega_{n-2}$ und den Rest der ersten Abteilung von $\varphi\omega_{n-1}$ in eine Folge und machen diese zur n-ten Abteilung von $\varphi\omega_\infty$. Schließlich setzen wir noch eine einzige neue Koordinate als erste Koordinate in die erste Abteilung von $\varphi\omega_\infty$.

Die Stelle $e_{11}^{(i)}$ aus $\varphi\omega_i$ wird so, wenn man die noch freien Koordinaten mit Nullen besetzt, in $\varphi\omega_\infty$ zu einer Stelle e_{1n_i} mit $n_i > 1$. Aus den $e_{mn}^{(i)}$ mit $(m, n) \neq (1, 1)$ werden Stellen $e_{m'n'}$ mit $m' > i$. Aus den μ_{β_i} werden analog Teilräume χ_{β_i} von $\varphi\omega_\infty$, wobei die Konvergenzeigenschaften ungeändert bleiben. Insbesondere ist also e_{1n_i} in $\varphi\omega_\infty$ β_i-ter und nicht früherer Limes von Stellen aus χ_{β_i}, die sämtlich in der $(i+1)$-ten Abteilung von Null verschieden sind.

Wir addieren nun zu jeder Basisstelle $e_{1n_i} +$ endlich viele e_{ik} von χ_{β_i} noch e_{11}. Die endlichen Linearkombinationen dieser Stellen $e_{11} + e_{1n_i} + \ldots$ bilden einen Teilraum ν_{β_i} mit offenbar denselben Eigenschaften wie χ_{β_i} nur mit dem Unterschied, daß $e_{11} + e_{1n_i}$ statt e_{11} β_i-ter und nicht früherer Limes von Stellen aus ν_{β_i} wird.

μ_α sei nun der aus allen ν_{β_i} durch endliche Summenbildung abgeleitete lineare Teilraum von $\varphi\omega_\infty$. Nach den Voraussetzungen über die μ_{β_i} besteht μ_α aus allen endlichen Linearkombinationen von Stellen der Form $e_{11} +$ endlich viele e_{ik}. Sei $\mu_\alpha^{(\delta)}$ die δ-te Ableitung, $\delta < \alpha$,

von μ_α. Wir zeigen, daß $\mu_\alpha^{(\delta)}$ nicht die Stelle e_{11} enthält. In $\mu_\alpha^{(\delta)}$ liegen sicher alle endlichen Summen $\sum_1^N x_i$, x_i aus $\nu_{\beta_i}^{(\delta)}$. Eine solche Summe hat stets die Gestalt (1), ist also von e_{11} verschieden. Es genügt also zu beweisen, daß $\mu_\alpha^{(\delta)}$ nur die Stellen $\sum_1^N x_i$, x_i aus $\nu_{\beta_i}^{(\delta)}$ enthält.

Dies sei für die Ordnungszahlen $\varepsilon_n < \delta$ bereits bewiesen (für $\delta = 0$ ist es ja richtig). Ist $x^{(n)}$ eine konvergente Folge von Stellen $x^{(n)}$ aus $\mu_\alpha^{(\varepsilon_n)}$, so kann also $x^{(n)}$ in der Form $x^{(n)} = \sum_1^{N_n} x_i^{(n)}$ angenommen werden, $x_i^{(n)}$ in $\nu_{\beta_i}^{(\varepsilon_n)}$. Von einem geeignetem i_0 ab ist nun $\beta_i \geqq \delta > \varepsilon_n$ für alle n. Für $i \geqq i_0$ enthält also $\nu_{\beta_i}^{(\varepsilon_n)}$ die Stelle $e_{11} + e_{1n_i}$ nicht, enthält daher nur Stellen, die noch in einer späteren als der i-ten Abteilung von Null verschieden sind. Nach Konstruktion der ν_{β_i} haben ferner Stellen aus verschiedenen $\nu_{\beta_i}^{(\varepsilon_n)}$, $\nu_{\beta_j}^{(\varepsilon_n)}$ nur an der (1, 1)-ten Koordinate gleichzeitig eine Nichtnull stehen, die Folge $x^{(n)} = \sum_1^{N_n} x_i^{(n)}$ kann daher nur konvergieren, wenn $N_n \leqq M$ bleibt und die einzelnen $x_i^{(n)}$ für sich konvergieren. Die Grenzstelle von $x^{(n)}$ muß also die Form $x = \sum x_i$, x_i in $\nu_{\beta_i}^{(\delta)}$, haben. e_{11} liegt also nicht in $\mu_\alpha^{(\delta)}$.

Als Limes der β_i-ten Limites $e_{11} + e_{1n_i}$ ist e_{11} aber α-ter Limes von Stellen aus μ_α. μ_α hat daher mindestens die Ableitungszahl α.

Aus der Induktionsvoraussetzung, daß $\mu_{\beta_i}^{(\beta_i)}$ aus allen in $\varphi\omega$ konvergenten unendlichen Linearkombinationen aller e_{ik} besteht, die in den Basisstellen $e_{11} + \ldots$ von μ_{β_i} als Summanden auftreten, ergibt sich schließlich wie für μ_2 dieselbe Tatsache für μ_α, μ_α hat also genau die Ableitungszahl α.

Dieses Beispiel läßt sich sofort auf $\varphi\omega + \omega\varphi$ und die konvergenzfreien Räume höherer als zweiter Stufe[11]) übertragen:

$\varphi\omega$ ist Stückraum aller dieser Räume $\varkappa$; macht man also μ_α zum Teilraum von $\varkappa$, indem man die fehlenden Koordinaten mit Nullen besetzt, so erhält man einen linearen Teilraum χ_α von $\varkappa$ mit der Ableitungszahl α.

Schließlich bemerken wir noch, daß μ_α auch als Bildraum einer linearen Transformation von $\varphi\omega$ in sich aufgefaßt werden kann. μ_α besteht aus allen endlichen Linearkombinationen von Stellen der Form e_{11} + endlichviele e_{ik}. Diese abzählbarvielen Stellen bringe man in eine Folge $a_1, a_2, \ldots$. $\varphi\omega$ enthält φ als Stückraum, $e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots$ seien die

[11]) Vgl. G. Köthe, Math. Annalen 111 (1935), S. 229—258.

zu φ gehörenden Einheitsstellen von $\varphi\omega$. Durch die Festsetzung, daß die $\mathfrak{e}_{\alpha_1}, \mathfrak{e}_{\alpha_2}, \ldots$ der Reihe nach in $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ abgebildet werden und die von den $\mathfrak{e}_{\alpha_i}$ verschiedenen Einheitsstellen von $\varphi\omega$ in $\mathfrak{o}$ übergehen, wird eine lineare stetige Transformation von $\varphi\omega$ in sich erklärt, deren Bildraum offenbar μ_a ist.

§ 4.

Die Ableitungen in metrischen Räumen.

Definition 1. *Ein vollkommener Raum λ heiße* metrisch, *wenn in λ eine lineare Metrik so erklärt werden kann, daß die metrische Konvergenz mit der starken Konvergenz zusammenfällt.*

Nach K. T., § 12 bis 14, sind z. B. alle Hölder-Rieszschen Räume σ_r, $r \geqq 1$, und σ_∞ metrische vollkommene Räume.

Der Theorie der metrischen Räume entnehmen wir den

Erweiterungssatz für metrische Konvergenz. *λ sei ein vollkommener metrischer Raum, $u(\mathfrak{x})$ eine in einem linearen Teilraum μ erklärte, dort stark stetige Linearfunktion. Es gibt dann stets eine auf ganz μ erklärte, stark stetige Linearfunktion, die auf μ mit $u(\mathfrak{x})$ identisch ist*[12]).

Folgerung. *Ist μ stark abgeschlossen und $\mathfrak{x}_0$ eine nicht in μ gelegene Stelle aus λ, so gibt es eine stark stetige Linearfunktion $u(\mathfrak{x})$ in λ, die auf ganz μ Null ist und für die $u(\mathfrak{x}_0) = 1$ ist*[13]).

Wir beweisen damit

Satz 1: *In einem metrischen, stark separablen vollkommenen Raum λ ist jeder lineare Teilraum regulär*[14]).

Beweis. μ sei ein linearer Teilraum von λ. Wir nehmen zu μ alle Grenzstellen von stark konvergenten Teilfolgen aus μ hinzu. Der entstehende lineare Teilraum sei ν. ν ist stark abgeschlossen, d. h. enthält mit jeder stark konvergenten Folge deren Limes. Denn nach Voraussetzung ist die starke Konvergenz metrisch, jeder Limes von Limites ist bei einer Metrik aber wieder ein Limes[9]).

$\mathfrak{x}^{(n)}$ sei nun eine gegen $\mathfrak{x}_0$ konvergente Folge aus ν. Wir behaupten, daß $\mathfrak{x}_0$ auch in ν liegt, daß ν also sogar abgeschlossen ist. Wäre $\mathfrak{x}_0$ nicht in ν, so gäbe es nach der Folgerung eine stark stetige Linearfunktion $u(\mathfrak{x})$

---

[12]) B. S. 55, th. 2.

[13]) B. S. 57, lemme.

[14]) Dieser Satz kann fast unmittelbar Resultaten von St. Banach entnommen werden (B. S. 134, th. 2), doch haben wir es vorgezogen, ihn in unserem Zusammenhang auf etwas anderem Wege darzustellen.

mit $u(\mathfrak{x}^{(n)}) = 0$, $u(\mathfrak{x}_0) = 1$. Nach § 1, Satz 4, wird $u(\mathfrak{x})$ durch eine Stelle $\mathfrak{u}$ aus λ^* vermittelt, aus $\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(n)} = 0$ würde aber $\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}_0 = \lim \mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(n)} = 0$ statt $\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}_0 = 1$ folgen.

Bereits durch die Hinzunahme aller starken Grenzstellen wird μ also abgeschlossen, μ ist regulär.

Nebenbei ergab sich

Satz 2. *Ist der vollkommene metrische Raum λ stark separabel, so ist jeder stark abgeschlossene lineare Teilraum abgeschlossen, und umgekehrt.*

Nach § 1 gelten diese Resultate für alle σ_r, $r \geqq 1$. Wie wir an anderer Stelle ausführen werden, gilt auch die Umkehrung von Satz 1: Ist der vollkommene metrische Raum λ nicht stark separabel, so gibt es nichtreguläre Teilräume in λ. Wir begnügen uns hier mit einem Beispiel in σ_∞.

Satz 3. *In σ_∞ gibt es nichtreguläre Bildräume.*

Beweis. Wir ordnen die Koordinaten von σ_∞ in abzählbarviele Abteilungen mit je abzählbarvielen Koordinaten an. Eine Stelle $\mathfrak{x}$ aus σ_∞ hat also die Gestalt

$$\mathfrak{x} = (x_{11}, x_{12}, \ldots | x_{21}, x_{22}, \ldots | \ldots | \ldots) = \sum_{i,k=1}^{\infty} x_{ik}\, \mathfrak{e}_{ik}, \quad |x_{ik}| \leqq N.$$

Es seien $s_1, s_2, \ldots$ und $t_1, t_2, \ldots$ zwei Folgen von komplexen Zahlen, so daß $\Sigma |s_i|$ und $\Sigma |t_i|$ konvergieren. Wir betrachten nun die lineare Abbildung von σ_∞ in sich, die der Stelle $\mathfrak{e}_{pq}$ die Stelle

$$\mathfrak{a}_{pq} = s_p t_q (\mathfrak{e}_{11} + \mathfrak{e}_{1\,p+1}) + t_q \sum_{h=q}^{\infty} \mathfrak{e}_{p+1,h}$$

zuordnet. Da $|\mathfrak{a}_{pq}| \leqq M$ ist, M eine Schranke für die Beträge der $s_p t_q$ und t_q, ist die Abbildung spaltenabsolut, nach K. T., § 13, also stetig. Der Bildraum μ besteht offenbar aus allen Stellen

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \sum_{p,q=1}^{\infty} c_{pq}\, \mathfrak{a}_{pq}$$

$$= (\sum_{p,q} c_{pq} s_p t_q, s_1 \sum_q c_{1q} t_q, \ldots | c_{11} t_1, c_{11} t_1 + c_{12} t_2, \ldots | c_{21} t_1, c_{21} t_1 + c_{22} t_2, \ldots | \ldots)$$

mit $|c_{pq}| \leqq N$.

Sei nun $\mathfrak{x}^{(n)}$ eine konvergente Folge aus μ. Sie ist koordinatenweise konvergent und die Koordinaten aller $\mathfrak{x}^{(n)}$ liegen unter einer gemeinsamen Schranke (dies folgt z. B. aus § 1, Satz 1, 2). Führen wir die Bezeichnung $b_p^{(n)} = \sum_{q=1}^{\infty} c_{pq}^{(n)} t_q$ ein, so ergibt sich durch Betrachtung der zweiten, dritten usw. Abteilung von $\mathfrak{x}^{(n)}$ nach (1), daß die Partialsummen der $b_p^{(n)}$, also auch die $b_p^{(n)}$ selbst unter einer von p und n unabhängigen Schranke K liegen.

Wäre nun die Folge

$$\mathfrak{x}^{(n)} = (\sum_{p=1}^{\infty} s_p b_p^{(n)}, s_1 b_1^{(n)}, s_2 b_2^{(n)}, \ldots | \ldots | \ldots)$$

gegen $\mathfrak{e}_{11}$ konvergent, so wäre $\lim_{n \to \infty} b_p^{(n)} = 0$, dann wäre aber auch

$$|\sum_{p=1}^{\infty} s_p b_p^{(n)}| \leqq \sum_{1}^{N} |s_p b_p^{(n)}| + K \sum_{N+1}^{\infty} |s_p| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für genügend großes n, was unmöglich ist. $\mathfrak{e}_{11}$ liegt also nicht in μ'.

Andererseits ist $\lim_{q \to \infty} \frac{\mathfrak{a}_{pq}}{s_p t_q} = \mathfrak{e}_{11} + \mathfrak{e}_{1p+1} + \frac{1}{s_p} \lim_{q \to \infty} \frac{1}{q} \sum^{\infty} \mathfrak{e}_{p+1k} = \mathfrak{e}_{11} + \mathfrak{e}_{1p+1}$, also $\mathfrak{e}_{11} = \lim_{p \to \infty} (\mathfrak{e}_{11} + \mathfrak{e}_{1p+1})$ in μ''. μ ist daher nicht regulär.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß $\mu'' = \sigma_\infty$ ist, μ hat also genau die Ableitungszahl 2.

§ 5.

Umgebungen und Häufungsstellen.

In K. T., S. 197, Anmerkung 11, wird angedeutet, wie in jedem vollkommenen Raum λ eine Topologie eingeführt werden kann, so daß die Konvergenz im Sinne dieser Topologie mit der Konvergenz in λ übereinstimmt. Wir setzen dies hier ausführlich auseinander.

Definition 1. *Sind* $\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}$ *endlich viele Stellen aus* λ^*, $\varepsilon > 0$ *beliebig, so heiße Umgebung* $U_{\{\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}; \varepsilon\}}(\mathfrak{x})$ *von* $\mathfrak{x}$ *die Gesamtheit aller Stellen* $\mathfrak{y}$ *aus* λ, *für die*

$$|\mathfrak{u}^{(1)}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})| < \varepsilon, \ldots, |\mathfrak{u}^{(n)}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})| < \varepsilon$$

ist.

Satz 1. *Die vier Hausdorffschen Umgebungsaxiome gelten*[15]).

Beweis: 1. $\mathfrak{x}$ *liegt stets in* $U(\mathfrak{x})$.

2. *Sind* $U_{\{\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}; \varepsilon\}}(\mathfrak{x})$ *und* $U_{\{\mathfrak{v}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{v}^{(m)}; \delta\}}(\mathfrak{x})$ *zwei Umgebungen von* $\mathfrak{x}$, *so ist* $U_{\{\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}, \mathfrak{v}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{v}^{(m)}; \mathrm{Min}(\varepsilon, \delta)\}}(\mathfrak{x})$ *eine in beiden Umgebungen enthaltene Umgebung von* $\mathfrak{x}$.

3. *Ist* $\mathfrak{y}$ *eine Stelle aus* $U_{\{\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}; \varepsilon\}}(\mathfrak{x})$, *so gibt es eine ganze Umgebung* $V(\mathfrak{y})$, *die in* $U(\mathfrak{x})$ *liegt.*

Es sei δ die kleinste der Zahlen

$$\varepsilon - |\mathfrak{u}^{(1)}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})|, \ldots, \varepsilon - |\mathfrak{u}^{(n)}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})|.$$

---

[15]) Vgl. F. Hausdorff, Mengenlehre, 2. Auflage 1927, S. 228 (A), (B), (C) und 229 (5).

Wir bilden die Umgebung $V_{(\mathfrak{u}^{(1)},\ldots,\mathfrak{u}^{(n)};\,\delta)}(\mathfrak{y})$. Sei $\mathfrak{z}$ in $V(\mathfrak{y})$. Dann ist $|\mathfrak{u}^{(i)}(\mathfrak{y}-\mathfrak{z})| < \delta$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, also

$$\begin{aligned}|\mathfrak{u}^{(i)}(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})| &\leqq |\mathfrak{u}^{(i)}(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})| + |\mathfrak{u}^{(i)}(\mathfrak{y}-\mathfrak{z})|\\ &< |\mathfrak{u}^{(i)}(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})| + \delta\\ &< |\mathfrak{u}^{(i)}(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})| + (\varepsilon - |\mathfrak{u}^{(i)}(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})|) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Das bedeutet aber, daß $\mathfrak{z}$ in $U(\mathfrak{x})$ liegt.

4. *Ist* $\mathfrak{y} \neq \mathfrak{x}$, *so gibt es zwei Umgebungen* $U(\mathfrak{x})$, $V(\mathfrak{y})$, *die keine Stelle gemeinsam haben.*

Zum Beweise sei $\mathfrak{u}_0$ eine Stelle aus λ^*, für die $\mathfrak{u}_0(\mathfrak{x}-\mathfrak{y}) \neq 0$. Sei $\varepsilon = \frac{|\mathfrak{u}_0(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})|}{2}$. Die Umgebungen $U_{(\mathfrak{u}_0;\,\varepsilon)}(\mathfrak{x})$ und $V_{(\mathfrak{u}_0;\,\varepsilon)}(\mathfrak{y})$ sind elementefremd, denn für ein gemeinsames $\mathfrak{z}$ müßte

$$|\mathfrak{u}_0(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})| \leqq |\mathfrak{u}_0(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})| + |\mathfrak{u}_0(\mathfrak{y}-\mathfrak{z})| < 2\varepsilon = |\mathfrak{u}_0(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})|$$

sein, was unmöglich ist.

Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus λ hat bekanntlich im topologischen Sinn den Limes $\mathfrak{x}$, wenn man zu jeder Umgebung $U(\mathfrak{x})$ ein $n_0(U)$ finden kann, so daß $\mathfrak{x}^{(n)}$ für alle $n \geqq n_0$ in $U(\mathfrak{x})$ liegt.

Satz 2. *Der topologische Limesbegriff stimmt mit dem gewöhnlichen Limesbegriff überein.*

Beweis: a) Sei $\mathfrak{x}$ der Limes von $\mathfrak{x}^{(n)}$ im Sinne von § 1. Sei $U_{(\mathfrak{u}^{(1)},\ldots,\mathfrak{u}^{(m)};\,\varepsilon)}(\mathfrak{x})$ irgendeine Umgebung von $\mathfrak{x}$. Da $\lim \mathfrak{u}^{(i)}(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(n)}) = 0$ ist, gibt es ein n_0, so daß für alle $n \geqq n_0$ und $i = 1\ 2, \ldots, m$ $|\mathfrak{u}^{(i)}(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(n)})| < \varepsilon$ ist, d. h. von n_0 ab liegt $\mathfrak{x}^{(n)}$ in $U(\mathfrak{x})$. Die Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ ist also auch topologisch konvergent.

b) Sei umgekehrt $\mathfrak{x}$ topologische Grenzstelle von $\mathfrak{x}^{(n)}$. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig und $\mathfrak{u}$ aus λ^*, so gibt es also ein n_0, so daß $\mathfrak{x}^{(n)}$ für $n \geqq n_0$ in $U_{(\mathfrak{u};\,\varepsilon)}(\mathfrak{x})$ liegt, d. h. es ist $|\mathfrak{u}(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(n)})| < \varepsilon$ ab n_0. Für jedes $\mathfrak{u}$ aus λ^* ist daher $\lim \mathfrak{u}(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(n)}) = 0$, $\mathfrak{x}$ ist Limes von $\mathfrak{x}^{(n)}$.

Definition 3. $\mathfrak{x}$ *heiße Häufungsstelle einer Menge M von Stellen aus* λ, *wenn in jeder Umgebung von* $\mathfrak{x}$ *Stellen von M liegen, die von* $\mathfrak{x}$ *verschieden sind.*

Satz 3. *Jede Häufungsstelle von Häufungsstellen ist Häufungsstelle.*

Beweis. M sei eine Menge von Stellen aus λ, $\overline{M}$ die Menge ihrer Häufungsstellen. $\mathfrak{x}$ sei Häufungsstelle von $\overline{M}$. $U(\mathfrak{x})$ sei eine beliebige Umgebung von $\mathfrak{x}$. In $U(\mathfrak{x})$ liegt ein Punkt $\mathfrak{y} \neq \mathfrak{x}$ aus $\overline{M}$. Nach dem dritten Umgebungsaxiom liegt eine ganze Umgebung $V(\mathfrak{y})$ in $U(\mathfrak{x})$. Nach Axiom 4 und 2 kann $V(\mathfrak{y})$ so klein gewählt werden, daß $\mathfrak{x}$ nicht in $V(\mathfrak{y})$ liegt. Nun ist $\mathfrak{y}$ Häufungsstelle von M, in $V(\mathfrak{y})$ liegt also wenigstens eine Stelle $\mathfrak{z}$ aus M. Da $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{x}$ ist, liegt in jedem $U(\mathfrak{x})$ eine Stelle $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{x}$ aus M, $\mathfrak{x}$ ist Häufungsstelle von M.

Jede Grenzstelle einer Menge ist auch Häufungsstelle. Nach Satz 3 ist auch jede Grenzstelle von Grenzstellen Häufungsstelle. Nach § 2 gibt es also z. B. in jedem symmetrischen Raum $\neq \omega$, σ_1 Häufungsstellen, die nicht Grenzstellen sind.

Wir untersuchen noch, wie die Verhältnisse in ω und σ_1 liegen.

In ω ist jede Grenzstelle Häufungsstelle.

Beweis. $\mathfrak{x}$ sei Häufungstelle der Menge M. Wir bilden nun mit den ersten n Einheitsstellen $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ die Umgebung $U_{(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n; 1/n)}(\mathfrak{x})$. Es gibt in M eine Stelle $\mathfrak{x}^{(n)}$, die in $U(\mathfrak{x})$ liegt, die also die ersten n Koordinaten von $\mathfrak{x}$ bis auf $1/n$ approximiert. Da in ω die Konvergenz einer Folge von Stellen mit der koordinatenweisen Konvergenz gleichbedeutend ist, ist die Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{x}$ konvergent.

Aus Satz 3 folgt jetzt, daß jeder Teilraum von ω regulär ist.

In σ_1 ist zwar jeder Limes von Limites ein Limes (§ 2), *es gibt aber in σ_1 Häufungsstellen, die nicht Grenzstellen sind:*

M sei die abgeschlossene Menge aller $\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{x}| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \geqq 1$. Die Stelle $\mathfrak{o}$ ist nicht Grenzstelle von M, da $|\mathfrak{o}| = 0$ ist und die Konvergenz in σ_1 metrisch ist.

$\mathfrak{o}$ ist aber Häufungspunkt von M.

Beweis. Sei $U_{(\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(m)}; \varepsilon)}(\mathfrak{o})$ irgendeine Umgebung von $\mathfrak{o}$. $\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}$ seien linear unabhängig, die restlichen $m - n$ Stellen seien lineare Kombinationen davon. Sei etwa die Determinante $|u_k^{(i)}|$ aus den ersten n Koordinaten von Null verschieden. Wir wählen $x_{n+1}^{(0)}, x_{n+2}^{(0)}, \ldots$ so, daß $|x_{n+1}^{(0)}| + |x_{n+2}^{(0)}| + \ldots \geqq 1$ ist, etwa $x_{n+1}^{(0)} = \frac{1}{2}$, $x_{n+2}^{(0)} = \frac{1}{4}, \ldots$, und bestimmen $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ aus den n Gleichungen

$$u_1^{(1)} x_1 + \ldots + u_n^{(1)} x_n = -\sum_{n+1}^{\infty} u_i^{(1)} x_i^{(0)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_1^{(n)} x_1 + \ldots + u_n^{(n)} x_n = -\sum_{n+1}^{\infty} u_i^{(n)} x_i^{(0)}.$$

$\mathfrak{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots)$ liegt in M, es ist $|\mathfrak{u}^{(i)} \mathfrak{x}_0| = 0 < \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, m$, $\mathfrak{x}_0$ liegt also in $U(\mathfrak{o})$.

Definition 4. *Eine Menge von Stellen aus λ heiße vollabgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungsstellen enthält.*

Nach Satz 3 wird jede Menge durch Hinzunahme ihrer Häufungsstellen vollabgeschlossen. Eine vollabgeschlossene Menge ist abgeschlossen. Wie das obige Beispiel in σ_1 zeigt, braucht aber die Umkehrung nicht zu gelten.

Für die Gleichungstheorie ist die Frage von besonderem Interesse, in welchen Räumen jeder abgeschlossene lineare Teilraum auch vollabgeschlossen ist.

Aus der Theorie der metrischen Räume ergeben sich die folgenden beiden Sätze.

Satz 4. *Ist der vollkommene metrische Raum λ stark separabel, so ist jeder abgeschlossene Teilraum von λ vollabgeschlossen.*

Beweis. μ sei ein abgeschlossener linearer Teilraum von λ. In § 1, Satz 4, wurde bewiesen, daß jede stark stetige Linearfunktion von λ durch eine Stelle aus λ^* erzeugt wird. Nehmen wir § 6, Definition 1, vorweg, so können wir die Folgerung aus dem Erweiterungssatz von § 4 auch so formulieren: Jeder stark abgeschlossene Teilraum von λ, erst recht also μ, ist orthogonalabgeschlossen. Aus § 6, Satz 1, folgt, daß μ vollabgeschlossen ist.

Satz 4 gilt z. B. für alle σ_r mit $r \geqq 1$. Aber auch in σ_∞ ist jeder abgeschlossene Teilraum vollabgeschlossen, denn Resultaten von St. Banach [16]) entnehmen wir

Satz 5. *Gilt in dem vollkommenen metrischen Raum λ der Grenzstellensatz, so ist jeder abgeschlossene Teilraum von λ vollabgeschlossen.*

Die Verhältnisse in den konvergenzfreien Räumen werden in § 7 untersucht werden.

§ 6.

Der Orthogonalraumsatz.

Definition 1. *μ sei ein linearer Teilraum des vollkommenen Raumes λ. Die Gesamtheit der Stellen $\mathfrak{u}$ aus λ^*, die zu allen Stellen $\mathfrak{x}$ aus μ orthogonal sind, für die also $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = 0$ gilt, bildet einen linearen Teilraum von λ^*, den Orthogonalraum $\bar{\mu}$ von μ.*

Der Orthogonalraum $\bar{\bar{\mu}}$ von μ liegt in $\lambda^{**} = \lambda$ und umfaßt μ.

Definition 2. *Ist $\bar{\bar{\mu}} = \mu$, so heiße μ orthogonalabgeschlossen.*

Satz 1. *Ein Orthogonalraum $\bar{\mu}$ ist stets vollabgeschlossen. Speziell ist also jeder orthogonalabgeschlossene lineare Teilraum vollabgeschlossen.*

Beweis. Sei $\mathfrak{u}$ eine Häufungsstelle von $\bar{\mu}$. Es gibt dann zu jedem $\mathfrak{x}$ aus μ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Stelle $\mathfrak{v}$ aus $\bar{\mu}$, für die $|(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})\mathfrak{x}| < \varepsilon$ ist. Da $\mathfrak{v}$ in $\bar{\mu}$ liegt, ist $\mathfrak{v}\mathfrak{x} = 0$. ε ist beliebig, also ist auch $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{u}$ liegt in $\bar{\mu}$.

---

[16]) Vgl. B. S. 122 ff. Dort wird bewiesen, daß jeder abgeschlossene Teilraum von λ^* orthogonalabgeschlossen ist (vgl. § 6, Definition 1), wenn λ separabel ist. § 6, Satz 1 und § 1, Satz 2 ergeben die Behauptung.

Satz 2 (**Orthogonalraumsatz**). *Ein linearer Teilraum μ eines vollkommenen Raumes λ ist dann und nur dann vollabgeschlossen, wenn er orthogonalabgeschlossen ist.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß ein vollabgeschlossener Teilraum μ orthogonalabgeschlossen ist.

1. Nach dem Beweise von § 5, Satz 4 ist jeder abgeschlossene Teilraum von σ_1 orthogonalabgeschlossen.

Ist $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix mit den unendlichvielen von Null verschiedenen Diagonalgliedern d_i, so bilden die Stellen $(d_1 x_1, d_2 x_2, \ldots)$ mit konvergenter $\sum |x_i|$ einen zu σ_1 homöomorphen „diagonaltransformierten" vollkommenen Raum $\mathfrak{D}(\sigma_1)$ (vgl. K. T. § 12, Satz 7). Wegen der Homöomorphie ist auch in $\mathfrak{D}(\sigma_1)$ jeder abgeschlossene Teilraum vollabgeschlossen.

2. $\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}$ seien n beliebige Stellen aus λ^*. Wir bilden dazu die Stelle $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots) = (\sum\limits_1^n |u_1^{(i)}|, \sum\limits_1^n |u_2^{(i)}|, \ldots)$, die wegen der Normalität von λ^* (vgl. K. T. § 3, Satz 4) auch in λ^* liegt. $u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots$ seien die von Null verschiedenen Koordinaten von $\mathfrak{u}$, $u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots$ seien Null. Mit $\lambda_{\mathfrak{u}}$ werde der Raum aller Stellen bezeichnet, die aus den Stellen von λ entstehen, wenn man die j_1-te, j_2-te, ... Koordinate streicht Ebenso sei $(\lambda^*)_{\mathfrak{u}}$ erklärt, $(\lambda^*)_{\mathfrak{u}}$ ist dual zu $\lambda_{\mathfrak{u}}$, $(\lambda^*)_{\mathfrak{u}} = (\lambda_{\mathfrak{u}})^*$.

Besitzt $\mathfrak{u}$ unendlichviele von Null verschiedene Koordinaten, so enthält $\lambda_{\mathfrak{u}}^*$ als normaler Raum den zu σ_∞ diagonaltransformierten Raum $\lambda_{\mathfrak{u};\infty}$ aller Stellen $(u_{k_1} v_1, u_{k_2} v_2, \ldots)$ mit $|v_i| \leqq M$. Ebenso ist $\lambda_{\mathfrak{u}}$ enthalten in dem zu σ_1 diagonaltransformierten, zu $\lambda_{\mathfrak{u};\infty}$ dualen Raum $\lambda_{\mathfrak{u};1}$ aller $\left(\frac{y_1}{u_{k_1}}, \frac{y_2}{u_{k_2}}, \ldots\right)$ mit konvergenter $\sum |y_i|$.

Ist $u_h = 0$ für $h > h_0$, so sind $\lambda_{\mathfrak{u}}$ und $\lambda_{\mathfrak{u}}^*$ endlichdimensional. In diesem Fall gelten erst recht die weiteren Überlegungen, die wir nur für den unendlichen Fall durchführen werden.

3. μ sei ein vollabgeschlossener Teilraum von λ mit der orthogonalabgeschlossenen Hülle $\nu = \overline{\overline{\mu}}$. Durch Streichen der j_1-ten, j_2-ten, ... Koordinaten entstehen aus μ und ν die Teilräume $\mu_{\mathfrak{u}}$ und $\nu_{\mathfrak{u}}$ von $\lambda_{\mathfrak{u}}$. Wir fassen sie als Teilräume von $\lambda_{\mathfrak{u};1}$ auf und bilden ihre im Sinn von $\lambda_{\mathfrak{u};1}$ abgeschlossenen Hüllen $\hat{\mu}_{\mathfrak{u}}$ und $\hat{\nu}_{\mathfrak{u}}$.

Es ist $\hat{\mu}_{\mathfrak{u}} = \hat{\nu}_{\mathfrak{u}}$.

Beweis. Wir nehmen an, es sei $\hat{\mu}_{\mathfrak{u}}$ echter Teilraum von $\hat{\nu}_{\mathfrak{u}}$. Da $\hat{\mu}_{\mathfrak{u}}$ und $\hat{\nu}_{\mathfrak{u}}$ abgeschlossene Teilräume des zu σ_1 diagonaltransformierten Raumes $\lambda_{\mathfrak{u};1}$ sind, gibt es nach 1. eine Stelle $\mathfrak{v}_0$ in $\lambda_{\mathfrak{u};\infty}$, die auf allen Stellen von $\hat{\mu}_{\mathfrak{u}}$, aber nicht auf allen von $\hat{\nu}_{\mathfrak{u}}$ orthogonal ist. Ergänzen wir $\mathfrak{v}_0$ durch Nullsetzen der fehlenden Koordinaten zu einer Stelle $\bar{\mathfrak{v}}_0$ aus λ^*, so gehört $\bar{\mathfrak{v}}_0$ offenbar zu $\overline{\mu}$, ist also auf allen Stellen von $\overline{\overline{\mu}}$

orthogonal. $\mathfrak{v}_0$ ist daher ebenfalls auf allen Stellen von $\nu_{\mathfrak{u}}$ orthogonal. Nach den Resultaten von § 4 über σ_1 ist jede Stelle $\mathfrak{x}$ von $\hat{\nu}_{\mathfrak{u}}$ Grenzstelle von Stellen $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus $\nu_{\mathfrak{u}}$, aus $\mathfrak{v}_0 \mathfrak{x}^{(n)} = 0$ folgt aber $\mathfrak{v}_0 \mathfrak{x} = \lim \mathfrak{v}_0 \mathfrak{x}^{(n)} = 0$, $\mathfrak{v}_0$ müßte daher im Widerspruch zur Annahme zu allen Stellen von $\hat{\nu}_{\mathfrak{u}}$ orthogonal sein.

4. *Aus $\hat{\mu}_{\mathfrak{u}} = \nu_{\mathfrak{u}}$ für alle Systeme $\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}$ folgt $\mu = \overline{\overline{\mu}}$.*

Beweis. $\mathfrak{x}$ sei eine Stelle aus $\overline{\overline{\mu}}$. Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{x}$ Häufungsstelle von μ ist, daß also in jeder Umgebung $U_{\{\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}; \varepsilon\}}(\mathfrak{x})$ eine Stelle $\mathfrak{y}$ von μ liegt. Zu $\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}$ bilden wir den zugehörigen Raum $\lambda_{\mathfrak{u};1}$. Streicht man die j_1-te, j_2-te, ... Koordinate von $\mathfrak{x}$, so erhält man eine Stelle $\hat{\mathfrak{x}}$, die nach 3. in $\hat{\mu}_{\mathfrak{u}}$ liegt. $\hat{\mathfrak{x}}$ ist also im Sinne von $\lambda_{\mathfrak{u};1}$ Limes von Stellen aus $\mu_{\mathfrak{u}}$. Nach 2. liegen die Stellen $\hat{\mathfrak{u}}^{(1)}, \ldots, \hat{\mathfrak{u}}^{(n)}$, die durch Streichen der j_1-ten, j_2-ten, ... Koordinaten aus $\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}$ entstehen, in $\lambda_{\mathfrak{u};\infty} = (\lambda_{\mathfrak{u};1})^*$. Es gibt daher ein $\hat{\mathfrak{y}}$ in $\mu_{\mathfrak{u}}$, so daß

$$|\hat{\mathfrak{u}}^{(1)}(\hat{\mathfrak{x}} - \hat{\mathfrak{y}})| < \varepsilon, \ldots, |\hat{\mathfrak{u}}^{(n)}(\hat{\mathfrak{x}} - \hat{\mathfrak{y}})| < \varepsilon$$

ist. $\mathfrak{y}$ sei eine Stelle in μ, die durch Streichen der j_1-ten, j_2-ten, ... Koordinaten in $\hat{\mathfrak{y}}$ übergeht. Dann ist auch

$$|\mathfrak{u}^{(1)}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})| < \varepsilon, \ldots, |\mathfrak{u}^{(n)}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})| < \varepsilon,$$

die Stelle $\mathfrak{y}$ aus μ liegt in $U_{\{\mathfrak{u}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{u}^{(n)}; \varepsilon\}}(\mathfrak{x})$; jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\overline{\overline{\mu}}$ ist also Häufungsstelle von μ. Da μ vollabgeschlossen ist, ist $\mu = \overline{\overline{\mu}}$.

Von F. Menn wurde der Satz bewiesen[17]), daß jeder lineare Teilraum, der einen Komplementärraum besitzt, orthogonalabgeschlossen ist. Satz 2 ergibt sofort

Satz 3. *Besitzt der lineare Teilraum μ des vollkommenen Raumes λ einen Komplementärraum, so ist μ vollabgeschlossen.*

Dies kann auch ohne Schwierigkeiten direkt bewiesen werden. Die Umkehrung dieses Satzes ist nicht richtig, wie von E. Hagemann in der anschließenden Arbeit in § 7, Satz 1 und 4 bewiesen wird. Die Existenz eines Komplementärraumes ist also eine noch schärfere Bedingung als die Vollabgeschlossenheit.

§ 7.

Vollabgeschlossene Teilräume von konvergenzfreien Räumen.

In § 6 der anschließenden Arbeit von E. Hagemann wird bewiesen, daß in $\varphi, \omega, \varphi + \omega$ und $\omega\varphi$ der Komplementärraumsatz gilt. Nach § 6, Satz 3 sind in diesen Räumen alle abgeschlossenen linearen Teilräume auch vollabgeschlossen.

---

[17]) Vgl. l. c. Anm. [4]).

Satz 1. *Jeder abgeschlossene lineare Teilraum μ von $\varphi\omega$ ist vollabgeschlossen.*

Beweis. Nach § 6, Satz 1 genügt es $\overline{\overline{\mu}} = \mu$ zu beweisen.

Ist in

$$\mathfrak{x} = (x_{11}, x_{12}, \ldots | x_{21}, x_{22}, \ldots | \ldots | \ldots) = (\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \ldots),\ \mathfrak{x}^{(i)} \text{ in } \omega$$

die n-te Abteilung $\mathfrak{x}^{(n)}$ die letzte, in der von Null verschiedene Koordinaten stehen, so heiße $\mathfrak{x}$ von der Länge n. Mit μ_n bezeichnen wir den linearen abgeschlossenen Raum aller Stellen der Länge $\leqq n$ aus μ.

1. Der zu μ orthogonale Raum $\overline{\mu}$ ist offenbar der Durchschnitt aller $\overline{\mu_n}$. $\overline{\overline{\mu}} = \mu$ wird bewiesen sein, wenn wir für alle n

$$(1) \qquad (\overline{\overline{\mu}})_n = \mu_n$$

zeigen können.

$(\overline{\overline{\mu}})_n$ erhält man auch folgendermaßen: Man betrachte von den Stellen $(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots)$ aus $\overline{\mu}$ nur die Abschnitte $(\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_n)$. Der Raum $\overline{\mu}^{[n]}$ aller dieser Stellen ist ein Teilraum des in φ permutierbaren Raumes $\varphi + \ldots + \varphi = n\varphi$ aller Stellen $(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$, $\mathfrak{v}_i$ aus φ. $(\overline{\overline{\mu}})_n$ ist bis auf die fehlenden Nullen der in $(n\varphi)^* = n\omega$ gebildete Orthogonalraum $\overline{\overline{\mu}^{[n]}}$ zu $\overline{\mu}^{[n]}$, also

$$(2) \qquad ((\overline{\overline{\mu}})_n)^{[n]} = \overline{\overline{\mu}^{[n]}}.$$

Damit läßt sich der Nachweis von (1) auf den von

$$(3) \qquad (\overline{\mu_n})^{[n]} = (\overline{\mu})^{[n]}$$

zurückführen: Wir gehen auf beiden Seiten von (3) zu den Orthogonalräumen in $n\omega$ über. Nach (2) ist der Orthogonalraum von $\overline{\mu}^{[n]}$ gleich $((\overline{\overline{\mu}})_n)^{[n]}$. Andererseits ist $(\mu_n)^{[n]}$ als abgeschlossener Teilraum von $n\omega$ orthogonalabgeschlossen; da es den Orthogonalraum $(\overline{\mu})^{[n]}$ hat, ist also auch umgekehrt $(\mu_n)^{[n]}$ der Orthogonalraum von $(\overline{\mu_n})^{[n]}$. Durch Übergang zu den Orthogonalräumen erhält man aus (3) daher die Beziehung $(\mu_n)^{[n]} = ((\overline{\overline{\mu}})_n)^{[n]}$, die mit (1) gleichbedeutend ist.

2. Zum Beweise von (3) leiten wir die Relationen

$$(4) \qquad (\overline{\mu_n})^{[n]} = (\overline{\mu_{n+1}})^{[n]} = \ldots$$

ab. Wäre für ein k $(\overline{\mu_{n+k}})^{[n]} < (\overline{\mu_n})^{[n]}$, so müßte wegen der orthogonalen Abgeschlossenheit dieser beiden Teilräume von $n\varphi$ (alle Teilräume von $n\varphi$ sind nach § 3 ja abgeschlossen, also vollabgeschlossen) für ihre Orthogonalräume in $n\omega$

$$(5) \qquad \overline{(\overline{\mu_{n+k}})^{[n]}} > \overline{(\overline{\mu_n})^{[n]}}$$

gelten. Nun besteht $\overline{(\overline{\mu_{n+k}})^{[n]}}$, wie leicht zu sehen, aus allen in $n\omega$ liegenden Abschnitten der Stellen der Länge $\leqq n$ aus $\overline{\overline{\mu_{n+k}}}$, andererseits ist $\overline{(\overline{\mu_n})^{[n]}}$, wie oben gezeigt, gleich $(\mu_n)^{[n]}$, der Gesamtheit der Abschnitte der Stellen der Länge $\leqq n$ aus μ_{n+k}. (5) würde also $\overline{\overline{\mu_{n+k}}} > \mu_{n+k}$ ergeben.

Da μ_{n+k} nur Stellen der Länge $\leqq n+k$ enthält, würde dies $\overline{\overline{(\mu_{n+k})^{[n+k]}}}$ $> (\mu_{n+k})^{[n+k]}$ bedeuten, was unmöglich ist, da $(\mu_{n+k})^{[n+k]}$ als abgeschlossener Teilraum von $(n+k)\,\omega$ orthogonalabgeschlossen ist. Damit ist (4) bewiesen.

Da $(\overline{\mu_n})^{[n]} \geqq \overline{\mu}^{[n]}$ ist, genügt es zum Beweise von (3), zu jeder Stelle $(\mathfrak{u}_1^{(0)}, \ldots, \mathfrak{u}_n^{(0)})$ aus $(\overline{\mu_n})^{[n]}$ eine ebenso beginnende Stelle $(\mathfrak{u}_1^{(0)}, \ldots, \mathfrak{u}_n^{(0)}, \ldots)$ aus $\overline{\mu}$ anzugeben. Nach (4) ist $(\overline{\mu_{n+1}})^{[n]} = (\overline{\mu_n})^{[n]}$, also gibt es in $(\overline{\mu_{n+1}})^{[n+1]}$ eine Stelle $(\mathfrak{u}_1^{(0)}, \ldots, \mathfrak{u}_n^{(0)}, \mathfrak{u}_{n+1}^{(0)})$. Da in $\overline{\mu_{n+1}}$ alle Stellen

$$(\mathfrak{o}, \ldots, \mathfrak{o}, \mathfrak{u}_{n+2}, \mathfrak{u}_{n+3}, \ldots)$$

mit beliebigen $\mathfrak{u}_{n+2}, \mathfrak{u}_{n+3}, \ldots$ aus φ liegen, sind auch sämtliche Fortsetzungen $(\mathfrak{u}_1^{(0)}, \ldots, \mathfrak{u}_{n+1}^{(0)}, \mathfrak{u}_{n+2}, \mathfrak{u}_{n+3}, \ldots)$ in $\overline{\mu_{n+1}}$. So können wir der Reihe nach $\mathfrak{u}_{n+1}^{(0)}, \mathfrak{u}_{n+2}^{(0)}, \ldots$ festlegen und erhalten damit eine Stelle $(\mathfrak{u}_1^{(0)}, \mathfrak{u}_2^{(0)}, \ldots)$, die in allen $\overline{\mu_{n+k}}$, also in $\overline{\mu}$ liegt. Damit ist (3) bewiesen.

Satz 2. *In $\varphi\,\omega + \omega\,\varphi$ gibt es abgeschlossene lineare Teilräume, die nicht vollabgeschlossen sind.*

Beweis. 1. Wir schreiben die Stellen $\mathfrak{x}$ von $\varphi\,\omega + \omega\,\varphi$ in der Gestalt

$$\mathfrak{x} = (\ldots, \mathfrak{x}_{-2}, \mathfrak{x}_{-1} \,\|\, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots)$$
$$= (\ldots | \ldots, x_{-2,-1} | \ldots, x_{-1,-2}, x_{-1,-1} \,\|\, x_{11}, x_{12}, \ldots | x_{21}, \ldots | \ldots);$$

die $\mathfrak{x}_{-n}$ sind Stellen aus ω, die $\mathfrak{x}_n$ Stellen aus φ, nur endlich viele $\mathfrak{x}_{-n}$ sind von $\mathfrak{o}$ verschieden. Die linke Hälfte von $\mathfrak{x}$ ist also eine Stelle aus $\varphi\,\omega$, die rechte eine aus $\omega\,\varphi$.

Wir werden einen abgeschlossenen echten Teilraum μ angeben, dessen Orthogonalraum $\overline{\mu}$ Null ist, es ist dann $\overline{\overline{\mu}} = \varphi\,\omega + \omega\,\varphi \neq \mu$. Zu $\varphi\,\omega + \omega\,\varphi$ ist $\omega\,\varphi + \varphi\,\omega$ dual. Die Stellen aus $\overline{\mu}$ haben also die Gestalt

$$(\ldots, \mathfrak{u}_{-2}, \mathfrak{u}_{-1} \,\|\, \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots),$$

$\mathfrak{u}_{-n}$ in φ, $\mathfrak{u}_n$ in ω, nur endlich viele $\mathfrak{u}_n \neq \mathfrak{o}$.

Mit $\mu^{[n]}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, bezeichnen wir den Teilraum von $\varphi\omega + n\,\varphi$, der entsteht, wenn man in den Stellen $\mathfrak{x}$ aus μ die $\mathfrak{x}_{n+1}, \mathfrak{x}_{n+2}, \ldots$ streicht. Der in $(\varphi\,\omega + n\,\varphi)^* = \omega\,\varphi + n\,\omega$ gebildete Orthogonalraum von $\mu^{[n]}$ sei $\overline{\mu^{[n]}}$. Ergänzt man jede Stelle aus $\overline{\mu^{[n]}}$ durch die Festsetzung $\mathfrak{u}_{n+1} = \mathfrak{u}_{n+2} = \ldots = \mathfrak{o}$ zu einer Stelle aus $\omega\,\varphi + \varphi\,\omega$, so erhält man einen Teilraum $\overline{\mu}^{\{n\}}$ von $\omega\,\varphi + \varphi\,\omega$. $\overline{\mu}$ ist der Vereinigungsraum der $\overline{\mu}^{\{n\}}$. Um ein μ mit der gewünschten Eigenschaft zu konstruieren, genügt es daher, einen abgeschlossenen Teilraum μ von $\varphi\,\omega + \omega\,\varphi$ zu konstruieren, dessen $\mu^{[n]}$ echte Teilräume von $\varphi\,\omega + n\,\varphi$ sind, aber $\varphi\,\omega + n\,\varphi$ als abgeschlossene Hülle haben, dann sind ja offenbar alle $\overline{\mu}^{\{n\}} = 0$, also $\overline{\mu} = 0$.

2. Wir geben nun eine Menge von Stellen an, deren lineare abgeschlossene Hülle μ sein soll. Wir gehen sukzessiv vor, wir nehmen zuerst so viele Stellen zu μ, daß sicher $\mu^{[0]} < \varphi\,\omega$, aber die abgeschlossene Hülle von $\mu^{[0]}$ gleich $\varphi\,\omega$ wird.

Mit $\mathfrak{e}_{pq}$ bezeichnen wir die Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\varphi\,\omega + \omega\,\varphi$ mit $x_{pq} = 1$, $x_{rs} = 0$ für $(r, s) \neq (p, q)$. μ enthalte alle Stellen

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^{(i,k)} &= \mathfrak{e}_{-i,-k} + \mathfrak{e}_{2i-1,k} \\ &= (\ldots, \mathfrak{o}, \overset{-i}{\overbrace{\mathfrak{e}_{-k}}}, \mathfrak{o}, \ldots, \mathfrak{o} \,\|\, \mathfrak{o}, \ldots, \mathfrak{o}, \overset{2i-1}{\overbrace{\mathfrak{e}_{k}}}, \mathfrak{o}, \ldots), \quad i, k = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

Die Koordinaten $a_{pq}^{(i,k)}$ von $\mathfrak{a}^{(i,k)}$ sind also sämtlich Null bis auf $a_{-i,-k}^{(i,k)} = 1$ und $a_{2i-1,k}^{(i,k)} = 1$.

In μ liegen alle endlichen Linearkombinationen der $\mathfrak{a}^{(i,k)}$. Da μ abgeschlossen sein soll, liegen auch noch alle Grenzstellen von konvergenten Folgen solcher Linearkombinationen in μ. Es ist aber leicht zu sehen, daß als Grenzstellen nur endliche Linearkombinationen der $\mathfrak{a}^{(i,k)}$ auftreten. Die Gesamtheit aller endlichen Linearkombinationen der $\mathfrak{a}^{(i,k)}$ bildet daher einen abgeschlossenen Teilraum μ_0 von $\varphi\,\omega + \omega\,\varphi$. $\mu_0^{[0]}$ besteht aus allen finiten Stellen von $\varphi\,\omega$, die abgeschlossene Hülle von $\mu_0^{[0]}$ ist also $\varphi\,\omega$.

3. Damit auch $\mu^{[1]}$ in $\varphi\,\omega + \omega$ dicht ist, müssen wir zu den Stellen von μ_0 noch weitere hinzunehmen, die die $\mathfrak{e}_{1k}$ approximieren. μ enthalte außer den $\mathfrak{a}^{(i,k)}$ noch die Stellen

$$\mathfrak{b}^{(1,k;n)} = (\ldots, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}, \mathfrak{x}^{(k;n)} \,\|\, \mathfrak{e}_k, \mathfrak{e}_{m_{kn}}, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}, \ldots); \qquad k, n = 1, 2, \ldots.$$

Jedes $\mathfrak{x}^{(k;n)}$ sei eine Summe von abzählbar vielen verschiedenen $\mathfrak{e}_{-1,-i}$, aber so, daß verschiedene $\mathfrak{x}^{(k;n)}$ niemals gleiche Koordinaten gleich Eins haben, m_{kn} durchlaufe die in ein Doppelschema geordneten natürlichen Zahlen. Die $\mathfrak{e}_{m_{kn}}$ bewirken, daß nur endliche Linearkombinationen der $\mathfrak{a}^{(i,k)}$ und $\mathfrak{b}^{(1,k;n)}$ als Grenzstellen einer konvergenten Folge solcher Linearkombinationen auftreten. Der Raum μ_1 aller dieser Linearkombinationen ist also abgeschlossen. In $\varphi\,\omega + \omega$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} (\ldots, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}, \mathfrak{x}^{(k;n)} \,\|\, \mathfrak{e}_k) = \mathfrak{e}_{1k}$, die abgeschlossene Hülle von $\mu_1^{[1]}$ muß also $\varphi\,\omega + \omega$ sein.

4. μ_{j-1} sei schon erklärt. Zu μ_{j-1} nehmen wir die Stellen

$$\mathfrak{b}^{(j,k;n)} = (\ldots, \mathfrak{o}, \overset{j}{\mathfrak{x}^{(k;n)}}, \mathfrak{o}, \ldots, \mathfrak{o} \,\|\, \mathfrak{o}, \ldots, \mathfrak{o}, \overset{j}{\mathfrak{e}_k}, \mathfrak{o}, \ldots, \mathfrak{o}, \overset{2j}{\mathfrak{e}_{m_{kn}}}, \mathfrak{o}, \ldots), \qquad k, n = 1, 2, \ldots$$

hinzu. Wieder gilt, daß der Raum μ_j aller endlichen Linearkombinationen der $\mathfrak{a}^{(i,k)}$ und $\mathfrak{b}^{(l,k;n)}$ mit $l \leqq j$ abgeschlossen ist und daß aus

$$\lim_{n\to\infty} (\ldots, \mathfrak{o}, \mathfrak{x}^{(k,n)}, \mathfrak{o}, \ldots, \mathfrak{o} \,\|\, \mathfrak{o}, \ldots, \mathfrak{o}, \mathfrak{e}_k) = \mathfrak{e}_{jk}$$

folgt, daß die abgeschlossene Hülle von $\mu^{[j]}$ wegen $\mu \geqq \mu_j$ gleich $\varphi\,\omega + j\,\omega$ ist.

Der Vereinigungsraum μ aller μ_j ist wieder abgeschlossen und besteht aus allen endlichen Linearkombinationen der $\mathfrak{a}^{(i,k)}$ und $\mathfrak{b}^{(j,k;n)}$ Also ist $\mu^{(j)}$ ein echter Teilraum von $\varphi\omega + j\omega$ mit der abgeschlossenen Hülle $\varphi\omega + j\omega$.

In der Terminologie der Einleitung können wir auch sagen, μ ist ein zu φ ähnlicher abgeschlossener echter Teilraum von $\varphi\omega + \omega\varphi$ mit $\overline{\mu} = (0)$. Wie in § 7 der anschließenden Arbeit von E. Hagemann kann man aus μ leicht einen zu $\varphi\omega + \omega\varphi$ selbst ähnlichen abgeschlossenen echten Teilraum ν von $\varphi\omega + \omega\varphi$ mit $\overline{\nu} = 0$ ableiten.

Die Matrix $\mathfrak{A}$, die die ähnliche Abbildung von $\varphi\omega + \omega\varphi$ auf ν liefert, ist nach unten beschränkt, das transponierte homogene Gleichungssystem $\mathfrak{u}\mathfrak{A} = \mathfrak{o}$ ist wegen $\overline{\nu} = 0$ nicht lösbar, wir haben damit in $\varphi\omega + \omega\varphi$ ein Gegenbeispiel gegen die Alternative aus § 4 der anschließenden Arbeit.

Diese Überlegungen lassen sich sofort auf die konvergenzfreien Räume höherer Stufe übertragen.

(Eingegangen am 3. 10. 1936.)

Das Reziprokentheorem in beliebigen linearen Koordinatenräumen.

Von

Elisabeth Hagemann in Essen *).

Für den Hilbertschen Raum σ_2 hat O. Toeplitz[1]) ein Theorem aufgestellt, das seither vielfache Verwendung gefunden hat:

Reziprokentheorem. *Ist* $\mathfrak{A} = (a_{pq})$ *eine im Hilbertschen Sinne beschränkte Matrix und ist das Infimum der positivdefiniten Hermiteschen Form* $\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \sum_{p,q}\sum_{n} \bar{a}_{np} a_{nq} \bar{x}_p x_q$ *unter der Nebenbedingung* $\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{x} = 1$ *größer als Null, so besitzt* $\mathfrak{A}$ *eine beschränkte linke Reziproke* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$, *und umgekehrt.*

Daneben haben E. Hellinger und O. Toeplitz die beiden folgenden Sätze angegeben[2]):

1. Formalsatz. *Besitzt die beschränkte Matrix* $\mathfrak{A}$ *sowohl eine linke beschränkte Reziproke* $\mathfrak{L}$ *als auch eine rechte beschränkte Reziproke* $\mathfrak{R}$, *so ist* $\mathfrak{L} = \mathfrak{R} = \mathfrak{A}^{-1}$ *die einzige beschränkte Reziproke;* $\mathfrak{A}$ *heißt dann „intakt".*

2. Formalsatz. *Besitzt* $\mathfrak{A}$ *nur eine einzige linke beschränkte Reziproke* $\mathfrak{L}$, *so ist diese auch rechte Reziproke und daher* $\mathfrak{A}$ *intakt.*

Während sich die Formalsätze unmittelbar auf jeden anderen Matrizenring übertragen, ist dies beim Reziprokentheorem nicht der Fall. Nicht nur der Beweis, den Toeplitz dafür gegeben hat, und auch die Beweise von E. Hilb[3]) und K. Friedrichs[4]) sind ganz und gar auf den Hilbertschen Raum zugeschnitten, sondern auch der Wortlaut des Satzes selbst haftet zunächst ganz am σ_2, da in vielen Matrizenringen die Bildung von $\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ überhaupt unmöglich ist.

Es gelingt nun in folgender Weise, den Wortlaut des Theorems so umzuformen, daß man überhaupt erst die Frage stellen kann, ob es in anderen Räumen gilt: $\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ ist nichts anderes als $|\mathfrak{y}|^2 = |\mathfrak{A}\mathfrak{x}|^2$, wo $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ die der Stelle $\mathfrak{x}$ vermöge der linearen Transformation $\mathfrak{A}$ ent-

*) Diese Arbeit ist von der philosophischen Fakultät der Universität Bonn als Dissertation angenommen worden. Den Herren O. Toeplitz und G. Köthe bin ich für mannigfache Anregungen und Ratschläge zu größtem Dank verpflichtet.

[1]) Gött. Nachr. Math.-Phys. Klasse 1907, S. 101—109.

[2]) Math. Annalen 69 (1909), S. 289—330.

[3]) Sitzungs-Ber. d. Phys. Med. Soz. Erlangen 40 (1908), S. 84—89.

[4]) Math. Annalen 109 (1933), S. 254—256.

sprechende Stelle $\mathfrak{y}$ mit den Koordinaten $y_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q$ $(p = 1, 2, \ldots)$ ist und $|\mathfrak{y}|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} |y_p|^2$. Das Infimum von $\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ ist also nichts anderes als das Quadrat von $m = \inf_{\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}} \frac{|\mathfrak{A}\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{x}|}$, und $m > 0$ bedeutet, daß aus $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}| \to 0$ stets auch $|\mathfrak{x}^{(n)}| \to 0$ folgt. Definiert man also

Eine beschränkte Matrix heiße stark nach unten beschränkt (st. n. u. b.), wenn die starke Konvergenz von $\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o}$ stets die starke Konvergenz von $\mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o}$ zur Folge hat,

so lautet das Reziprokentheorem:

Ist eine beschränkte Matrix st. n. u. b., so besitzt sie eine linke Reziproke, und umgekehrt.

Diese Formulierung läßt sich nun auf beliebige vollkommene Koordinatenräume λ übertragen[5]): Dem System der beschränkten Matrizen entspricht allgemein der Ring $\Sigma(\lambda)$ der λ in sich transformierenden Matrizen. In λ läßt sich ferner die starke Konvergenz erklären und damit auch der Begriff der st. n. u. b. Matrix. Es erhebt sich damit die *Frage*, in welchen vollkommenen Räumen λ folgender Satz gilt:

I. *Ist eine Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ st. n. u. b., so besitzt sie in $\Sigma(\lambda)$ eine linke Reziproke und umgekehrt.*

Hat man das Problem einmal so formuliert, so liegt es nahe, statt der starken Konvergenz auch die gewöhnliche (schwache) Konvergenz[6]) heranzuziehen. Man definiert also:

Eine Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ heiße nach unten beschränkt (n. u. b.), wenn die Konvergenz von $\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o}$ stets die Konvergenz von $\mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o}$ zur Folge hat.

Der I. entsprechende Satz lautet

II. *Ist eine Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ n. u. b., so besitzt sie in $\Sigma(\lambda)$ eine linke Reziproke und umgekehrt.*

In σ_2 ist dieser Satz ebenfalls richtig, ist bisher allerdings nicht hervorgehoben worden.

Die Umkehrungen von Satz I und II sind für jedes vollkommene λ sofort einzusehen. Die Sätze selbst sind für die Räume φ, ω aus der vollen Auflösungstheorie, die O. Toeplitz[7]) dafür gegeben hat, unmittelbar abzulesen. Auch für den halbfiniten Raum $\psi = \varphi + \omega$ er-

---

[5]) Für die aus der Theorie der linearen Koordinatenräume verwendeten Begriffe und Sätze vgl. G. Köthe und O. Toeplitz, Journal f. d. reine u. angew. Math. 171 (1934), S. 193—226, im folgenden als K. T. zitiert.

[6]) K. T. § 3.

[7]) Palermo Rendiconti 28 (1909), S. 88—96.

geben sie sich unmittelbar aus der Gleichungstheorie von G. Köthe und O. Toeplitz [8]).

Nachdem es nun gelungen ist, dem Reziprokentheorem eine Gestalt zu geben, in der es für φ, ω, ψ einerseits und σ_2 andererseits gültig ist, entsteht der Wunsch nach einem Beweise, der für alle diese voneinander so verschiedenen Räume zugleich gilt. Es ist das Ziel dieser Arbeit, einen solchen Beweis aufzustellen und damit auch für beliebige vollkommene Räume λ gewisse Aufschlüsse über die Gültigkeit des Reziprokentheorems zu erhalten.

Es gelingt uns, für beliebige vollkommene Räume λ folgenden Satz abzuleiten (§ 2):

Hauptsatz. *Eine Matrix* $\mathfrak{A}$ *aus* $\Sigma(\lambda)$ *besitzt dann und nur dann eine linke Reziproke in* $\Sigma(\lambda)$, *wenn* $\mathfrak{A}$ *n. u. b. ist und wenn der Bildraum* $\mathfrak{A}\lambda$ *einen Komplementärraum besitzt.*

Der hier auftretende Begriff des Komplementärraumes ist ebenfalls aus der Theorie des Hilbertschen Raumes geläufig [9]): ν heißt Komplementärraum zu μ in λ, wenn jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ sich auf eine und nur eine Art als $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ darstellen läßt, $\mathfrak{y}$ aus μ, $\mathfrak{z}$ aus ν, und wenn aus der Konvergenz einer Folge $\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{y}^{(n)} + \mathfrak{z}^{(n)}$ stets folgt, daß $\mathfrak{y}^{(n)}$ und $\mathfrak{z}^{(n)}$ einzeln konvergente Folgen sind.

Im Hilbertschen Raum σ_2 leistet bekanntlich das Orthogonalisierungsverfahren die Konstruktion eines Komplementärraumes für *jeden* abgeschlossenen Teilraum von σ_2. Für σ_2 liefert also Theorem II das Reziprokentheorem. Allgemein ist durch den Hauptsatz die Frage nach der Gültigkeit von II auf die Frage nach der Existenz eines Komplementärraumes speziell für den Teilraum $\mathfrak{A}\lambda$ von λ zurückgeführt.

In den §§ 6 und 7 wird diese Frage für die konvergenzfreien Räume abzählbarer Stufe [10]) gelöst. In $\varphi, \omega, \psi, \varphi\omega$ und $\omega\varphi$ gilt der Komplementärraumsatz, d. h. jeder lineare abgeschlossene Teilraum eines dieser Räume besitzt einen Komplementärraum. In $\varphi\omega + \omega\varphi$ und allen Räumen höherer Stufe ist dies nicht mehr der Fall, und es gibt in diesen Räumen Gegenbeispiele sowohl zu I wie zu II.

Eine für beliebige vollkommene Räume gültige Aussage erhält man, wenn man sich auf abgeschlossene Teilräume von endlichem Index in λ

---

[8]) Journal f. d. reine u. angew. Math. 165 (1931), S. 116—127.

[9]) Der Begriff des Komplementärraumes tritt in der hier gebrauchten Fassung für beliebige vollkommene Räume schon in der Dissertation von F. Menn auf: Die konvergenzfreien linearen Räume endlicher Stufe und die dazugehörigen Matrizenringe, Münster 1934. Vgl. auch G. Köthe, Math. Annalen 111 (1935), S. 229—258, speziell § 5, Definition 1.

[10]) Vgl. die in Anm. [9]) zitierten Arbeiten.

beschränkt. Sie haben stets einen Komplementärraum (§ 5). Man kann dieses Resultat anwenden, um für gewisse spezielle Matrizentypen das Reziprokentheorem in der Fassung II zu beweisen.

Der Zusammenhang zwischen I und II wird in § 3 klargestellt: In allen Räumen, in denen jede beschränkte unendliche Menge von Stellen eine konvergente Teilfolge besitzt, fallen n. u. b. und st. n. u. b. Matrizen zusammen; in diesen Räumen läßt sich also ein dem Hauptsatz entsprechendes Theorem für st. n. u. b. Matrizen aufstellen.

Da zu vermuten ist, daß die Zahl der vollkommenen Räume, in denen der Komplementärraumsatz gilt, recht gering ist, es also auch nur wenige Räume geben wird, in denen I und II gelten, taucht die Frage auf, ob vielleicht *Teile* des Reziprokentheorems für größere Klassen von Räumen nachgewiesen werden können.

Nun ergibt sich aus den oben angegebenen Formalsätzen sofort, daß aus der Existenz der linken Reziproken $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{A}$ folgt, daß entweder die transponierten homogenen Gleichungen $\mathfrak{u}\mathfrak{A} = \mathfrak{o}$, d. h. $\sum_{p=1}^{\infty} a_{pq} u_p = 0$ eine Lösung $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{o}$ im dualen Raum λ^* haben, oder daß $\mathfrak{A}$ intakt ist. Als Teilaussage des Reziprokentheorems kann man also folgenden Satz aufstellen:

Alternative. *Ist $\mathfrak{A}$ n. u. b. oder st. n. u. b., so ist entweder $\mathfrak{A}$ intakt oder die Gleichungen $\mathfrak{u}\mathfrak{A} = \mathfrak{o}$ besitzen eine nichttriviale Lösung.*

Es zeigt sich (§ 4), daß dieser Satz in allen den Räumen giltig ist, in denen jeder abgeschlossene Teilraum vollabgeschlossen ist. Die Resultate der vorangehenden Arbeit von G. Köthe[11]) zeigen, daß dies für verhältnismäßig viele Räume der Fall ist. Immerhin ist auch dieser Satz schon in $\varphi\omega + \omega\varphi$ und den konvergenzfreien Räumen höherer Stufe falsch.

§ 1.

Nach unten beschränkte und stark nach unten beschränkte Matrizen.

λ sei ein vollkommener Raum im Sinne von K. T. § 2, $\Sigma(\lambda)$ der zu λ gehörige Matrizenring (vgl. K. T. § 6).

Definition 1. *Eine Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ heiße nach unten beschränkt (n. u. b.), wenn jede Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus λ, deren Bildfolge $\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o} = (0, 0, \ldots)$ konvergiert, selbst gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert.*

Definition 2. *Eine Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ heiße stark nach unten beschränkt (st. n. u. b.), wenn jede Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus λ, deren Bildfolge $\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ stark gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert, selbst stark gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert.*

---

[11]) Wir zitieren sie im folgenden mit K.

Satz 1. *Besitzt $\mathfrak{A}$ eine linke Reziproke in $\Sigma(\lambda)$, so ist $\mathfrak{A}$ n. u. b.*

Beweis. Sei $\mathfrak{L}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ und sei $\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o}$ konvergent. Wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{L}$ (K. T. § 6, Satz 6) ist dann auch $\mathfrak{L}\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{L}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}) = (\mathfrak{L}\mathfrak{A})\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o}$ konvergent.

Satz 2. *Besitzt $\mathfrak{A}$ eine linke Reziproke in $\Sigma(\lambda)$, so ist $\mathfrak{A}$ st. n. u. b.*

Beweis analog mit Hilfe von K. T. § 7, Satz 6.

Definition 3. *μ und ν seien zwei lineare Teilräume von λ. μ und ν heißen ähnlich (bezüglich λ), wenn es eine eineindeutige und im Sinne der in λ erklärten Konvergenz beiderseits stetige Abbildung von μ auf ν gibt.*

Definition 4. *μ und ν seien zwei lineare Teilräume von λ. μ und ν heißen stark ähnlich (bezüglich λ), wenn es eine eineindeutige und im Sinne der in λ erklärten starken Konvergenz beiderseits stetige Abbildung von μ auf ν gibt.*

Satz 3. *Ist $\mathfrak{A}$ nach unten beschränkt, so ist die durch $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ vermittelte Abbildung von λ auf $\mu = \mathfrak{A}\lambda$ eine ähnliche Abbildung.*

Beweis. 1. *Die Abbildung ist eineindeutig.*

Es sei $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{y}$ für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ aus λ. Die Folge $\mathfrak{A}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = \mathfrak{o}, \ldots$ ist gegen $\mathfrak{o}$ konvergent. Da $\mathfrak{A}$ n. u. b. ist, ist auch $\mathfrak{x} - \mathfrak{y}$, $\mathfrak{x} - \mathfrak{y}, \ldots$ gegen $\mathfrak{o}$ konvergent, d. h. $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$.

2. *Die Abbildung ist beiderseits stetig.*

Nach K. T. § 6, Satz 6, ist die Abbildung von λ auf μ stetig. Sei umgekehrt $\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ konvergent. Dies ist gleichbedeutend mit $\mathfrak{y}^{(n)} - \mathfrak{y}^{(m)} = \mathfrak{A}(\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}^{(m)}) \to \mathfrak{o}$ für $n, m \to \infty$. Da $\mathfrak{A}$ n. u. b. ist, gilt auch $\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}^{(m)} \to \mathfrak{o}$ für $n, m \to \infty$; also ist $\mathfrak{x}^{(n)}$ konvergent. Ebenso entsprechen auch Folgen mit Limes einander.

Satz 4. *Ist $\mathfrak{A}$ st. n. u. b., so ist die durch $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ vermittelte Abbildung von λ auf $\mu = \mathfrak{A}\lambda$ eine stark ähnliche Abbildung.*

Der Beweis verläuft genau so wie der von Satz 1.

Definition 5. *Ein linearer Teilraum μ von λ heiße abgeschlossen, wenn mit den Gliedern einer konvergenten Folge stets auch ihr Limes in μ liegt.*

Definition 6. *Ein linearer Teilraum μ von λ heiße stark abgeschlossen, wenn mit den Gliedern einer stark konvergenten Folge stets auch ihr Limes in μ liegt.*

Satz 5. *Ist $\mathfrak{A}$ n. u. b., so ist der Bildraum $\mu = \mathfrak{A}\lambda$ linear und abgeschlossen.*

Beweis. μ ist linear, da $\mathfrak{A}$ linear ist. Da ferner jede konvergente Folge von Stellen aus λ nach K. T. § 3, Satz 5, einen Limes besitzt, hat

nach Satz 3 auch jede konvergente Folge von Stellen aus μ einen Limes in μ, μ ist abgeschlossen.

Mit Hilfe von K. T. § 5, Satz 3, Folgerung, beweist man analog

Satz 6. *Ist $\mathfrak{A}$ st. n. u. b., so ist der Bildraum $\mu = \mathfrak{A}\lambda$ linear und stark abgeschlossen.*

§ 2.

Der Hauptsatz für n. u. b. Matrizen.

Definition 1. *μ sei ein abgeschlossener linearer Teilraum von λ. Der abgeschlossene lineare Teilraum ν heißt Komplementärraum zu μ, wenn jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ sich eindeutig in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ darstellen läßt, wo $\mathfrak{y}$ in μ, $\mathfrak{z}$ in ν liegt, und wenn ferner aus der Konvergenz von $\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{y}^{(n)} + \mathfrak{z}^{(n)}$ stets die Konvergenz von $\mathfrak{y}^{(n)}$ und $\mathfrak{z}^{(n)}$ einzeln folgt*[12]).

Satz 1. *Ist $\mathfrak{A}$ n. u. b. und hat $\mu = \mathfrak{A}\lambda$ einen Komplementärraum ν, so besitzt $\mathfrak{A}$ eine linke Reziproke in $\Sigma(\lambda)$.*

Beweis. Nach § 1, Satz 3, ist die Umkehrung der Abbildung $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ eine abstrakte lineare stetige Transformation $\mathfrak{T}(\mu) = \lambda$. Wir erweitern den Definitionsbereich von $\mathfrak{T}$ von μ auf das ganze λ, indem wir $\mathfrak{T}$ auf allen Stellen von ν gleich $\mathfrak{o}$ setzen. Da jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ sich aus einer Stelle $\mathfrak{y}$ aus μ und einer Stelle $\mathfrak{z}$ aus ν zusammensetzt, $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$, ist $\mathfrak{T}$ durch die Festsetzung $\mathfrak{T}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{y}) + \mathfrak{T}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{y}) + \mathfrak{o} = \mathfrak{T}(\mathfrak{y})$ auf dem ganzen λ erklärt und linear. $\mathfrak{T}$ ist auch auf dem ganzen λ stetig, denn ist $\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{y}^{(n)} + \mathfrak{z}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ konvergent, so konvergiert $\mathfrak{T}(\mathfrak{x}^{(n)}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{y}^{(n)})$ gegen $\mathfrak{T}(\mathfrak{y})$, da $\mathfrak{T}$ auf μ stetig ist; es ist aber $\mathfrak{T}(\mathfrak{y}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{y}) + \mathfrak{o} = \mathfrak{T}(\mathfrak{y}) + \mathfrak{T}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{x})$.

Nach K. T. § 6, Satz 7, wird jede abstrakte, stetige, lineare, auf dem ganzen λ erklärte Transformation $\mathfrak{T}$ durch eine Matrix $\mathfrak{L}$ aus $\Sigma(\lambda)$ vermittelt. $\mathfrak{L}$ ist nun die linke Reziproke von $\mathfrak{A}$: Nach Definition von $\mathfrak{T}$ ist $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$, also $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{L}\mathfrak{A})\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$. Setzt man für $\mathfrak{x}$ der Reihe nach die Einheitsstellen $\mathfrak{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $\mathfrak{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots), \ldots$ ein, so ergibt sich $\mathfrak{L}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$. Umgekehrt gilt

Satz 2. *Hat $\mathfrak{A}$ eine linke Reziproke $\mathfrak{L}$, so besitzt $\mu = \mathfrak{A}\lambda$ einen Komplementärraum.*

Beweis. ν sei der Raum aller $\mathfrak{z}$ aus λ, für die $\mathfrak{L}\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$ ist. Da $\mathfrak{L}$ nach § 1, Satz 1 und 3, eine ähnliche Abbildung von μ auf das ganze λ vermittelt, gibt es zu jedem $\mathfrak{x}$ aus λ eine und nur eine Stelle $\mathfrak{y}$ aus μ, für die $\mathfrak{L}\mathfrak{x} = \mathfrak{L}\mathfrak{y}$ gilt. Es ist also $\mathfrak{L}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} - \mathfrak{y}$ ist eine Stelle aus ν; jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ ist daher in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ darstellbar, $\mathfrak{y}$ in μ, $\mathfrak{z}$ in ν.

---

[12]) Vgl. Anm. [9]).

Diese Darstellung ist eindeutig; denn wäre zugleich $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{z}_1$, so hätten wir $\mathfrak{L}\mathfrak{x} = \mathfrak{L}\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{L}\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{L}\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{L}\mathfrak{y}$, also $\mathfrak{L}(\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}) = \mathfrak{o}$, woraus $\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y} = \mathfrak{o}$ folgen würde, da $\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}$ in μ liegen müßte.

Diese Zerlegung von λ ist schließlich auch stetig: Es sei $\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{y}^{(n)} + \mathfrak{z}^{(n)}$ konvergent. Da $\mathfrak{L}$ als Matrix aus $\Sigma(\lambda)$ stetig ist, ist auch $\mathfrak{L}\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{L}\mathfrak{y}^{(n)}$ konvergent. $\mathfrak{L}$ vermittelt eine ähnliche Abbildung von μ auf λ, also ist auch $\mathfrak{y}^{(n)}$ konvergent. $\mathfrak{z}^{(n)}$ konvergiert schließlich als Folge der Differenzen $\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{y}^{(n)}$. ν ist daher Komplementärraum zu μ.

Wir fassen Satz 1 und 2 zusammen zu

Hauptsatz 1. *Eine nach unten beschränkte Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ besitzt dann und nur dann eine linke Reziproke in $\Sigma(\lambda)$, wenn der Bildraum $\mathfrak{A}\lambda$ einen Komplementärraum hat.*

λ sei speziell der Hilbertsche Raum σ_2. Jeder abgeschlossene lineare Teilraum μ von σ_2 besitzt bekanntlich einen Komplementärraum, nämlich seinen Orthogonalraum, der aus allen auf allen Stellen von μ senkrechten Stellen besteht. Damit ist für den Hilbertschen Raum das Reziprokentheorem in der Fassung II der Einleitung bewiesen. Weitere Beispiele für Räume, in denen jeder abgeschlossene lineare Teilraum einen Komplementärraum besitzt, folgen in § 6.

§ 3.

Der Hauptsatz für st. n. u. b. Matrizen.

Eine Übertragung der Schlüsse von § 2 auf st. n. u. b. Matrizen läßt sich nicht ohne weiteres durchführen, da nicht mehr in allen vollkommenen Räumen eine abstrakte, stark stetige, lineare Transformation $\mathfrak{T}$ stets durch eine Matrix vermittelt wird. Wir müssen deshalb noch eine einschränkende Voraussetzung über die Räume machen, um zu einem analogen Ergebnis zu kommen.

Definition 1. *In dem vollkommenen Raum λ gilt der Grenzstellensatz, wenn jede beschränkte unendliche Menge von Stellen aus λ eine konvergente Folge enthält.*

Für ein Kriterium, wann diese Voraussetzung erfüllt ist, vergleiche K.

Satz 1. *Gilt in λ der Grenzstellensatz, so ist jede st. n. u. b. Matrix aus $\Sigma(\lambda)$ auch n. u. b.*

Beweis. $\mathfrak{A}$ sei st. n. u. b., aber nicht n. u. b. Dann gibt es eine nicht nach $\mathfrak{o}$ konvergente Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$, deren Bildfolge $\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert. Wäre die Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ beschränkt, so gäbe es nach dem Grenzstellensatz eine konvergente Teilfolge mit einem Limes $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, die homogenen Gleichungen $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ wären lösbar, was § 1, Satz 4, widerspricht.

Sei also $\mathfrak{x}^{(n)}$ unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge von natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ und eine Stelle $\mathfrak{u}$ aus λ^*, so daß

$$|\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(n_1)}| > 1, \quad |\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(n_2)}| > 4, \quad |\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(n_3)}| > 9, \ldots$$

ist. Die Folge $\bar{\mathfrak{x}}^{(n_k)} = \frac{1}{k}\,\mathfrak{x}^{(n_k)}$ wäre dann ebenfalls noch unbeschränkt, da $|\mathfrak{u}\,\bar{\mathfrak{x}}^{(n_k)}| > k$ ausfällt. Die Bildfolge $\bar{\mathfrak{y}}^{(n_k)} = \mathfrak{A}\,\bar{\mathfrak{x}}^{(n_k)} = \frac{1}{k}\,\mathfrak{y}^{(n_k)}$ konvergiert aber *stark* gegen $\mathfrak{o}$: Die konvergente Folge $\mathfrak{y}^{(n_1)}, \mathfrak{y}^{(n_2)}, \ldots$ bildet nach K. T. § 5, Satz 5, eine beschränkte Menge in λ. Ist U eine beschränkte Menge aus λ^*, so ist nach K. T. § 5, Satz 1, für jedes $\mathfrak{u}$ aus U $|\mathfrak{u}\,\mathfrak{y}^{(n_k)}| \leqq M(U)$, also $|\mathfrak{u}\,\bar{\mathfrak{y}}^{(n_k)}| \leqq \frac{1}{k}\,M(U)$, d. h. $\bar{\mathfrak{y}}^{(n_k)}$ konvergiert stark gegen $\mathfrak{o}$. Da $\mathfrak{A}$ st. n. u. b. ist, müßte nach § 1, Satz 4, auch $\bar{\mathfrak{x}}^{(n_k)}$ stark gegen $\mathfrak{o}$ konvergieren; damit erhalten wir einen Widerspruch.

§ 2, Hauptsatz 1 ergibt sofort

Hauptsatz 2. *In λ gelte der Grenzstellensatz. Eine st. n. u. b. Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ besitzt dann und nur dann eine linke Reziproke in $\Sigma(\lambda)$, wenn der Bildraum $\mathfrak{A}\,\lambda$ einen Komplementärraum hat.*

Da im Hilbertschen Raum der Grenzstellensatz gilt (vgl. etwa K.) enthält Hauptsatz 2 das Reziprokentheorem für den Hilbertschen Raum in der ursprünglichen Fassung von O. Toeplitz.

Satz 1 läßt sich umkehren für metrische vollkommene Räume, d. h. solche Räume, in denen es eine lineare Metrik gibt, so daß die metrische Konvergenz mit der starken Konvergenz übereinstimmt. Ein Kriterium, wann ein vollkommener Raum metrisch ist, ist in K. T. S. 203, Anm. 14 gegeben.

Satz 3. *Ist λ vollkommen und metrisch, so ist jede n. u. b. Matrix aus $\Sigma(\lambda)$ auch st. n. u. b.*

Beweis. $\mathfrak{A}$ sei eine n. u. b. Matrix, die nicht st. n. u. b. ist. Dann gibt es eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$, die nicht stark gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert, obwohl $\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{y}^{(n)}$ stark gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert. Aus der starken Konvergenz folgt die Konvergenz von $\mathfrak{y}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o}$. $\mathfrak{A}$ ist n. u. b., also muß nach § 1, Satz 3, $\mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o}$ konvergieren. Die Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ ist nach K. T. § 5, Satz 5, beschränkt, nach der Voraussetzung über die Metrik ist also $|\mathfrak{x}^{(n)}| \leqq K$. Da $|\mathfrak{x}^{(n)}| \nrightarrow 0$, gibt es eine Teilfolge, sie heiße wieder $\mathfrak{x}^{(n)}$, mit $|\mathfrak{x}^{(n)}| \to r \neq 0$. Wir können $|\mathfrak{x}^{(n)}| \to 1$ annehmen. Es ist also $|\mathfrak{x}^{(n)}| \to 1$, $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{o}$, $|\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}^{(n)}| = |\mathfrak{y}^{(n)}| \to 0$. Die Folge $\mathfrak{t}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{|\mathfrak{y}^{(n)}|}}\,\mathfrak{x}^{(n)}$ ist unbeschränkt; ihre Bildfolge $\mathfrak{A}\,\mathfrak{t}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{|\mathfrak{y}^{(n)}|}}\,\mathfrak{y}^{(n)}$ konvergiert stark gegen $\mathfrak{o}$, da nach Voraussetzung $|\mathfrak{A}\,\mathfrak{t}^{(n)}| = \sqrt{|\mathfrak{y}^{(n)}|} \to 0$. Erst recht ist $\mathfrak{A}\,\mathfrak{t}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o}$ konver-

gent. Da $\mathfrak{A}$ n. u. b. ist, ist auch $\mathfrak{t}^{(n)} \to \mathfrak{o}$, was der Unbeschränktheit von $\mathfrak{t}^{(n)}$ widerspricht.

Wie aus K. T. § 12 bis § 14 und aus K. folgt, sind also z. B. in allen Räumen σ_r, r reell und $\geqq 1$, und in σ_∞ st. n. u. b. und n. u. b. Matrizen identisch.

§ 4.

Die Alternative. Kriterien für intakte Matrizen.

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{A}$ *n. u. b. und ist* $\mu = \mathfrak{A}\lambda \geqq \varphi$, *so ist* $\mu = \lambda$ *und* $\mathfrak{A}$ *ist intakt.*

Beweis. Da $\mu \geqq \varphi$ ist, enthält μ die Abschnitte $\mathfrak{x}_n$ jeder Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ. μ ist abgeschlossen (§ 1, Satz 5), daher enthält es auch $\mathfrak{x}$ als Limes seiner Abschnitte (vgl. K. T. § 3, Satz 2), also ist $\mu = \lambda$. Nach § 1, Satz 3, vermittelt $\mathfrak{A}$ daher eine Homöomorphie von λ auf sich selbst. Nach K. T. § 8, Satz 1 und 4, wird die zu $\mathfrak{A}$ inverse Abbildung ebenfalls durch eine Matrix $\mathfrak{B}$ aus $\Sigma(\lambda)$ vermittelt und es ist $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$.

Zur Formulierung der Alternative benötigen wir einige Begriffe, für deren ausführliche Untersuchung wir auf K. verweisen.

Definition 1. *μ sei ein linearer Teilraum des vollkommenen Raumes λ. Die Gesamtheit der Stellen* $\mathfrak{u}$ *aus* λ^*, *die zu allen Stellen* $\mathfrak{x}$ *aus* μ *orthogonal sind, für die also* $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = 0$ *gilt, bilden einen linearen Raum* $\bar{\mu}$, *den Orthogonalraum von* μ.

$\bar{\mu}$ ist stets abgeschlossen; denn ist eine Stelle $\mathfrak{u}$ Limes von Stellen $\mathfrak{u}^{(n)}$ aus $\bar{\mu}$, so liegt auch $\mathfrak{u}$ in $\bar{\mu}$, da aus $\mathfrak{u}^{(n)}\mathfrak{x} = 0$ auch $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = \lim \mathfrak{u}^{(n)}\mathfrak{x} = 0$ folgt.

Der Orthogonalraum $\bar{\bar{\mu}}$ von $\bar{\mu}$ umfaßt μ und ist abgeschlossen, enthält also die kleinste lineare abgeschlossene Hülle von μ. Ist $\mu = \bar{\bar{\mu}}$, so heiße μ *orthogonalabgeschlossen.* Jeder orthogonalabgeschlossene Raum ist abgeschlossen, aber nicht umgekehrt (vgl. K.).

Definition 2. *Eine Menge von Stellen heißt vollabgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.*

Der Begriff „Häufungspunkt" ist im Sinne der in K. T., S. 197, Anm. 11 eingeführten Topologie zu verstehen.

Orthogonalraumsatz. *Jeder orthogonalabgeschlossene lineare Teilraum eines vollkommenen Raums ist vollabgeschlossen, und umgekehrt.*

Für den Beweis vergleiche K.

Wir sind jetzt in der Lage, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 2 (Alternative). *Ist* $\mu = \mathfrak{A}\lambda$ *vollabgeschlossen,* $\mathfrak{A}$ *n. u. b., so gilt: Entweder ist das transponierte homogene Gleichungssystem* $\mathfrak{u}\mathfrak{A} = \mathfrak{o}$ *in* λ^* *lösbar, oder* $\mathfrak{A}$ *ist intakt.*

Beweis. Aus dem Orthogonalraumsatz folgt, daß $\mu = \overline{\overline{\mu}}$ ist. Es sei $\mathfrak{u}\mathfrak{A} = \mathfrak{o}$ unlösbar. Aus $\mathfrak{u}\mathfrak{A}\mathfrak{x} = 0$ für alle $\mathfrak{x}$, d. h. $\mathfrak{u}\mathfrak{y} = 0$ für alle $\mathfrak{y}$ aus μ folgt also stets $\mathfrak{u} = \mathfrak{o}$, d. h. es ist $\overline{\mu} = 0$. Daher ist $\overline{\overline{\mu}} = \mu = \lambda$. Satz 1 ergibt, daß $\mathfrak{A}$ intakt ist.

Satz 2 kann unter der zusätzlichen Voraussetzung des Grenzstellensatzes für λ auch für st. n. u. b. Matrizen ausgesprochen werden.

In allen den vollkommenen Räumen, in denen jeder abgeschlossene Teilraum vollabgeschlossen ist, ist die Alternative ohne jede Voraussetzung über μ gültig. In K. wird eine große Klasse von Räumen angegeben, in denen dies zutrifft. So in allen Räumen, in denen der Komplementärraumsatz gilt, wie σ_2, aber auch in solchen Fällen, in denen über die Gültigkeit des Komplementärraumsatzes noch nichts bekannt ist, z. B. in allen von σ_2 verschiedenen σ_r und in σ_∞.

In $\varphi\omega + \omega\varphi$ und den konvergenzfreien Räumen höherer Stufe gibt es jedoch abgeschlossene, aber nicht vollabgeschlossene Teilräume. Mit diesen lassen sich auch n. u. b. Matrizen konstruieren, für die $\mathfrak{u}\mathfrak{A} = \mathfrak{o}$ unlösbar ist, obwohl $\mathfrak{A}$ nicht intakt ist.

Wir schließen diesen Paragraphen mit einem dritten Kriterium für die Intaktheit einer Matrix,

Satz 3. *Eine Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ ist dann und nur dann intakt, wenn $\mathfrak{A}\lambda = \lambda$ und $\mathfrak{A}'\lambda^* = \lambda^*$ ist, $\mathfrak{A}'$ die zu $\mathfrak{A}$ transponierte Matrix.*

Beweis. a) Eine intakte Matrix $\mathfrak{A}$ hat als Bildraum den ganzen Raum λ. Ist $\mathfrak{A}$ intakt, so ist $\mathfrak{A}'$ eine intakte Transformation von λ^* in sich (vgl. K. T. § 8, Satz 5), die Bedingungen sind also notwendig.

b) Es sei $\mathfrak{A}\lambda = \lambda$ und $\mathfrak{A}'\lambda^* = \lambda^*$. Wir nehmen $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ an für ein $\mathfrak{x}$ aus λ. Dann ist auch $\mathfrak{u}\mathfrak{A}\mathfrak{x} = 0$ für alle $\mathfrak{u}$ aus λ^*. Da die $\mathfrak{u}\mathfrak{A}$ nach Voraussetzung alle Stellen von λ^* durchlaufen, muß $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ sein.

Die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ läßt sich also umkehren.

Die inverse Abbildung ist stetig.

Sei $\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ konvergent. Nun bedeutet die Konvergenz von $\mathfrak{y}^{(n)}$, daß für alle $\mathfrak{u}$ aus λ^* $\mathfrak{u}\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{u}\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ konvergiert. Da $\mathfrak{u}\mathfrak{A}$ alle Stellen $\mathfrak{v}$ von λ^* durchläuft, also $\mathfrak{v}\mathfrak{x}^{(n)}$ für alle $\mathfrak{v}$ aus λ^* konvergiert, ist auch $\mathfrak{x}^{(n)}$ konvergent.

Die durch $\mathfrak{A}$ gegebene Abbildung von λ auf das ganze λ ist also eineindeutig und in beiden Richtungen stetig, also eine Homöomorphie. Nach K. T. § 8, Satz 4, ist $\mathfrak{A}$ intakt.

§ 5.

Das Reziprokentheorem für spezielle Matrizentypen.

Wir werden in diesem Paragraphen einige Typen von Matrizen behandeln, für die aus der Beschränktheit nach unten unmittelbar die

Existenz der linken Reziproken folgt. Eine einfache Folgerung aus § 4, Satz 1, ist

Satz 1. *λ sei ein vollkommener Raum, $\mathfrak{A}$ eine Matrix aus $\Sigma(\lambda)$. Ist $\mathfrak{A}$ n. u. b. und verschwinden alle Elemente von $\mathfrak{A}$ unterhalb der Hauptdiagonalen, so ist $\mathfrak{A}$ intakt.*

Beweis. Alle Diagonalelemente a_{ii} von $\mathfrak{A}$ sind von Null verschieden; denn wäre etwa $a_{nn} = 0$, so wären die ersten n Spalten von $\mathfrak{A}$ linear abhängig, die Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ wäre durch ein $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ lösbar, $\mathfrak{A}$ könnte also nicht n. u. b. sein. Aus den Spalten von $\mathfrak{A}$ lassen sich daher alle finiten Stellen linear kombinieren. λ enthält alle finiten Stellen, also auch $\mathfrak{A}\lambda$, d. h. $\mathfrak{A}\lambda \geqq \varphi$. Nach § 4, Satz 1, ist $\mathfrak{A}$ intakt.

Allgemeinere Aussagen liefert

Satz 2. *λ sei vollkommen. Hat der abgeschlossene lineare Teilraum μ endlichen Index n in λ, d. h. läßt sich jede Stelle von λ linear kombinieren aus einer Stelle von μ und n (und nicht weniger) festen linear unabhängigen Stellen aus λ, so besitzt μ einen Komplementärraum der Dimension n.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß es eine Stelle $\mathfrak{a}_1$ in λ gibt, derart daß der Raum μ_1 der Stellen $\mathfrak{x} + \alpha\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{x}$ aus μ, α beliebig komplex, einen abgeschlossenen Teilraum von λ vom Index $n - 1$ bildet und daß der eindimensionale Raum ν_1 aller $\alpha\mathfrak{a}_1$ ein Komplementärraum von μ in μ_1 ist.

$\mathfrak{a}_1$ sei eine von n Stellen, die μ zu λ ergänzen. Offenbar ist jede Stelle aus μ_1 auf eine und nur eine Weise in der Form $\mathfrak{x} + \alpha\mathfrak{a}_1$ darstellbar, $\mathfrak{x}$ aus μ, $\alpha\mathfrak{a}_1$ aus ν. Sei ferner $\mathfrak{x}^{(n)} + \alpha_n\mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{o}$. Ist $|\alpha_n| \to 0$, so ist $\alpha_n\mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{o}$, also auch $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{o}$. Ist $|\alpha_n| \nrightarrow 0$, so gibt es eine Teilfolge α_j mit $|\alpha_j| > k > 0$. Dann ist auch

$$\frac{1}{\alpha_j}(\mathfrak{x}^{(j)} + \alpha_j\mathfrak{a}_1) = \frac{1}{\alpha_j}\mathfrak{x}^{(j)} + \mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{o},$$

$\mathfrak{a}_1$ ist Limes von Stellen aus μ, müßte wegen der Abgeschlossenheit von μ in μ liegen, was unmöglich ist. Mithin ist ν_1 Komplementärraum von μ in μ_1. μ_1 hat offenbar den Index $n - 1$ und ist abgeschlossen, da μ und ν_1 abgeschlossen sind.

Fortsetzung des Verfahrens liefert n eindimensionale Räume $\nu_1, \ldots, \nu_n$, die zusammen einen n-dimensionalen Raum ν bilden, der Komplementärraum zu μ ist.

Satz 2 und Hauptsatz 1 ergibt sofort

Satz 3. *Ist $\mathfrak{A}$ n. u. b. und hat der Bildraum $\mathfrak{A}\lambda$ endlichen Index in λ, so besitzt $\mathfrak{A}$ eine linke Reziproke.*

Satz 4. *Ist $\mathfrak{A}$ n. u. b. und enthält es unterhalb einer bestimmten Diagonalparallelen nur Nullen, so besitzt $\mathfrak{A}$ eine linke Reziproke.*

Beweis. $\mathfrak{A}$ habe die Form

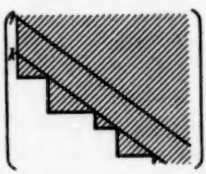
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot \\ 0 & a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n+2,3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{A}\lambda$ endlichen Index in λ hat. Da $\mathfrak{A}$ n. u. b. ist, besteht zwischen den Spalten $\mathfrak{a}_i$ von $\mathfrak{A}$ keine lineare Abhängigkeit. Als Bildstelle von $\mathfrak{e}_i$ liegt $\mathfrak{a}_i$ in $\mathfrak{A}\lambda$, ebenso alle endlichen Linearkombinationen der $\mathfrak{a}_i$.

Sind alle $a_{n+k,\,k+1} \neq 0$, so sind die $\mathfrak{a}_i$ linear unabhängig und bei Hinzunahme von $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{n-1}$ kann ich alle Stellen aus φ in der Form $\mathfrak{x} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathfrak{e}_i$ darstellen, $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{A}\lambda$. Wir nehmen nun wie beim Beweise von Satz 2 zu $\mathfrak{A}\lambda$ soviele der $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{n-1}$ zu μ hinzu, daß der entstehende abgeschlossene Raum $\tilde{\mu} > \mu$ alle $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{n-1}$ enthält. Dann ist $\tilde{\mu} \geqq \varphi$, also $\tilde{\mu} = \lambda$, μ von endlichem Index in λ.

Sind nicht alle $a_{n+k,\,k+1} \neq 0$, so kann man so schließen[13]): Als „Länge" einer finiten Stelle $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ bezeichnet man den Index n der letzten von Null verschiedenen Koordinate. Man bilde nun der Reihe nach die Linearkombination $\mathfrak{b}_1$ der $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ von kleinster Länge, dann eine, $\mathfrak{b}_2$, von der nächstgrößeren Länge usw. Die Länge von $\mathfrak{b}_i$ ist dann wegen der linearen Unabhängigkeit der $\mathfrak{a}_i$ höchstens gleich der von $\mathfrak{a}_i$, also $\leqq n + i - 1$. Als Längen der $\mathfrak{b}_i$ kommen also sämtliche natürlichen Zahlen mit Ausnahme endlichvieler vor, etwa $n_1, \ldots, n_k$. Aus $\mathfrak{e}_{n_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{n_k}$ und den Stellen von μ lassen sich jetzt wieder alle Stellen aus λ linear kombinieren und man schließt weiter wie im früheren Fall.

Die Schlüsse von Satz 4 gelten auch noch für den folgenden Typ von Matrizen:



[13]) Wir folgen der von O. Toeplitz in der in Anm. [7]) zitierten Arbeit angegebenen Methode.

Im nicht schraffierten Teil stehen Nullen, die Kontur des schraffierten Teiles muß immer wieder die k-te Parallele zur Hauptdiagonalen treffen; aber die darunterragenden Ecken können unbeschränkte Dimensionen haben.

§ 6.

Der Komplementärraumsatz in $\omega\varphi$ und $\varphi\omega$.

Satz 1. *In $\omega\varphi$ besitzt jeder abgeschlossene lineare Teilraum μ einen Komplementärraum.*

Beweis. 1. $\omega\varphi$ besteht aus allen Stellen

$$\mathfrak{x} = (x_{11}, x_{12}, \ldots | x_{21}, x_{22}, \ldots | \ldots),$$

die in jeder der unendlich vielen Abteilungen nur endlichviele von Null verschiedene Koordinaten enthalten. $\mathfrak{x}$ hat die Länge (i, k), wenn die i-te Abteilung die erste ist, die überhaupt eine von Null verschiedene Koordinate enthält, und wenn k der Index der letzten Nichtnull in der i-ten Abteilung ist, wenn also gilt

$$x_{jl} = 0 \text{ für } j < i \text{ und alle } l, \text{ und für } j = i \text{ und } l > k.$$

(i, k) heiße kleiner als (j, l), wenn entweder $i > j$ oder für $i = j$ $k < l$ ist.

Wir wählen nun aus μ zu jeder vorkommenden Länge (p, q) eine Stelle $\mathfrak{a}_{pq}$ dieser Länge aus. (r, s) durchlaufe die nicht als Längen von Stellen aus μ auftretenden Paare von natürlichen Zahlen. ν sei der Raum aller Stellen aus $\omega\varphi$, deren (p, q)-te Koordinaten sämtlich verschwinden. Die Stellen aus ν haben nur Längen (r, s). Wir werden zeigen, daß ν Komplementärraum von μ ist.

2. *μ enthält alle Stellen der Länge (p, q).*

Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)} = (x_{11}^{(n)}, x_{12}^{(n)}, \ldots, | x_{21}^{(n)}, x_{22}^{(n)}, \ldots | \ldots)$ von Stellen aus $\omega\varphi$ ist dann und nur dann konvergent, wenn zu jedem i ein N_i gehört, so daß $x_{ik}^{(n)} = 0$ ist für $k > N_i$ und alle n und wenn für jedes (i, k) $\lim\limits_{n \to \infty} x_{i,k}^{(n)}$ existiert (vgl. K. T. § 5, Satz 6 und § 15, Satz 3, 4).

Es sei nun $\mathfrak{x}$ eine beliebige Stelle der Länge (p_1, q_1). Wir behaupten, $\mathfrak{x}$ ist Limes einer Folge von Linearkombinationen der $\mathfrak{a}_{pq}$, also in μ gelegen. Um dies zu beweisen, ziehen wir von $\mathfrak{x}$ ein solches Vielfaches $\alpha_{p_1 q_1} \mathfrak{a}_{p_1 q_1}$ von $\mathfrak{x}$ ab, daß die (p_1, q_1)-te Koordinate von $\mathfrak{x} - \alpha_{p_1 q_1} \mathfrak{a}_{p_1 q_1}$ Null wird. $\mathfrak{x} - \alpha_{p_1 q_1} \mathfrak{a}_{p_1 q_1}$ liegt in μ und hat kleinere Länge als $\mathfrak{x}$. Wir können das Verfahren fortsetzen. Ist die Länge von $\mathfrak{x} - \alpha_{p_1 q_1} \mathfrak{a}_{p_1 q_1}$ gleich (p_1, q_1') mit demselben p_1, so ist $q_1' < q_1$; nach endlichvielen Schritten erhalten wir daher eine Stelle $\mathfrak{x} - \alpha_{p_1 q_1} \mathfrak{a}_{p_1 q_1} - \ldots - \alpha_{p_1 t_1} \mathfrak{a}_{p_1 t_1}$ von einer

Länge (p_2, q_2) mit $p_2 > p_1$. Wiederum nach endlichvielen Schritten erhalten wir eine Stelle von einer Länge (p_3, q_3) mit $p_3 > p_2$ usw. Die so erhaltene Folge von Stellen

$$\mathfrak{y}_0 = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x} - \alpha_{p_1 q_1}\mathfrak{a}_{p_1 q_1}, \quad \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{x} - \alpha_{p_1 q_1}\mathfrak{a}_{p_1 q_1} - \alpha_{p_1 q_1'}\mathfrak{a}_{p_1 q_1'}, \ldots$$

konvergiert gegen die Stelle $\mathfrak{o} = (0, 0, \ldots | 0, 0, \ldots | \ldots)$, da für jedes (i, k) von einem bestimmten n_0 ab die (i, k)-ten Koordinaten der $\mathfrak{y}^{(n)}$ gleich Null sind. Setzen wir $\alpha_{pq} = 0$ für alle (p, q), die bei dem Reduktionsverfahren nicht vorkommen, so ist also

$$\mathfrak{x} = \sum_{(p,q)} \alpha_{pq}\mathfrak{a}_{pq}.$$

3. $\mathfrak{e}_{rs}$ sei die Stelle, deren (r, s)-te Koordinate gleich 1 ist, deren übrige Koordinaten verschwinden. Nimmt man zu den $\mathfrak{a}_{pq}$ noch alle $\mathfrak{e}_{rs}$ hinzu, so zeigt man wie in 2., daß jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\omega\varphi$ in der Form

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{x} = \sum_{(p,q)} \alpha_{pq}\mathfrak{a}_{pq} + \sum_{(r,s)} \beta_{rs}\mathfrak{e}_{rs}$$

darstellbar ist. $\sum\limits_{(p,q)} \alpha_{pq}\mathfrak{a}_{pq}$ liegt in μ, $\sum \beta_{rs}\mathfrak{e}_{rs}$ in ν, *jede Stelle aus $\omega\varphi$ läßt sich also als Summe einer Stelle aus μ und einer aus ν schreiben.*

Diese Darstellung ist eindeutig, da μ und ν elementefremd sind, denn eine Stelle aus μ hat eine der Längen (p, q), eine Stelle aus ν eine der Längen (r, s).

4. Es bleibt noch die *Stetigkeit der Zerlegung* von $\omega\varphi$ in μ und ν zu beweisen.

Sei $\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{y}^{(n)} + \mathfrak{z}^{(n)}$ eine konvergente Folge, $\mathfrak{y}^{(n)}$ in μ, $\mathfrak{z}^{(n)}$ in ν. Wir haben zu zeigen, daß auch $\mathfrak{y}^{(n)}$ und $\mathfrak{z}^{(n)}$ konvergieren. Wir können uns darauf beschränken zu zeigen, daß aus $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{o}$ auch $\mathfrak{y}^{(n)} \to \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{z}^{(n)} \to \mathfrak{o}$ folgt.

Wir betrachten zuerst die Koordinaten von $\mathfrak{x}^{(n)}$ in der ersten Abteilung. Nach Konstruktion der $\mathfrak{y}^{(n)}$ und $\mathfrak{z}^{(n)}$ werden, wenn $x_{1k}^{(n)} = 0$ für $k > N_1$ und alle n ist, nur $\mathfrak{a}_{1q}$ und $\mathfrak{e}_{1t}$ mit $q, t \leq N_1$ in der Darstellung (1) für $\mathfrak{x}^{(n)}$ vorkommen. $M_1 = N_1$ ist also eine gemeinsame obere Schranke für Nichtnullen in der ersten Abteilung der Stellen $\mathfrak{y}^{(n)}$ und $\mathfrak{z}^{(n)}$. Die $\mathfrak{a}_{1q}$ und $\mathfrak{e}_{1t}$ mit $q, t \leq N_1$ sind in den ersten N_1 Koordinaten linear unabhängig; aus $\sum\limits_{q \leq N_1} \alpha_{1q}^{(n)}\mathfrak{a}_{1q} + \sum\limits_{t \leq N_1} \beta_{1t}^{(n)}\mathfrak{e}_{1t} \to \mathfrak{o}$ folgt daher in der ersten Abteilung die koordinatenweise Konvergenz sowohl von $\mathfrak{y}^{(n)} = \sum \alpha_{pq}^{(n)}\mathfrak{a}_{pq}$ wie von $\mathfrak{z}^{(n)} = \sum \beta_{st}^{(n)}\mathfrak{e}_{st}$ gegen $\mathfrak{o}$.

Wir zeigen ferner, daß es wieder ein M_2 gibt, so daß $y_{2k}^{(n)}$ und $z_{2k}^{(n)}$ Null sind für $k > M_2$ und alle n. Da $\mathfrak{x}^{(n)}$ konvergent ist, ist $x_{2k}^{(n)} = 0$ für $k > N_2$ und alle n. Daher ist auch die Folge

$$\mathfrak{x}^{(n)} - \sum_{q \leq N_1} \alpha_{1q}^{(n)}\mathfrak{a}_{1q} - \sum_{t \leq N_1} \beta_{1t}^{(n)}\mathfrak{e}_{1t}$$

in der zweiten Abteilung in den Nichtnullen gleichmäßig beschränkt (in der ersten Abteilung ist sie Null), etwa durch M_2. Beim Weiterreduzieren dieser Folge in der zweiten Abteilung werden also nur $\mathfrak{a}_{2q}$ und $\mathfrak{e}_{2t}$ subtrahiert mit $q, t \leq M_2$. M_2 ist die gesuchte gemeinsame Schranke.

Die koordinatenweise Konvergenz im zweiten Abschnitt folgt jetzt wie oben aus der linearen Unabhängigkeit der $\mathfrak{a}_{1q}$, $\mathfrak{a}_{2q}$, $\mathfrak{e}_{1t}$ und $\mathfrak{e}_{2t}$ in den beiden ersten Abteilungen.

In analoger Weise kann der Komplementärraumsatz für die Räume φ, ω und $\psi = \varphi + \omega$ bewiesen werden.

Satz 2. *In $\varphi\omega$ besitzt jeder abgeschlossene lineare Teilraum μ einen Komplementärraum.*

Beweis. Wir bilden den Orthogonalraum $\bar{\mu}$ zu μ (vgl. § 4). $\bar{\mu}$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $(\varphi\omega)^* = \omega\varphi$. Nach Satz 1 besitzt $\bar{\mu}$ einen Komplementärraum ν in $\omega\varphi$. Nach einem Satz von F. Menn[14]) ist der Orthogonalraum $\bar{\nu}$ von ν in $(\omega\varphi)^* = \varphi\omega$ komplementär zum Orthogonalraum $\bar{\bar{\mu}}$ von $\bar{\mu}$. Nach K. ist jeder abgeschlossene Teilraum von $\varphi\omega$ sogar orthogonalabgeschlossen, d. h. es gilt $\bar{\bar{\mu}} = \mu$. $\bar{\nu}$ ist also der gesuchte Komplementärraum.

In $\varphi, \omega, \varphi + \omega, \omega\varphi$ und $\varphi\omega$ gilt daher das Reziprokentheorem in den Formen I *und* II, die hier zusammenfallen, da in konvergenzfreien Räumen starke und schwache Konvergenz identisch sind (vgl. K. T. § 15, Satz 4).

§ 7.

Das Köthesche Gegenbeispiel.

Auf $\varphi\omega$ und $\omega\varphi$ folgt in der Reihe der konvergenzfreien Räume $\varphi\omega + \omega\varphi$. Schon in diesem Raume und erst recht in den konvergenzfreien Räumen höherer Stufe (vgl. die in Anm. [9]) zitierten Arbeiten) ist der Komplementärraumsatz und das Reziprokentheorem in den beiden Fassungen I und II falsch. Wir bringen ein Gegenbeispiel, das Herr Köthe aus einem früher von ihm angegebenen (Diss. F. Menn, S. 13, Anm. 8) durch wesentliche Vereinfachung hergeleitet hat.

Die Stellen aus $\varphi\omega + \omega\varphi$ haben die Form

$$\mathfrak{x} = (\ldots|\ldots x_{-2,-2}, x_{-2,-1}|\ldots x_{-1,-2}, x_{-1,-1}|x_{11}, x_{12}, \ldots|x_{21}, x_{22}, \ldots|\ldots),$$

wobei die linke Hälfte $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} x_{-i,-k}\, \mathfrak{e}_{-i,-k}$ eine Stelle aus $\varphi\omega$, die rechte $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} x_{ik}\, \mathfrak{e}_{ik}$ eine aus $\omega\varphi$ ist.

[14]) § 2, Satz 2 der in Anm. [9]) zitierten Arbeit.

$\varphi\,\varphi$ ist der Raum aller Stellen $(x_{11}, x_{12}, \ldots \mid x_{21}, x_{22}, \ldots \mid \ldots)$ mit nur endlichvielen von Null verschiedenen Koordinaten x_{ik}. $\varphi\,\varphi$ ist offenbar bis auf die Anordnung der Koordinaten mit φ identisch, in der Bezeichnungsweise von Köthe (vgl. l. c., Anm. 9)) sagen wir, $\varphi\,\varphi$ ist in φ permutierbar, $\varphi\,\varphi \simeq \varphi$.

Wir betrachten die durch die Matrix

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} & & 1\;\cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \hline & 1\;1\;1\;\cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \hline 1\;1\;1\;\cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \hline 1\;1\;1\;\ddots & & \\ \hline & 1\;1\;1\;\ddots & \\ \hline & & 1\;\ddots \end{array}\right)$$

(die nicht bezeichneten Elemente der Matrix sind Null) vermittelte Abbildung des Raumes $\varphi\,\varphi$ in $\varphi\omega + \omega\varphi$. μ sei der Bildraum $\mathfrak{A}(\varphi\,\varphi)$ bei dieser Abbildung. μ besteht offenbar aus allen endlichen Linearkombinationen der Spalten $\mathfrak{e}_{-i,-k} + \mathfrak{e}_{ik}$ von $\mathfrak{A}$.

S a t z 1. *μ besitzt keinen Komplementärraum.*

B e w e i s. Wir nehmen an, ν sei ein Komplementärraum zu μ. Dann wäre speziell

$$(1) \qquad \mathfrak{e}_{-i,-k} = \mathfrak{a}_{-i,-k} + \mathfrak{b}_{-i,-k},$$

$\mathfrak{a}_{-i,-k}$ in μ, $\mathfrak{b}_{-i,-k}$ in ν. Nun ist für $i = 1, 2, \ldots$ $\lim\limits_{k\to\infty} \mathfrak{e}_{-i,-k} = \mathfrak{o}$. Aus der Definition des Komplementärraumes folgt, daß dann auch $\lim\limits_{k\to\infty} \mathfrak{a}_{-i,-k} = \mathfrak{o}$ ist. $\mathfrak{a}_{-i,-k}$ habe in der rechten Hälfte die Koordinaten $a_{jl}^{(-i,-k)}$. Da $\mathfrak{a}_{-i,-k}$ in μ liegt, muß

$$(2) \qquad a_{jl}^{(-i,-k)} = a_{-j,-l}^{(-i,-k)}$$

sein. Eine Folge von Stellen $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus $\omega\,\varphi$ konvergiert nur dann, wenn die $\mathfrak{x}^{(n)}$ in jeder der Abteilungen gleichmäßig endlich sind. Nun ist $\lim\limits_{k\to\infty} \mathfrak{a}_{-i,-k} = \mathfrak{o}$ Von den $a_{i,k}^{(-i,-k)}$ dürfen also bei festem i und $k \to \infty$ nur endlichviele von Null verschieden sein. Nach (2) sind daher auch nur endlichviele der $a_{-i,-k}^{(-i,-k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ von Null verschieden.

Wir betrachten nun die Zerlegung von $\mathfrak{e}_{ik}$ nach μ und ν. Sie ist nach (1) gleich

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_{ik} = (\mathfrak{e}_{-i,-k} + \mathfrak{e}_{ik}) - \mathfrak{e}_{-\;\;-k} &\doteq [(\mathfrak{e}_{-i,-k} + \mathfrak{e}_{ik}) - \mathfrak{a}_{-i,-k}] - \mathfrak{b}_{-i,-k} \\ &= \qquad\qquad \mathfrak{a}_{ik} \qquad\qquad\quad + \mathfrak{b}_{ik}. \end{aligned}$$

Die $(-i, -k)$-te Koordinate von $\mathfrak{a}_{ik}$ ist bei festem i für fast alle k gleich 1, denn in $\mathfrak{a}_{-i,-k}$ ist sie nach dem obigen Schluß nur endlichoftmal ungleich Null, in $\mathfrak{e}_{-i,-k}$ ist sie Eins, in $\mathfrak{e}_{ik}$ Null.

Wir wählen nun eine Folge $\mathfrak{e}_{1k_1}, \mathfrak{e}_{2k_2}, \ldots$ so aus, daß stets die zugehörige $(-1, -k_1)$-te, $(-2, -k_2)$-te, ... Koordinate von $\mathfrak{a}_{1k_1}, \mathfrak{a}_{2k_2}, \ldots$ gleich Eins ist. Die Folge $\mathfrak{e}_{1k_1}, \mathfrak{e}_{2k_2}, \ldots$ konvergiert gegen $\mathfrak{o}$, die Folge ihrer Komponenten in μ, $\mathfrak{a}_{1k_1}, \mathfrak{a}_{2k_2}, \ldots$, aber nicht, womit wir zum Widerspruch gekommen sind.

Die Abgeschlossenheit von μ wird in Satz 2 mitbewiesen werden.

Um auch ein Gegenbeispiel gegen das Reziprokentheorem zu erhalten, müssen wir eine n. u. b. Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\varphi\omega + \omega\varphi)$ angeben, deren Bildraum keinen Komplementärraum hat. Nach § 1, Satz 3, kommen als Bildräume nur Teilräume in Frage, die zu $\varphi\omega + \omega\varphi$ ähnlich sind. Für den von uns betrachteten Raum μ gilt aber

Satz 2. *μ ist zu φ ähnlich.*

Beweis. Wir zeigen, daß $\mathfrak{A}$ eine ähnliche Zuordnung von $\varphi\varphi \simeq \varphi$ auf μ vermittelt. $\mathfrak{x}$ liege in $\varphi\varphi$, besitze also nur endlichviele von Null verschiedene Koordinaten x_{ik}. μ enthält also alle Stellen $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} = \sum_{i,k=1}^{\infty} x_{ik}(\mathfrak{e}_{-i,-k} + \mathfrak{e}_{ik})$ mit nur endlichvielen von Null verschiedenen x_{ik}. Die Zuordnung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ ist offenbar eineindeutig. Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)} = \sum_{i,k} x_{ik}^{(n)} \mathfrak{e}_{ik}$ aus $\varphi\varphi$ konvergiert dann und nur dann, wenn sie koordinatenweise konvergiert, und wenn $x_{ik}^{(n)} = 0$ ist für $i > i_0$ und alle k, n und wenn zu jedem $i \leq i_0$ ein k_i existiert, so daß $x_{ik}^{(n)} = 0$ für alle $k > k_i$ und alle n gilt.

Eine Folge $\mathfrak{z}^{(n)} = \sum_{i,k=1}^{\infty} z_{-i,-k}^{(n)} \mathfrak{e}_{-i,-k} + \sum_{i,k=1}^{\infty} z_{ik}^{(n)} \mathfrak{e}_{ik}$ von Elementen aus $\varphi\omega + \omega\varphi$ konvergiert dann und nur dann, wenn sie koordinatenweise konvergiert und wenn ein i_0 existiert, so daß $z_{-i,-k}^{(n)} = 0$ für $i > i_0$ und alle k, n, und wenn zu jedem i ein k_i existiert, so daß $z_{ik}^{(n)} = 0$ für $k > k_i$ und alle n ist.

Die Folge $\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)} = \Sigma\, x_{ik}^{(n)}(\mathfrak{e}_{-i,-k} + \mathfrak{e}_{ik})$ aus μ ist also genau unter denselben Bedingungen konvergent wie $\mathfrak{x}^{(n)}$; μ ist zu φ ähnlich.

Speziell folgt aus der Vollständigkeit von φ, daß μ abgeschlossen ist.

Einen zu $\varphi\omega + \omega\varphi$ ähnlichen abgeschlossenen Teilraum ohne Komplementärraum erhält man nun folgendermaßen:

In dem in $\varphi\omega + \omega\varphi$ permutierbaren[15]) Raum $(\varphi\omega + \omega\varphi) + (\varphi\omega + \omega\varphi)$ mit den Stellen $\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)})$ betrachten wir den abgeschlossenen Teil-

[15]) Vgl. die in Anm. [9]) zitierte Arbeit von G. Köthe, § 2 Satz 1.

raum χ aller Stellen $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x}^{(1)}$ beliebig aus μ, $\mathfrak{x}^{(2)}$ beliebig aus $\varphi\omega + \omega\varphi$. χ besitzt ebenfalls keinen Komplementärraum, man führt den Beweis genau so wie für Satz 1. χ ist nach Satz 2 ähnlich zu $\varphi + (\varphi\omega + \omega\varphi)$, einem in $\varphi\omega + \omega\varphi$ permutierbaren Raum (vgl. die in Anm. [9]) zitierte Arbeit von G. Köthe, § 2, Satz 3). Bei Permutation von $(\varphi\omega + \omega\varphi) + (\varphi\omega + \omega\varphi)$ in $\varphi\omega + \omega\varphi$ geht also χ in einen zu $\varphi\omega + \omega\varphi$ ähnlichen abgeschlossenen Teilraum $\bar{\chi}$ von $\varphi\omega + \omega\varphi$ über. Die ähnliche Abbildung von $\varphi\omega + \omega\varphi$ auf $\bar{\chi}$ wird nach K.T. § 6, Satz 7, durch eine Matrix $\mathfrak{B}$ vermittelt. Diese Matrix ist n. u. b., denn die Existenz einer gegen $\mathfrak{o}$ konvergenten Folge $\mathfrak{B}\mathfrak{x}^{(n)}$, deren Urbildfolge $\mathfrak{x}^{(n)}$ nicht gegen $\mathfrak{o}$ konvergieren würde, widerspricht der umkehrbaren Stetigkeit der ähnlichen Abbildung. *Die n. u. b. Matrix $\mathfrak{B}$ aus $\Sigma(\varphi\omega + \omega\varphi)$ besitzt nach dem Hauptsatz von* § 2 *keine linke Reziproke.*

Dieses Beispiel kann mühelos auf alle konvergenzfreien Räume $\varkappa$ höherer als zweiter Stufe übertragen werden. Aus § 2, Satz 3, der in Anm. [9]) zitierten Arbeit von G. Köthe folgt, daß $(\varphi\omega + \omega\varphi) + \varkappa$ stets in $\varkappa$ permutierbar ist. Man bilde, wie oben, den Raum aller Stellen $(\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)})$ mit $\mathfrak{x}^{(1)}$ in μ, $\mathfrak{x}^{(2)}$ in $\varkappa$. Er ist zu $\varkappa$ ähnlich und besitzt keinen Komplementärraum. Die ähnliche Abbildung wird durch eine n. u. b. Matrix dargestellt, die keine linke Reziproke besitzt.

Der Raum μ ist noch in anderer Beziehung wichtig. Man könnte vermuten, daß vielleicht jeder vollabgeschlossene Teilraum eines vollkommenen Raumes einen Komplementärraum besitzt, es gilt aber

Satz 4. *μ ist orthogonalabgeschlossen, also vollabgeschlossen.*

Beweis. Die Stellen $\mathfrak{e}_{-i,-k} - \mathfrak{e}_{ik}$ gehören offenbar dem Orthogonalraum $\bar{\mu}$ von μ an. Der Raum $\bar{\bar{\mu}}$ kann daher nur Stellen enthalten, die auf den Stellen $\mathfrak{e}_{-i,-k} - \mathfrak{e}_{ik}$ orthogonal sind. In $\bar{\bar{\mu}}$ liegen also nur Stellen $\mathfrak{x}$ mit $x_{-i,-k} = x_{ik}$ für alle i, k. Die Stellen aus $\varphi\omega + \omega\varphi$, die diese Bedingungen erfüllen, sind alle finit, liegen also in μ, d. h. $\bar{\bar{\mu}} \leqq \mu$. Da stets $\bar{\bar{\mu}} \geqq \mu$ ist, ergibt sich die Behauptung.

(Eingegangen am 28. 8. 1936.)

Über den Noetherschen Fundamentalsatz.

II. Allgemeiner Fall.

Von

W. van der Woude in Leiden (Niederlande).

In einer früheren Mitteilung[1]) gab ich einen einfachen Beweis des Noetherschen Fundamentalsatzes für den Fall, daß die beiden zugrundeliegenden Kurven in ihren Schnittpunkten, die auch mehrfache Punkte von beiden sein dürfen, keine gemeinsame Tangente haben.

Herr van der Waerden wies dann auf die Bedeutung hin, die dieser Beweis für einige Punkte der Kurventheorie haben könnte[2]), sprach aber dabei die Ansicht aus, daß der Beweis sich nicht auf den ganz allgemeinen Fall des Noetherschen Satzes ausdehnen lasse. In dieser kurzen Note möchte ich zeigen, daß mein Kollege, dem ich für sein Interesse besten Dank sage, die Tragweite des Beweises unterschätzte.

Bezeichnungen:

$F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, F_3, L, R ...	Polynome in x und y.
$\varrho(y)$	Polynom in y.
$a(x, y)$, $b(x, y)$, c, a^+	Potenzreihen in x und y.

Das Polynom, das von den Gliedern des niedrigsten, in einem Polynome F oder in einer Potenzreihe a vorkommenden Grades gebildet wird, werde ich fernerhin das *Anfangspolynom* von F oder a nennen.

§ 1.

Hilfssatz. Es mögen $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ Potenzreihen und $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ Polynome in x und y darstellen. Es dürfen F_1 und F_2 in Faktoren (im Polynomring; Zahlenfaktoren werden stets außer Acht gelassen) zerlegbar sein; nur dürfen sie keinen Faktor gemeinsam haben. Es sei gegeben

(1) $$c \equiv aF_1 \equiv bF_2.$$

---

[1]) W. van der Woude, Über den Noetherschen Fundamentalsatz, Math. Annalen 111 (1935), S. 425—431.

[2]) B. L. v. d. Waerden Ein neuer Beweis des Restsatzes, Math. Annalen 111 (1935), S. 432—437.

Behauptung: *Das Anfangspolynom von c ist durch das Produkt der Anfangspolynome von F_1 und F_2 teilbar.*

Es ist klar, daß diese Behauptung trivial ist, wenn die beiden letztgenannten Anfangspolynome keinen gemeinsamen Faktor haben.

Beim Beweise nehme ich an — aber diese Annahme ist unwesentlich —, daß keines der Anfangspolynome von F_1 und F_2 durch y teilbar ist. Tatsächlich ist diese Annahme unwesentlich, da man diese Voraussetzung stets durch eine lineare Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y' \quad \left(\begin{vmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{vmatrix} \neq 0\right),$$

erfüllen kann.

Durch $\varrho(y)$ werde nun die x-Resultante von F_1 und F_2 dargestellt, so daß also

$$\varrho(y) \equiv LF_1 + MF_2, \tag{2}$$

wo L und M wieder Polynome in x und y sind.

Es folgt dann aus (1) und (2)

$$c\varrho \equiv c(LF_1 + MF_2) \equiv bF_2LF_1 + aF_1MF_2$$
$$c\varrho \equiv (bL + aM)F_1F_2.$$

Das Anfangspolynom von $c\varrho$ ist also durch das Produkt der Anfangspolynome von F_1 und F_2 teilbar. Das erstgenannte Anfangspolynom ist aber nichts anderes als das Produkt des Anfangspolynoms von c mit der niedrigsten in ϱ vorkommenden Potenz von y. Der Faktor y kommt aber in den Anfangspolynomen von F_1 und F_2 nicht vor und so folgt sogleich die Behauptung.

Folgerung. Sind die Anfangspolynome von F_1 und F_2 bzw. vom p-ten und q-ten Grade, dann sind die Gradzahlen der Anfangspolynome von c, a, b nicht kleiner als $p+q$, q, p.

§ 2.

Der Noethersche Fundamentalsatz (allgemeiner Fall).

Es liegen drei algebraische Kurven, dargestellt durch

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad F_3(x, y) = 0,$$

vor. Die Kurven F_1 und F_2 dürfen in Kurven niedrigerer Ordnung (Faktorkurven) zerfallen; nur dürfen sie keine Faktorkurve gemeinsam haben.

Einer der Schnittpunkte von F_1 und F_2 sei als Koordinatenursprung angenommen. Wenn es nun stets, d. h. welcher Schnittpunkt auch gewählt

sein möge, möglich ist. Potenzreihen $a(x, y)$ *und* $b(x, y)$ *zu bestimmen, welche die Identität*

$$(3) \qquad F_3 \equiv a F_1 + b F_2$$

formal befriedigen, dann existieren solche Polynome $A(x, y)$ *und* $B(x, y)$, *daß die Identität*

$$F_3 \equiv A F_1 + B F_2$$

befriedigt wird.

Die Kurven F_1 und F_2 mögen vom m-ten und n-ten Grade sein.

Einer der Schnittpunkte von F_1 und F_2 wird als Koordinatenursprung angenommen; durch eine projektive Transformation kann stets erreicht werden:

1. daß das Glied mit x^m in F_1, und ebenso das Glied mit x^n in F_2 vorkommt;

2. daß außer dem Punkte $O(0, 0)$ kein zweiter Schnittpunkt von F_1 und F_2 auf der X-Achse liegt und daß die X-Achse auch nicht mit einer der Tangenten von F_1 und F_2 in O zusammenfällt.

Von der Kurve F_3 wird vorläufig angenommen, daß ihre Gleichung

$$F_3(x, y) = 0$$

in x höchstens vom Grade $(m + n - 1)$ sei. Diese Einschränkung ist, wie in der früheren Mitteilung gezeigt wurde und hier am Schluß noch kurz wiederholt werden soll, wieder unwesentlich.

Durch $\varrho(y)$ wird die x-Resultante von F_1 und F_2 dargestellt.

Der Ausgangspunkt des Beweises ist wieder der

Hilfssatz. *Es gibt Polynome* R *und* S *derart, daß*

$$(4) \qquad \varrho(y) F_3 \equiv R F_1 + S F_2,$$

wo R *und* S *höchstens vom* $(n-1)$*-ten, bzw.* $(m-1)$*-ten Grade in* x *sind.*

Ich unterlasse hier den, in der früheren Mitteilung enthaltenen, ganz einfachen Beweis des Hilfssatzes. (Hier ist in bezug auf F_3 noch nichts weiteres vorausgesetzt, als daß der Grad *in* x höchstens $(m + n - 1)$ ist).

Nun wurde ja angenommen, daß solche Potenzreihen $a(x, y)$ und $b(x, y)$ bestehen, daß

$$(3) \qquad F_3 \equiv a F_1 + b F_2.$$

Aus (3) und (4) folgt dann

$$(5) \qquad a^+ F_1 \equiv b^+ F_2$$

mit

$$a^+ \equiv a\varrho - R,$$
$$b^+ \equiv -b\varrho + S.$$

Sind nun p und q die Gradzahlen der Anfangspolynome von F_1 und F_2, so folgt aus (5) — siehe § 1, Folgerung —, daß die Anfangspolynome von a^+ und b^+ wenigstens vom q-ten, bzw. vom p-ten Grade sind. Ein Glied $c x^k$ (c konstant, $k < q$) kommt also in a^+ nicht vor.

Nun ist aber

$$R \equiv a \varrho - a^+ ;$$

und weil $\varrho(y)$ gewiß einen Faktor y hat — die Kurven F_1 und F_2 gehen ja beide durch den Koordinatenursprung —, wird auch in R ein Glied $c x^k$ (c konstant, $k < q$) nicht vorkommen.

§ 3.

Es folgt aus dem Schlusse des vorangehenden Paragraphen, daß die Kurve

$$R = 0$$

von der X-Achse in O geschnitten wird und daß dieser Schnittpunkt wenigstens q-fach gezählt werden muß. Um die Anzahl ihrer weiteren Schnittpunkte mit der X-Achse zu bestimmen, betrachten wir zuerst die Schnittpunkte von

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Die Anzahl dieser Schnittpunkte ist n; sie liegen, wegen

$$\varrho(y) F_3 \equiv R F_1 + S F_2, \tag{4}$$

entweder auf F_1 oder auf R. Wir haben aber Sorge getragen, daß außer dem Koordinatenursprunge kein einziger Schnittpunkt von F_1 und F_2 auf der X-Achse liegt. Der Schnittpunkt O von F_2 und der X-Achse soll aber q-fach gezählt werden (genau), weil F_2 in O einen q-fachen Punkt hat und die X-Achse nicht mit einer der Tangenten in O zusammenfällt.

Die anderen Schnittpunkte von F_2 und der X-Achse, $(n - q)$ in Anzahl, liegen also auf R.

Wir haben nun aber schon n Schnittpunkte von

$$\left.\begin{aligned} R &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

gefunden, während der Grad von R in x höchstens $(n - 1)$ ist. Es folgt also, daß y in R als Faktor enthalten ist.

Das nämliche kann man für S, statt R, beweisen; d. h. beide Glieder von (4) sind durch y teilbar. In dieser Weise fortgehend kann man beide Glieder von (4) durch alle Faktoren y der Resultante kürzen.

Dann wird der Koordinatenursprung in einen anderen Schnittpunkt gelegt und alle Faktoren der Resultante werden aus (4) vertrieben. So findet man aus (4):

$$F_3 \equiv AF_1 + BF_2. \qquad \text{q. e. d.}$$

Ich wiederhole noch kurz, daß die Beschränkung: „F_3 ist in x höchstens vom Grade $(m+n-1)$" unwesentlich ist.

Ist nämlich dieser Grad höher, dann setzt man:

$$F_3 \equiv QF_1F_2 + F_3^+$$

(Grad von F_3^+ *in* $x < (m+n)$) und beweist den Satz für F_3^+, wonach seine Gültigkeit für F_3 sogleich folgt.

Zusatz bei der Korrektur, November 1936. Der Hilfssatz in § 1 läßt sich leicht zum folgenden Satz erweitern.

Satz. *Es seien wieder a, b und c Potenzreihen, und F_1 und F_2 Polynome in x und y; F_1 und F_2 haben keinen Faktor gemein. Es sei (rein formal) gegeben*

$$c \equiv aF_1 \equiv bF_2.$$

Dann ist c durch F_1F_2 teilbar.

Beim Beweise wird angenommen, daß keines der Anfangspolynome von F_1 und F_2 den Faktor y enthält. Es zeigte sich schon, daß diese Annahme unwesentlich ist.

Die Potenzreihen a, b, c werden nach steigenden Potenzen, in x und y zusammen, geordnet gedacht. Also z. B.

$$c \equiv \sum_{r=0}^{\infty} U_r,$$

wo

$$U_r \equiv \sum_{\varrho,\sigma=0}^{r} c_{\varrho\sigma} x^\varrho y^\sigma \qquad (\varrho + \sigma = r).$$

Durch d, e, g, h werden weiterhin auch Potenzreihen in x und y dargestellt.

Es zeigte sich (§ 1)

$$c\varrho(y) \equiv (bL + aM)F_1F_2 \equiv dF_1F_2,$$

wo ϱ die x-Resultante von F_1 und F_2 ist.

Man kann nun ϱ darstellen durch

$$\varrho \equiv y^l \sigma(y) \qquad (l \geqq 0),$$

wo σ ein Polynom in y ist, das ein konstantes Glied enthält. Also ist

$$(6) \qquad c y^l \sigma(y) \equiv dF_1F_2.$$

Es sei an erster Stelle angenommen:

$$l > 0.$$

Dann enthält also auch das zweite Glied von (6) den Faktor y. Es läßt sich nun zeigen, daß d durch y teilbar ist, d. h. daß jedes Glied von d den Faktor y enthält.

Wir schreiben dazu

$$d \equiv \sum_{r=0}^{\infty} V_r,$$

wo

$$V_r \equiv \sum_{\varrho\sigma,=0}^{r} d_{\varrho\sigma} x^\varrho y^\sigma \qquad (\varrho + \sigma = r),$$

und nehmen an, daß es Polynome V gibt, die den Faktor y nicht enthalten. Von diesen Polynomen sei V_t dasjenige vom niedrigsten Grade. Dann würde aber in dF_1F_2 nicht jedes Glied, das beim Ausmultiplizieren von V_t mit dem Anfangspolynom von F_1F_2 entsteht, den Faktor y enthalten. Das stände aber im Widerspruch zu (6).

Man kann also (6) durch y kürzen und bekommt dann

$$cy^{l-1}\sigma(y) \equiv eF_1F_2$$

und kann dann wieder durch y kürzen, bis man

$$c\sigma(y) \equiv gF_1F_2$$

erreicht.

Aber weil $\sigma(y)$ ein Polynom ist, das ein konstantes Glied enthält, findet man dann sogleich

$$c \equiv hF_1F_2; \text{ q. e. d.}$$

Für den Fall $l = 0$ ist der Beweis schon im Vorangehenden enthalten.

(Eingegangen am 30. 8. 1936.)

Zum Dreikörperproblem.

Von

O. Pylarinos in München.

---

1. In einer Arbeit, die Herr Carathéodory in der Bayerischen Akademie der Wissenschaften vorgetragen hat[1]), behandelt er als erster mit einfachen Mitteln die einzigen bis heute bekannten Fälle, in denen das Dreikörperproblem mit Hilfe von elementaren Funktionen integriert werden kann. In diesen Fällen, die zuerst Lagrange angegeben und mit Hilfe seiner Theorie des allgemeinen Dreikörperproblems behandelt hat[2]), sind die gegenseitigen Abstände der drei Körper stets drei konstanten Größen proportional, so daß die drei Körper, wenn sie nicht in einer Geraden liegen, ein Dreieck bilden, das beständig sich selbst ähnlich bleibt. Auch in modernen Darstellungen wird entweder die ganze Reduktionstheorie des allgemeinen Dreikörperproblems vorausgesetzt[3]), oder die einschränkende Voraussetzung gemacht, daß die Bewegung der drei Körper in einer festen Ebene stattfindet[4]). Herr Carathéodory hat nun das Problem auf die einfachste Weise durch Benutzung eines Koordinatensystems gelöst, das im Schwerpunkt der drei Massen seinen Anfangspunkt hat und sich so bewegt, daß die darauf bezogene relative Bewegung jedes einzelnen der drei Körper geradlinig ist.

Wir wollen in der vorliegenden Arbeit dasselbe Problem ohne Benutzung des obigen Bezugsystems mit Hilfe eines leicht zu erschließenden Satzes behandeln, auf den Herr N. Delaunay als erster aufmerksam gemacht hat[5]) und der so lautet:

„Die Geraden, auf denen die Beschleunigungen von drei sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehenden Körpern liegen, gehen in jedem Zeitpunkt durch denselben Punkt hindurch.“

---

[1]) C. Carathéodory, Über die strengen Lösungen des Dreikörperproblems. Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wissenschaften (math.-naturwiss. Abteilung) 1933, S. 257—267.

[2]) Oeuvres de Lagrange, t. VI, S. 272—292.

[3]) E. Whittaker, Analytische Dynamik (1924), S. 419.

[4]) T. Levi-Civita e U. Amaldi, Lezioni di meccanica razionale, t. II_2 (1927), S. 404.

[5]) N. Delaunay, Sur le problème des trois corps. Verhandlungen des dritten intern. Mathematiker-Kongresses in Heidelberg; Leipzig, Teubner, 1905; S. 398—401.

Dieser Satz ist, nach einer Bemerkung, die mir Herr Carathéodory mitgeteilt hat, eine unmittelbare Folge des Umstands, daß die auf die drei Körper wirkenden Kräfte zu jeder Zeit ein Gleichgewichtssystem bilden.

2. Bezeichnet man mit $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ die Radienvektoren der drei Körper P_1, P_2, P_3, die nach Voraussetzung nicht in einer Geraden liegen, in bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Ursprung der Schwerpunkt des Systems ist, ferner mit $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ ihre Geschwindigkeiten und mit $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ ihre Beschleunigungen, so bestehen die folgenden Beziehungen:

$$m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + m_3 \bar{r}_3 = 0, \tag{2,1}$$

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 + m_3 \bar{v}_3 = 0, \tag{2,2}$$

$$m_1 \bar{b}_1 + m_2 \bar{b}_2 + m_3 \bar{b}_3 = 0. \tag{2,3}$$

Bezeichnet man außerdem mit $\bar{d}$ den Radiusvektor des Punktes, durch welchen die Geraden hindurchgehen, auf denen die Beschleunigungen der drei Körper liegen, und der im folgenden als Punkt D bezeichnet wird, so ist:

$$\bar{d} = \varkappa_1 \bar{r}_1 + \varkappa_2 \bar{r}_2 + \varkappa_3 \bar{r}_3, \tag{2,4}$$

wo

$$\varkappa_1 = \frac{m_1 \varrho_1^3}{m_1 \varrho_1^3 + m_2 \varrho_2^3 + m_3 \varrho_3^3}, \quad \varkappa_2 = \frac{m_2 \varrho_2^3}{m_1 \varrho_1^3 + m_2 \varrho_2^3 + m_3 \varrho_3^3}, \tag{2,5}$$

$$\varkappa_3 = \frac{m_3 \varrho_3^3}{m_1 \varrho_1^3 + m_2 \varrho_2^3 + m_3 \varrho_3^3}$$

ist, und $\varrho_1 = P_2 P_3$, $\varrho_2 = P_3 P_1$, $\varrho_3 = P_1 P_2$ die gegenseitigen Abstände der drei Körper darstellen[6]). Durch Benutzung dieses Vektors lassen sich die Beschleunigungen der drei Körper in der Form

$$\begin{cases} \bar{b}_1 = \lambda_1 (\bar{r}_1 - \bar{d}) \\ \bar{b}_2 = \lambda_2 (\bar{r}_2 - \bar{d}) \\ \bar{b}_3 = \lambda_3 (\bar{r}_3 - \bar{d}) \end{cases} \tag{2,6}$$

schreiben, wo

$$\lambda_1 = -f \frac{m_1 \varrho_1^3 + m_2 \varrho_2^3 + m_3 \varrho_3^3}{\varrho_2^3 \varrho_3^3}, \quad \lambda_2 = -f \cdot \frac{m_1 \varrho_1^3 + m_2 \varrho_2^3 + m_3 \varrho_3^3}{\varrho_3^3 \varrho_1^3}, \tag{2,7}$$

$$\lambda_3 = -f \cdot \frac{m_1 \varrho_1^3 + m_2 \varrho_2^3 + m_3 \varrho_3^3}{\varrho_1^3 \varrho_2^3}$$

sind und f die Gravitationskonstante darstellt[7]).

Aus diesen letzteren Gleichungen erhält man folgende Gleichheiten von äußeren Produkten:

$$[\bar{r}_1 \bar{b}_1] = [\bar{d}\, \bar{b}_1], \quad [\bar{r}_2 \bar{b}_2] = [\bar{d}\, \bar{b}_2], \quad [\bar{r}_3 \bar{b}_3] = [\bar{d}\, \bar{b}_3]. \tag{2,8}$$

[6]) N. Delaunay, loc. cit., S. 400.

[7]) N. Delaunay, loc. cit., S. 401.

3. Nehmen wir jetzt an, daß das Dreieck, welches die drei Körper in jedem Zeitpunkt bilden, sich selbst beständig ähnlich bleibt.

In diesem Fall gibt es ein Dreieck, das demjenigen der Anfangslagen der drei Körper gleich und in jedem Zeitpunkt dem Dreieck der auf den Schwerpunkt bezogenen Lagen der drei Körper ähnlich gelegen ist.

Bezeichnet man mit $\bar{r}'_1, \bar{r}'_2, \bar{r}'_3$ die Radienvektoren der Ecken dieses Dreiecks, mit $\varrho'_1, \varrho'_2, \varrho'_3$ ihre Seiten und mit $\bar{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit, die der Bewegung dieses Dreiecks entspricht, so gelten die Beziehungen:

$$(3,1)\qquad \frac{\varrho_1}{\varrho'_1} = \frac{\varrho_2}{\varrho'_2} = \frac{\varrho_3}{\varrho'_3} = \lambda,$$

$$(3,2)\qquad \bar{r}_1 = \lambda\bar{r}'_1,\quad \bar{r}_2 = \lambda\bar{r}'_2,\quad \bar{r}_3 = \lambda\bar{r}'_3,$$

$$(3,3)\qquad \dot{\bar{r}}_1 = \dot{\lambda}\bar{r}'_1 + \lambda\dot{\bar{r}}'_1,\quad \dot{\bar{r}}_2 = \dot{\lambda}\bar{r}'_2 + \lambda\dot{\bar{r}}'_2,\quad \dot{\bar{r}}_3 = \dot{\lambda}\bar{r}'_3 + \lambda\dot{\bar{r}}'_3,$$

wo

$$(3,4)\qquad \dot{\bar{r}}'_1 = [\bar{\omega}\,\bar{r}'_1],\quad \dot{\bar{r}}'_2 = [\bar{\omega}\,\bar{r}'_2],\quad \dot{\bar{r}}'_3 = [\bar{\omega}\,\bar{r}'_3]$$

ist.

Aus den Gleichungen (3, 1) ergibt sich sofort, daß die Koeffizienten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ in (2, 4) konstant und die Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in (2, 6) der dritten Potenz von λ umgekehrt proportional sind:

$$(3,5)\qquad \lambda_1 = \frac{c_1}{\lambda^3},\quad \lambda_2 = \frac{c_2}{\lambda^3},\quad \lambda_3 = \frac{c_3}{\lambda^3};$$

infolgedessen erhält man durch zweimalige Differentiation von (2, 4) nach der Zeit die Gleichungen

$$(3,6)\qquad \dot{\bar{d}} = \varkappa_1\bar{v}_1 + \varkappa_2\bar{v}_2 + \varkappa_3\bar{v}_3,\quad \ddot{\bar{d}} = \varkappa_1\bar{b}_1 + \varkappa_2\bar{b}_2 + \varkappa_3\bar{b}_3$$

und aus den Gleichungen (2, 8) mit Rücksicht auf (3, 5) die Beziehung

$$(3,7)\qquad \varkappa_1[\bar{r}_1\bar{b}_1] + \varkappa_2[\bar{r}_2\bar{b}_2] + \varkappa_3[\bar{r}_3\bar{b}_3] - [\bar{d}\,\ddot{\bar{d}}] = 0.$$

Wir werden nun zunächst folgende zwei Hilfssätze beweisen:

A. *Ist im Lagrangeschen Fall die Ebene der drei Körper beständig einer konstanten Richtung parallel, so muß diese Ebene fest bleiben.*

Bezeichnet man mit $\bar{a}$ einen Einheitsvektor, der dieser konstanten Richtung parallel ist, so lassen sich z. B. die Vektoren $\bar{r}_2$ und $\bar{r}'_2$ in der Form

$$(3,8)\qquad \bar{r}_2 = \alpha\bar{a} + \beta\bar{r}.$$

$$(3,9)\qquad \bar{r}'_2 = \alpha'\bar{a} + \beta\bar{r}'_1$$

schreiben, wo

$$(3,10)\qquad \alpha' = \frac{\alpha}{\lambda}$$

ist und α, β stetige Funktionen der Zeit darstellen, außer im Fall, in dem die Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{r}_1$ gleicher Richtung sind; außerdem soll β zeitlich

veränderlich sein gemäß der Voraussetzung, daß die drei Körper nicht in einer Geraden liegen. Ist nämlich β konstant, so erhält man durch einmalige Differentiation von (3, 9) nach der Zeit mit Rücksicht auf die Gleichungen (3, 4) die Beziehung

$$\dot{\bar r}_2' - \beta\, \dot{\bar r}_1' = [\bar\omega\,(\bar r_2' - \beta\, \bar r_1')] = \alpha' [\bar\omega\, \bar a] = \dot\alpha'\, \bar a.$$

Also muß α' konstant bleiben und $\bar\omega = \omega\, \bar a$ sein, wo ω den Betrag von $\bar\omega$ bedeutet.

Durch einmalige Differentiation der ersten Gleichung (3, 3) nach der Zeit erhält man mit Rücksicht auf den Wert von $\bar\omega$

$$\bar b_1 = \lambda_1 (\bar r_1 - \bar d) = \frac{c_1}{\lambda^3} (\bar r_1' - \bar d') = \ddot\lambda\, \bar r_1' + (2\,\dot\lambda\,\omega + \lambda\,\dot\omega)\,[\bar a\, \bar r_1'] + \lambda\,\omega^2 \left[\bar a [\bar a\, \bar r_1']\right],$$

wo $\bar d' = \dfrac{\bar d}{\lambda} = \varkappa_1\, \bar r_1' + \varkappa_2\, \bar r_2' + \varkappa_3\, \bar r_3'$ ist.

Da aber $[\bar a\, \bar r_1']$ senkrecht auf der Ebene der drei Körper steht, muß $2\,\dot\lambda\,\omega + \lambda\,\dot\omega = 0$ sein, also ist

$$\omega = \frac{c}{\lambda^2}$$

und die obige Gleichung läßt sich in der Form

$$\frac{c_1}{\lambda^3} (\bar r_1' - \bar d') = \ddot\lambda\, \bar r_1' + \frac{c^2}{\lambda^3} \left[\bar a\, [\bar a\, \bar r_1']\right] \tag{3, 11}$$

schreiben. In ähnlicher Weise ergibt sich auch

$$\frac{c_2}{\lambda^3} (\bar r_2' - \bar d') = \ddot\lambda\, \bar r_2' + \frac{c^2}{\lambda^3} \left[\bar a\, [\bar a\, \bar r_2']\right].$$

Ist nun z. B. $\bar r_1'$ auf dem Vektor $\bar a$ nicht senkrecht, so bekommt man aus der Gleichung (3, 11) durch skalare Multiplikation mit $\bar a$ und $\left[\bar a\, [\bar a\, \bar r_1']\right]$

$$\frac{c_1}{\lambda^3} (\bar r_1' - \bar d') \cdot \bar a = \ddot\lambda\, \bar r_1' \cdot \bar a,$$

$$\frac{c_1}{\lambda^3} (\bar r_1' - \bar d') \cdot \left[\bar a\, [\bar a\, \bar r_1']\right] = \ddot\lambda\, \bar r_1' \cdot \left[\bar a\, [\bar a\, \bar r_1']\right] + \frac{c^2}{\lambda^3} \left[\bar a\, [\bar a\, \bar r_1']\right]^2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber unmittelbar, da die darin vorkommenden skalaren Produkte konstant sind[8]), daß λ konstant sein muß; also ist nach (3, 10) α auch konstant. Durch zweimalige Differentiation von (3, 8) nach der Zeit mit Rücksicht auf (2, 3) und (2, 6) würde sich nun ergeben, daß die drei Körper in diesem Falle in einer Geraden liegen.

---

[8]) Man kann ohne Schwierigkeit schließen, daß, wenn α' und β in (3, 9) konstant sind, diese skalaren Produkte von der Zeit unabhängig sind. Es ergibt sich nämlich durch skalare Multiplikation von (3, 9) mit $\bar r_1'$, $\bar r_2'$, $\bar r_3'$ und $\bar d'$, deren absolute Beträge ebenso wie die Winkel, welche sie miteinander bilden, konstant sind, daß die Produkte $\bar r_1' \cdot \bar a$, $\bar r_2' \cdot \bar a$, $\bar r_3' \cdot \bar a$ und $\bar d' \cdot \bar a$ konstant sind; folglich sind auch die obigen Produkte von der Zeit unabhängig.

Es muß also β veränderlich sein, und eine zweimalige Differentiation von (3, 8) nach der Zeit liefert die Gleichung

$$\bar{b}_2 = \ddot{\alpha}\bar{a} + \beta\bar{b}_1 + 2\dot{\beta}\dot{\bar{v}} + \ddot{\beta}\bar{r}_1,$$

woraus folgt, daß $\bar{v}_1$ der Ebene der drei Körper parallel ist. Infolgedessen ist diese Ebene die Schmiegungsebene der Bahnkurve des Körpers P_1 und da sie durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems hindurchgeht, bleibt sie auch während der Bewegung fest.

B. *Besteht zwischen den Flächengeschwindigkeiten* $[\bar{r}_1\bar{v}_1]$, $[\bar{r}_2\bar{v}_2]$, $[\bar{r}_3\bar{v}_3]$ *der drei Körper im Lagrangeschen Fall eine Beziehung von der Form*

$$A[\bar{r}_1\bar{v}_1] + B[\bar{r}_2\bar{v}_2] + C[\bar{r}_3\bar{v}_3] = 0, \tag{3, 12}$$

wo A, B, C *konstante Größen sind, die nicht alle verschwinden, so muß die Bewegung der drei Körper auf einer festen Ebene stattfinden.*

Sind nämlich zwei der Koeffizienten, z. B. A und B, gleich Null, so muß $[\bar{r}_3\bar{v}_3]$ gleich Null sein; also findet die Bewegung des Punktes P_3 auf einer festen Geraden statt, die durch den Schwerpunkt hindurchgeht und in der Ebene der drei Körper liegt; infolgedessen muß diese Ebene nach dem vorigen Satz fest bleiben. Ist zweitens nur ein Koeffizient, z. B. A, gleich Null, so erkennt man leicht, daß die Vektoren $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ zur Ebene der drei Körper parallel sein müssen; diese Ebene bleibt also fest.

Sind endlich alle drei Koeffizienten A, B, C von Null verschieden, so erhält man durch skalare Multiplikation von (3, 12) mit $\bar{r}_3$

$$A[\bar{r}_1\bar{v}_1]\cdot\bar{r}_3 + B[\bar{r}_2\bar{v}_2]\cdot\bar{r}_3 = A[\bar{r}_3\bar{r}_1]\cdot\bar{v}_1 + B[\bar{r}_3\bar{r}_2]\bar{v}_2 = 0$$

oder nach (2, 1)

$$A[\bar{r}_3\bar{r}_1]\bar{v}_1 - B\frac{m_1}{m_2}[\bar{r}_3\bar{r}_1]\bar{v}_2 = [\bar{r}_3\bar{r}_1]\cdot\left(A\bar{v}_1 - B\frac{m_1}{m_2}\bar{v}_2\right) = 0.$$

Also ist der Vektor $A\bar{v}_1 - B\frac{m_1}{m_2}\bar{v}_2$ der Ebene der drei Körper parallel und kann folglich in der Form

$$A\bar{v}_1 - B\frac{m_1}{m_2}\bar{v}_2 = \alpha\bar{r}_1 + \beta\bar{r}_2 \tag{3, 13}$$

geschrieben werden, wobei die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ A & -B\frac{m_1}{m_2} \end{vmatrix} \tag{α}$$

von Null verschieden ist, zufolge der Voraussetzung, daß die drei Körper nicht in einer Geraden liegen.

Ist nämlich diese Determinante gleich Null, so gilt

$$A\bar{v}_1 - B\frac{m_1}{m_2}\bar{v}_2 = \frac{d}{dt}\left(A\bar{r}_1 - B\frac{m_1}{m_2}\bar{r}_2\right) = \frac{\alpha}{A}\left(A\bar{r}_1 - B\frac{m_1}{m_2}\bar{r}_2\right).$$

Hieraus aber folgt, nach einem bekannten Satz, daß der Vektor $A\bar{r}_1 - B\frac{m_1}{m_2}\bar{r}_2$ eine konstante Richtung beibehält und, da die Koeffizienten $A, -B\frac{m_1}{m_2}$ konstant sind, daß die drei Körper, nach früherem (siehe S. 152—153), in einer Geraden liegen.

Durch einmalige Differentiation von (3, 13) nach der Zeit erhält man

$$A\bar{b}_1 - B\frac{m_1}{m_2}\bar{b}_2 = \alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2 + \dot{\alpha}\bar{r}_1 + \dot{\beta}\bar{r}_2, \tag{3, 14}$$

und aus den beiden Gleichungen (3, 13) und (3, 14) mit Berücksichtigung der Tatsache, daß die Determinante (α) von Null verschieden ist, folgt, daß die Vektoren $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$ der Ebene der drei Körper parallel sind; letztere muß also fest bleiben.

4. Wir werden nun mit Hilfe der beiden bewiesenen Sätze die charakteristischen Eigenschaften des Lagrangeschen Dreikörperproblems ableiten und sie in den folgenden zwei Theoremen formulieren.

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Dreieck der drei Körper beständig sich selbst ähnlich bleibt, ist, daß der Punkt D mit dem Schwerpunkt des Systems zusammenfällt.*

Fällt nämlich der Punkt D mit dem Schwerpunkt des Systems zusammen, so müssen die Koeffizienten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ in (2, 4) den Massen der drei Körper proportional sein; daher gilt nach (2, 5)

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3;$$

also muß das Dreieck der drei Körper beständig *gleichseitig* sein.

Nehmen wir andererseits an, daß die beiden Punkte nicht zusammenfallen; in diesem Fall dürfen die Determinanten der Matrix $\left\|\begin{matrix}\varkappa_1 & \varkappa_2 & \varkappa_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{matrix}\right\|$ nicht sämtlich verschwinden; ist nun z. B. die Determinante $\begin{vmatrix}\varkappa_2 & \varkappa_3\\ m_2 & m_3\end{vmatrix}$ von Null verschieden, so können die Vektoren $\bar{r}_2$ und $\bar{r}_3$ in die Form

$$\left\{\begin{aligned}\bar{r}_2 &= A_2\bar{d} + B_2\bar{r}_1,\\ \bar{r}_3 &= A_3\bar{d} + B_3\bar{r}_1\end{aligned}\right. \tag{4, 1}$$

gebracht werden, wo A_2, B_2, A_3, B_3 konstant sind.

Durch zweimalige Differentiation von (4, 1) nach der Zeit unter Berücksichtigung der Gleichungen (2, 6) erhält man ohne Schwierigkeit die Beziehungen

$$A_2\ddot{\bar{d}} = B_2(\lambda_2 - \lambda_1)\bar{r}_1 + (\lambda_2 A_2 + \lambda_1 B_2 - \lambda_2)\bar{d},$$
$$A_3\ddot{\bar{d}} = B_3(\lambda_3 - \lambda_1)\bar{r}_1 + (\lambda_3 A_3 + \lambda_1 B_3 - \lambda_3)\bar{d},$$

wobei, wie man leicht erkennen kann, die Koeffizienten von $\ddot{\bar{d}}, \bar{d}, \bar{r}_1$ in der einen Gleichung proportional zu den Koeffizienten derselben Vektoren in der anderen Gleichung sind.

Aus der ersten dieser Gleichungen ergibt sich nun durch vektorielle Multiplikation mit $\bar{d}$

$$[\bar{d}\,\ddot{\bar{d}}] = \frac{B_2}{A_2}(\lambda_2 - \lambda_1)\,[\bar{d}\,\bar{r}_1],$$

oder nach der ersten Gleichung (2, 6)

$$[\bar{d}\,\ddot{\bar{d}}] = \frac{B_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{A_2\,\lambda_1}\,[\bar{r}_1\,\bar{b}_1] \equiv c\,[\bar{r}_1\,\bar{b}_1],$$

wo c nach (3, 5) konstant ist.

Wenn man jetzt diesen Wert von $[\bar{d}\,\ddot{\bar{d}}]$ in die Beziehung (3, 7) einsetzt, kann man dieselbe in der Form

$$(\varkappa_1 - c)\,[\bar{r}_1\,\bar{b}_1] + \varkappa_2\,[\bar{r}_2\,\bar{b}_2] + \varkappa_3\,[\bar{r}_3\,\bar{b}_3] = 0$$

schreiben und durch einmalige Integration nach der Zeit die Beziehung folgern:

$$(\varkappa_1 - c)\,[\bar{r}_1\,\bar{v}_1] + \varkappa_2\,[\bar{r}_2\,\bar{v}_2] + \varkappa_3\,[\bar{r}_3\,\bar{v}_3] = \bar{c}_1. \tag{4,2}$$

Dabei gilt nach dem allgemeinen Momentensatz auch die Beziehung

$$m_1\,[\bar{r}_1\,\bar{v}_1] + m_2\,[\bar{r}_2\,\bar{v}_2] + m_3\,[\bar{r}_3\,\bar{v}_3] = \bar{c}_2, \tag{4,3}$$

wo $\bar{c}_2$ den konstanten Drall des Systems darstellt.

Aus den Gleichungen (4, 2) und (4, 3) folgt aber unter der Annahme, daß die Determinante $\begin{vmatrix} \varkappa_2 & \varkappa_3 \\ m_2 & m_3 \end{vmatrix}$ von Null verschieden ist, daß die Ebene der drei Körper fest bleiben muß.

Ist nämlich der eine der Vektoren $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ gleich Null oder haben diese Vektoren gleiche Richtung, so besteht zwischen den Flächengeschwindigkeiten der drei Körper eine Beziehung von der Form (3, 12); daraus folgt nach unserem zweiten Hilfssatz, daß die Ebene der drei Körper fest bleiben muß.

Nehmen wir zweitens an, daß die beiden Vektoren nicht dieselbe Richtung haben. Dann lassen sich die Beziehungen (4, 2) und (4, 3) zufolge von (3, 1) und (3, 4) in der Form schreiben:

$$\lambda^2\,\{(\varkappa_1 - c)\,[\bar{r}'_1\,[\bar{\omega}\,\bar{r}'_1]] + \varkappa_2\,[\bar{r}'_2\,[\bar{\omega}\,\bar{r}'_2]] + \varkappa_3\,[\bar{r}'_3\,[\bar{\omega}\,\bar{r}'_3]]\} = \bar{c}_1,$$
$$\lambda^2\,\{m_1\,[\bar{r}'_1\,[\bar{\omega}\,\bar{r}'_1]] + m_2\,[\bar{r}'_2\,[\bar{\omega}\,\bar{r}'_2]] + m_3\,[\bar{r}'_3\,[\bar{\omega}\,\bar{r}'_3]]\} = \bar{c}_2,$$

oder nach Entwicklung der zweifachen Vektorprodukte:

$$\begin{aligned}\lambda^2\,\bar{\omega}\,\{(\varkappa_1 - c)\,r_1'^2 + \varkappa_2\,r_2'^2 + \varkappa_3\,r_3'^2\}& \\ - \lambda^2\,\{(\varkappa_1 - c)\,(\bar{\omega}\cdot\bar{r}'_1)\,\bar{r}'_1 + \varkappa_2\,(\bar{\omega}\cdot\bar{r}'_2)\,\bar{r}'_2 + \varkappa_3\,(\bar{\omega}\cdot\bar{r}'_3)\,\bar{r}'_3\} &= \bar{c}_1,\end{aligned} \tag{4, 4}$$

$$\begin{aligned}\lambda^2\,\bar{\omega}\,\{m_1\,r_1'^2 + m_2\,r_2'^2 + m_3\,r_3'^2\}& \\ - \lambda^2\,\{m_1\,(\bar{\omega}\cdot\bar{r}'_1)\,\bar{r}'_1 + m_2\,(\bar{\omega}\cdot\bar{r}'_2)\,\bar{r}'_2 + m_3\,(\bar{\omega}\cdot\bar{r}'_3)\,\bar{r}'_3\} &= \bar{c}_2.\end{aligned} \tag{4, 5}$$

Ist nun $(\varkappa_1 - c)\,r_1'^2 + \varkappa_2\,r_2'^2 + \varkappa_3\,r_3'^2$ gleich Null, so muß $\bar{c}_1$ der Ebene der drei Körper parallel sein. Wenn aber $(\varkappa_1 - c)\,r_1'^2 + \varkappa_2\,r_2'^2 + \varkappa_3\,r_3'^2$

von Null verschieden ist, dann erhält man durch skalare Multiplikation von (4, 4) und (4, 5) mit $[\bar{r}_1\, \bar{r}_2]$ die zwei Gleichungen

$$\lambda^2 \bar{\omega} \cdot [\bar{r}_1\, \bar{r}_2] = \frac{\bar{c}_1 \cdot [\bar{r}_1\, \bar{r}_2]}{(\varkappa_1 - c) r_1'^2 + \varkappa_2 r_2'^2 + \varkappa_3 r_3'^2},$$

$$\lambda^2 \bar{\omega} \cdot [\bar{r}_1\, \bar{r}_2] = \frac{\bar{c}_2 \cdot [\bar{r}_1\, \bar{r}_2]}{m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2 + m_3 r_3'^2},$$

aus denen man durch Vergleich die Beziehung entnimmt:

$$\left\{\frac{\bar{c}_1}{(\varkappa_1 - c) r_1'^2 + \varkappa_2 r_2'^2 + \varkappa_3 r_3'^2} - \frac{\bar{c}_2}{m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2 + m_3 r_3'^2}\right\} \cdot [\bar{r}_1\, \bar{r}_2] = 0.$$

Hieraus aber folgt, daß der konstante Vektor

$$\frac{\bar{c}_1}{(\varkappa_1 - c) r_1'^2 + \varkappa_2 r_2'^2 + \varkappa_3 r_3'^2} - \frac{\bar{c}_2}{m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2 + m_3 r_3'^2}$$

der Ebene der drei Körper parallel ist, und infolgedessen muß diese Ebene nach dem ersten Hilfssatze fest bleiben.

Ist aber diese Ebene fest, so muß $\bar{\omega}$ senkrecht auf dieser Ebene stehen; daher läßt sich die Beziehung (4, 5) in der Form

$$\lambda^2 \bar{\omega} = \frac{\bar{c}_2}{m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2 + m_3 r_3'^2} \tag{4, 6}$$

schreiben; andererseits sind die Flächengeschwindigkeiten der drei Körper:

$$[\bar{r}_1 \bar{v}_1] = \lambda^2 [\bar{r}_1' [\bar{\omega} \bar{r}_1']] = \lambda^2 \bar{\omega} r_1'^2 = \frac{\bar{c}_2 r_1'^2}{m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2 + m_3 r_3'^2},$$

$$[\bar{r}_2 \bar{v}_2] = \lambda^2 [\bar{r}_1' [\bar{\omega} \bar{r}_1']] = \lambda^2 \bar{\omega} r_2'^2 = \frac{\bar{c}_2 r_2'^2}{m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2 + m_3 r_3'^2},$$

$$[\bar{r}_3 \bar{v}_3] = \lambda^2 [\bar{r}_3' [\bar{\omega} \bar{r}_3']] = \lambda^2 \bar{\omega} r_3'^2 = \frac{\bar{c}_2 r_3'^2}{m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2 + m_3 r_3'^2};$$

also sind diese Flächengeschwindigkeiten konstant und infolgedessen müssen die Geraden, auf denen die Beschleunigungen der drei Körper liegen, durch den Schwerpunkt hindurchgehen, d. h. der Punkt D muß mit dem Schwerpunkt des Systems zusammenfallen und das Dreieck der drei Körper beständig gleichseitig sein.

II. *Die Bewegung der drei Körper im Lagrangeschen Fall findet auf einer festen Ebene statt.*

In der Tat, da in diesem Fall der Punkt D mit dem Schwerpunkt des Systems zusammenfällt, sind die Flächengeschwindigkeiten der drei Körper konstant:

$$\left\{\begin{aligned}
[\bar{r}_1 \bar{v}_1] &= \lambda^2 r_1'^2 \cdot \bar{\omega} - \lambda^2 (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_1') \bar{r}_1' = \bar{c}_1,\\
[\bar{r}_2 \bar{v}_2] &= \lambda^2 r_2'^2 \cdot \bar{\omega} - \lambda^2 (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_2') \bar{r}_2' = \bar{c}_2,\\
[\bar{r}_3 \bar{v}_3] &= \lambda^2 r_3'^2 \cdot \bar{\omega} - \lambda^2 (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_3') \bar{r}_3' = \bar{c}_3.
\end{aligned}\right. \tag{4, 7}$$

Haben nun zwei von den Vektoren $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ gleiche Richtung, so erkennt man leicht, daß die Ebene der drei Körper fest ist. Nehmen wir zweitens

an, daß keine zwei der Vektoren $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ gleiche Richtung haben. Wenn man die erste und die zweite der Gleichungen (4, 7) durch $r_1'^3$ bzw. $r_2'^3$ dividiert und voneinander abzieht, erhält man die Beziehung

$$\frac{\bar{c}_1}{r_1'^3} - \frac{\bar{c}_2}{r_2'^3} = \lambda^2 \left\{ \frac{(\bar{\omega} \cdot \dot{\bar{r}}_2')}{r_2'^3} \bar{r}_2' - \frac{(\bar{\omega} \cdot \bar{r}_1')}{r_1'^3} \bar{r}_1' \right\}$$

aus der man entnimmt, daß der konstante Vektor der linken Seite beständig der Ebene der drei Körper parallel ist. Folglich bleibt diese Ebene nach dem ersten Hilfssatz fest.

5. Die Beschleunigungen der drei Körper lassen sich im Lagrangeschen Fall in der Form

$$\bar{b}_1 = -f \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\lambda^3 \varrho^3} \bar{r}_1 = -f \cdot r_1'^3 \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\varrho^3} \cdot \frac{\bar{r}_1}{r_1^3},$$

$$\bar{b}_2 = -f \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\lambda^3 \varrho^3} \bar{r}_2 = -f \cdot r_2'^3 \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\varrho^3} \cdot \frac{\bar{r}_2}{r_2^3},$$

$$\bar{b}_3 = -f \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\lambda^3 \varrho^3} \bar{r}_3 = -f \cdot r_3'^3 \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\varrho^3} \cdot \frac{\bar{r}_3}{r_3^3}$$

schreiben, wobei ϱ die Größe der Seiten des Dreiecks ist, das die Körper in ihren ursprünglichen Lagen bilden.

Hieraus aber folgt, daß die Bahnkurven der drei Körper in bezug auf das betrachtete Koordinatensystem Kegelschnitte sind, die den Schwerpunkt des Systems als gemeinsamen Brennpunkt haben.

Ist nun in einem Zeitpunkt die Geschwindigkeit eines dieser Körper zum Radiusvektor dieses Körpers senkrecht, so muß, nach (3, 3), $\dot{\lambda}$ gleich Null sein; infolgedessen sind auch die Geschwindigkeiten der anderen Körper im selben Zeitpunkt zu ihren Radienvektoren senkrecht.

Hieraus folgt, daß, wenn die Bahn eines der Körper elliptisch ist, dies auch für die zwei übrigen Bahnen gilt.

Es ergibt sich ferner, daß die Scheitel der Bahnen, welche zu den durch den Schwerpunkt gehenden Hauptachsen gehören, ein oder zwei gleichseitige Dreiecke bilden, das letztere, wenn die Bahnen elliptisch sind.

Bezeichnet man jetzt mit $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2), (r_3, \theta_3)$ die Polarkoordinaten der drei Körper in bezug auf ein in der Ebene der Bewegung liegendes System mit dem Pol im Schwerpunkt, so gelten die Beziehungen

$$r_1 = \lambda r_1', \quad r_2 = \lambda r_2', \quad r_3 = \lambda r_3',$$

$$(4, 8) \qquad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = \omega = \frac{c_2}{\lambda^2 (m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2 + m_3 r_3'^2)},$$

wobei ω und c_2 die Beträge der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ und des Dralles $\bar{c}_2$ des Systems der drei Körper darstellen.

Andererseits ist, nach einer bekannten Formel, die Beschleunigung von P_1

$$\ddot{r}_1 - r_1 \dot{\theta}_1^2 = \ddot{\lambda} r_1' - \lambda r_1' \dot{\theta}_1^2 = -f \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\lambda^2 \varrho^3} r_1',$$

und wenn man in dieser Beziehung $\dot{\theta}_1$ durch $\frac{c_2}{\lambda^2 (m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2 + m_3 r_3'^2)}$ ersetzt, so erhält man für die Bestimmung von λ die Differentialgleichung

$$(4,9) \qquad \ddot{\lambda} - \frac{c_2^2}{(m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2 + m_3 r_3'^2)^2} \cdot \frac{1}{\lambda^3} + \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\varrho^3} \frac{f}{\lambda^2} = 0.$$

Die Gleichungen (4, 8) und (4, 9) sind die Differentialgleichungen der Bewegung und das ganze Problem ist jetzt auf Quadraturen zurückgeführt.

6. Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß die drei Körper nicht beständig in einer Geraden liegen; im anderen Fall verliert der Delaunaysche Satz seinen Sinn, es ist aber leicht zu erkennen, daß auch dann das Problem eben bleibt.

In der Tat, liegen die drei Körper beständig in einer Geraden, so liegen auch ihre Beschleunigungen auf derselben Geraden, die beständig durch den Schwerpunkt des Systems hindurchgeht; folglich muß die Bewegung jedes einzelnen von diesen Körpern, in bezug auf das im Paragraphen 2 betrachtete Koordinatensystem, in einer festen Ebene stattfinden, die durch den Schwerpunkt hindurchgeht. Diese drei Ebenen fallen aber zusammen, da die Körper in einer Geraden liegen; letztere muß also um den Schwerpunkt auf einer festen Ebene rotieren.

Bezeichnet man mit $\bar{a}$ einen Einheitsvektor, der senkrecht auf der Ebene der Bewegung steht, so ist die Winkelgeschwindigkeit der Geraden, auf welcher die Körper liegen,

$$(6,1) \qquad \bar{\omega} \equiv \omega \bar{a},$$

und eine einmalige Differentiation der ersten Gleichung (3, 3) nach der Zeit, die ebenso wie die Gleichungen (3, 1), (3, 2) und (3, 4) auch in diesem Fall gelten, mit Rücksicht auf den obigen Wert von $\bar{\omega}$, liefert die Beziehung

$$\bar{b}_1 = \ddot{\lambda} \bar{r}_1' + (2 \dot{\lambda} \omega + \lambda \dot{\omega}) [\bar{a} \bar{r}_1'] + \lambda \omega^2 \big[\bar{a} [\bar{a} \bar{r}_1']\big].$$

Da nun $\bar{a}$ senkrecht auf $\bar{r}_1'$ ist, so muß

$$2 \dot{\lambda} \omega + \lambda \dot{\omega} = 0$$

sein; also ist

$$(6,2) \qquad \omega = \frac{c}{\lambda^2}$$

und

$$(6,3) \qquad \bar{b}_1 = \ddot{\lambda} \bar{r}_1' + \lambda \omega^2 \big[\bar{a} [\bar{a} \bar{r}_1']\big] = \left(\ddot{\lambda} - \frac{c^2}{\lambda^3}\right) \bar{r}_1';$$

andererseits ist

$$\bar{b}_1 = f\left[m_2 \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\varrho_3^3} + m_3 \frac{\bar{r}_3 - \bar{r}_1}{\varrho_2^3}\right] = \frac{f}{\lambda^2}\left[m_2 \frac{\bar{r}_2' - \bar{r}_1'}{\varrho_3'^3} + m_3 \frac{\bar{r}_3' - \bar{r}_1'}{\varrho_2'^3}\right].$$

Da aber die drei Körper auf einer Geraden liegen, bestehen die Beziehungen

$$\bar{r}'_2 = c_2 \bar{r}'_1, \quad \bar{r}'_3 = c_3 \bar{r}'_1,$$

wo c_2, c_3 konstante Größen sind: also ist

$$\varrho'_1 = |c_2 - c_3| \, r'_1, \quad \varrho'_2 = |c_3 - 1| \, r'_1, \quad \varrho'_3 = |1 - c_2| \, r'_1$$

und

$$\bar{b}_1 = \frac{f}{\lambda^2} \left\{ m_2 \frac{c_2 - 1}{|c_2 - 1|^3} + m_3 \frac{c_3 - 1}{|1 - c_3|^3} \right\} \frac{\bar{r}'_1}{r'^3_1}.$$

Wenn man diesen Wert von $\bar{b}_1$ in die Gleichung (6, 3) einsetzt, erhält man für die Bestimmung von λ die Differentialgleichung

$$\ddot{\lambda} - \frac{c^2}{\lambda^3} = \frac{f}{r'^3_1} \left\{ m_2 \frac{c_2 - 1}{|1 - c_2|^3} + m_3 \frac{c_3 - 1}{|c_3 - 1|^3} \right\} \frac{1}{\lambda^2}. \tag{6,4}$$

Die Gleichungen (6, 2) und (6, 4) sind in diesem Fall die Differentialgleichungen der Bewegung.

(Eingegangen am 23. 8. 1936.)

Ein Verteilungsproblem bei dissipativen dynamischen Systemen.

Von

Eberhard Hopf in Leipzig.

Problemstellung. Die folgenden Ausführungen sind durch ein an anderen Stellen entworfenes Programm veranlaßt worden[1]). Es sei ein System von $2n$ Differentialgleichungen der Form

$$(1)\qquad \begin{aligned} \dot{\omega} &= \mu F(\omega, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \omega \end{aligned}$$

vorgelegt, wo $\mu > 0$ ein Parameter ist, und wo symbolisch

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega_1, \ldots, \omega_n), \\ \varphi &= (\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \\ F &= (F_1, \ldots, F_n) \end{aligned}$$

gesetzt wird. Bei beliebigen Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad \omega = \omega^0, \quad \varphi = \varphi^0$$

und für beliebiges μ soll im Laufe der Zeit, entweder bei endlichem oder unendlich großem Zeitpunkt,

$$\omega \to 0, \quad \varphi \to \varphi^1$$

gelten. Man kann (1) als die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems auffassen, dessen Lagekoordinaten mit φ und dessen Geschwindigkeiten mit ω zu identifizieren sind. Die μF sind gewisse Reibungs- oder sonstige hemmende Kräfte, unter denen das System im Laufe der Zeit stets einer Endlage φ^1 zustreben soll. μ ist dabei der „Reibungskoeffizient". Ein Kriterium für dieses Verhalten ist in den meisten Anwendungen die Abnahme der kinetischen Energie, d. h. die Existenz einer positiven und nur für $\omega = 0$ verschwindenden Funktion $E(\omega)$, für welche stets

$$\dot{E} < 0, \quad \omega \neq 0$$

---

[1]) E. Hopf, On causality, statistics and probability. Journ. of Math. and Phys. 13 (1934) S. 51–102. E. Hopf, Über die Bedeutung der willkürlichen Funktionen für die Wahrscheinlichkeitstheorie. Erscheint im Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Ver.

gilt. Strebt E genügend schnell nach Null, was in den meisten Anwendungen leicht durch Abschätzung von

$$\dot{E} = \mu \sum \frac{\partial E}{\partial \omega_i} F_i$$

entschieden werden kann, so existiert stets eine Grenzlage φ^1.

Wir setzen voraus, daß die Lagekoordinaten φ ausnahmslos Winkelvariable sind,

$$\varphi_1 \pmod{P_1}, \ldots, \varphi_n \pmod{P_n},$$

und daß die $F(\omega, \varphi)$ periodisch von den φ_i mit den entsprechenden Perioden P_i abhängen.

Ein typisches Beispiel ist die Bewegung eines flachen Objektes auf einer reibenden Ebene, auf welcher ein System paralleler Linien gleichen Abstandes δ eingezeichnet ist. Wir erteilen dem Objekt einen Impuls quer zu den Linien und gleichzeitig einen Drehimpuls und fragen nach der Endlage, wobei wir uns lediglich für die Lage relativ zu den Linien interessieren. Ist φ die Winkelkoordinate und x die Koordinate quer zu den Linien, so stellen demnach

$$\varphi \pmod{2\pi}, \quad x \pmod{\delta}$$

beide Winkelvariable dar. Die Bewegungsgleichungen enthalten φ periodisch, während x nicht explizit vorkommt.

Die Endlage φ^1 wird in bestimmter Weise von den Anfangsgrößen ω^0, φ^0 und von μ abhängen

$$\varphi^1 = \varphi^1(\omega^0, \varphi^0; \mu),$$

wobei φ_i^0, φ_i^1 nur (mod P_i) bestimmt sind. Unser Hauptinteresse gilt dem folgenden Problem, bei festgehaltener, sonst aber beliebiger Anfangslage φ^0.

Hauptproblem. Gibt es eine Verteilungsfunktion der Endlagen,

$$V(\psi, \omega^0, \varphi^0) \geqq 0,$$

periodisch in den ψ_i (mod P_i), derart, daß für eine beliebige periodische und R-integrable Funktion $h(\psi)$ und eine beliebige im ω^0-Raume summierbare Funktion $f(\omega^0)$

$$\lim_{\mu=0} \int\limits_{(\omega^0)} h(\varphi^1) f(\omega^0)\, d\omega^0 = \int\limits_{(\omega^0)} \frac{\int_0^P h(\psi) V(\psi, \omega^0, \varphi^0)\, d\psi}{\int_0^P V(\psi, \omega^0, \varphi^0)\, d\psi} f(\omega^0)\, d\omega^0$$

gilt?

Es ist klar, was hier die Abkürzungen $d\omega^0$, $d\psi$ und $\int_0^P$ zu bedeuten haben. Der Nachweis, daß unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen

über die Differentialgleichungen diese Frage im bejahenden Sinne beantwortet werden kann, ist dem Verfasser nicht gelungen.

Von ganz besonderem Interesse ist der Fall, wo das mechanische System eine universelle, d. h. von den Anfangsgrößen ω^0, φ^0 unabhängige Verteilungsfunktion der Endlagen besitzt,

$$V = V(\psi).$$

Dann kann die Grenzwertformel in der Form

$$(2) \qquad \lim_{\mu=0} \frac{\int\limits_{(\omega^0)} h(\varphi^1) f(\omega^0)\, d\omega^0}{\int\limits_{(\omega^0)} f(\omega^0)\, d\omega^0} = \frac{\int\limits_0^P h(\psi)\, V(\psi)\, d\psi}{\int\limits_0^P V(\psi)\, d\psi}$$

geschrieben werden. Man kann diesen Fall als analog zum ergodischen Falle bei konservativen dynamischen Systemen auffassen. Seine Bedeutung beruht auf der wichtigen Rolle, die er bei der Frage des Ursprungs des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Natur spielt. Wir erteilen dem System, immer in der festgehaltenen, sonst aber willkürlichen Anfangslage φ^0 einen veränderlichen Anfangsimpuls ω^0. Dabei sei

$$f(\omega^0)\, d\omega^0, \quad f \geqq 0,$$

die relative Häufigkeit, mit welcher dieser Impuls in das Volumelement $d\omega^0$ fällt,

$$\int\limits_{(\omega^0)} f(\omega^0)\, d\omega^0 = 1.$$

Bei festgehaltenem Reibungskoeffizienten μ ist dann die relative Häufigkeit, mit welcher die Endlage φ^1 in ein Teilgebiet G des n-dimensionalen φ-Torus hineinfällt, gleich

$$(3) \qquad \int\limits_{(\omega^0)} h(\varphi^1) f(\omega^0)\, d\omega^0,$$

wo mit h die charakteristische Funktion von G bezeichnet ist,

$$h(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi \text{ in } G, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(3) zählt automatisch die relative Anzahl der Fälle, bei welchen die Endlage in G liegt. Bei festem $\mu > 0$ hängt diese Häufigkeit natürlich ganz von der Verteilungsfunktion f der Anfangsimpulse ab, kurz, von der Art und Weise, wie das System anfänglich operiert wird. (2) lehrt indessen, daß diese Abhängigkeit sich bei schwachen Reibungskräften wenig bemerkbar macht. Die relative Häufigkeit des Ereignisses „φ^1 in G“ wird nahezu unabhängig von der Art des anfänglichen Operierens am System. Wir sehen dies als den wahren Grund dafür an, daß man überhaupt von einer numerisch bestimmten „Wahrscheinlichkeit“ dafür, daß die Endlage

gegebenen Bedingungen genügt, reden kann. Was zwischen der Anfangsphase φ^0, ω^0 und der Endlage φ^1 passiert, nämlich die Bewegung nach ganz bestimmten Gesetzen, hat einen dominierenden Einfluß auf das Zustandekommen der Wahrscheinlichkeit, insbesondere auf ihren Wert. Ein analoger Sachverhalt liegt beim Münzen- und Würfelspiel vor, sowie bei der Nadel und dem Schachbrett, vermutlich in allen Fällen, wo man „stabile" Häufigkeiten beobachtet.

Man darf indessen diese im Prinzip auf Poincaré zurückgehende Betrachtung nicht so mißverstehen, als ob die das Ereignis herbeiführenden Gesetzmäßigkeiten ausschließlich für seine Wahrscheinlichkeit verantwortlich sind. Würde man z. B. immer mit gleichem Anfangsimpuls starten, so käme stets die gleiche Endlage heraus und (2) wäre überhaupt nicht anwendbar. Für die Anwendung von (2) ist es wesentlich, daß die anfänglichen Häufigkeiten eine n-dimensionale Verteilung, genauer, eine summierbare „Dichte" $f(\omega^0)$ besitzen. Praktisch liegt dieser Fall bei den oben genannten Beispielen vor. Außer jener Einschränkung wird jedoch nichts von den anfänglichen Häufigkeiten verlangt. Die „gegebenen" Wahrscheinlichkeiten, aus welchen die gesuchte zu berechnen ist, sind in hohem Maße willkürlich, und trotzdem kommt ein bestimmter Wert für die letztere heraus. Qualität produziert Quantität.

Noch eine prinzipielle Bemerkung sei hier gestattet, obwohl sie über den Rahmen dieser Arbeit hinausgeht, nämlich zum Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen. Wir halten uns dabei an das Beispiel zweier von zwei Personen A, B operierten Rouletteräder. Was versteht man hier unter Unabhängigkeit des Operierens? Sicherlich, daß zwischen den beiden Operationen keine „funktionale" Abhängigkeit besteht. Man kann dies zwanglos folgendermaßen definieren. Für beide Räder gibt es je einen (eindimensionalen) Raum der Anfangsimpulse. Die Anfangsimpulse für A und B werden dann als unabhängig definiert, wenn die gleichzeitigen Kombinationen dieser beiden Impulse im (zweidimensionalen) Produktraume eine (zweidimensionale) Häufigkeitsverteilung mit einer summierbaren Dichte in diesem Raume besitzen. Besteht Unabhängigkeit in diesem Sinne, so ist auf Grund der Tatsache, daß das Roulette einen Mechanismus der obigen Art darstellt, die Produktregel für die Wahrscheinlichkeiten zweier von A und B hervorgebrachten Ereignisse ein streng beweisbares Theorem [2]). Diese Betrachtungen [3]) scheinen uns die Häufigkeitsnatur der Wahrscheinlichkeit in natürlicher Weise darzulegen.

---

[2]) Ausführlicheres l. c. [1]).

[3]) Sie sind jedoch nicht als Grundlage einer neuen Wahrscheinlichkeitstheorie gedacht, schon wegen der Kompliziertheit in der Durchführung der Einzelheiten. Jedoch erscheinen sie uns kaum vermeidlich, wenn man das Zustandekommen sta-

Wenn der Verfasser sich entschlossen hat, eine der allgemeinen Fragestellung gegenüber so unvollständige Arbeit zu veröffentlichen, so geschah dies in der Absicht, einen größeren Leserkreis für diese neuartige Gruppe von Problemen zu interessieren. Wir behandeln erstens den Fall, wo die Lagekoordinaten in den Kräften nicht explizit auftreten. Hier ergibt sich Gleichverteilung in den Endlagen ($V \equiv 1$). Zweitens wird der Fall eines Freiheitsgrades ausführlich diskutiert, d. h. der Fall eines Rouletterades, bei welchem die Reibung auch von der Lage abhängt. Man hat hier eine universelle, wenn auch nicht gleichförmige Endverteilung. Schließlich werden ohne Beweis einige Fälle mit zwei Freiheitsgraden besprochen.

§ 1.

Die F hängen nur von den ω ab.

In den Differentialgleichungen

$$\dot{\omega} = \mu F(\omega), \qquad \left(\dot{y} = \frac{dy}{d\tau}\right)$$
$$\dot{\varphi} = \omega$$

seien die Funktionen F_i im ganzen ω-Raume, mit Ausnahme von $\omega = 0$, stetig differenzierbar. Bei beliebiger Anfangsphase soll die Bewegung im Laufe der Zeit stets zur Ruhe kommen. Dann gilt der

Satz 1, 1. *Die Verteilungsfunktion V existiert und ist eine Konstante, d. h. für $\mu \to 0$ erhält man Gleichverteilung der Endlagen. Dabei darf in* (2) *h stetig oder die charakteristische Funktion eines Parallelepipedes im φ-Torus sein.*

Dem eigentlichen Beweise schicken wir mehrere Bemerkungen voraus. Setzt man

$$\omega = u, \quad \mu\varphi = x, \quad \mu\tau = t,$$

so gehen die Gleichungen über in

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \dot{u} &= F(u), \\ \dot{x} &= u, \end{aligned}$$

wo von nun ab der Punkt Differentiation nach der neuen Zeit t bedeuten soll. Zwischen Anfangsphase und Endlage bestehen Beziehungen der Art

$$\text{(5)} \qquad x^1 = x^0 + X(u^0), \; X(u^0) = \int_0^{t^1} u(t, u^0)\, dt,$$

wo $t^1 \leqq \infty$ die Endzeit bedeutet. In den ursprünglichen Koordinaten hat man

$$\text{(6)} \qquad \varphi^1 = \varphi^0 + \frac{X(u^0)}{\mu}.$$

---

biler Häufigkeiten in der Natur wirklich verstehen will. Die Erforschung der zu stabilen Häufigkeiten, allgemein zu universellen Verteilungen, führenden Mechanismen bildet ein wichtiges und mathematisch nicht reizloses Kapitel der mathematischen Naturwissenschaften. Das Turbulenzproblem gehört z. B. in diese Gruppe.

Offenbar kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$(7) \qquad \varphi^0 = 0, \quad x^0 = 0$$

annehmen. Der Satz ist einleuchtend, wenn die Funktionaldeterminante $\partial X / \partial u^0$ von Null verschieden ist[4]). Man beachte jedoch, daß nichts derartiges hier vorausgesetzt wird. Wir beweisen zunächst zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1, 2. *Die Funktionen $X_i(u)$ sind im u-Raume meßbar.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die Endzeit

$$t^1 = t^1(u^0)$$

im u^0-Raume nach unten halbstetig ist. u^0 sei ein beliebiger fester Punkt. Man setze

$$m = \mathrm{Min}\,(t^1(u^0) - \varepsilon, a),$$

wobei $\varepsilon > 0$, $a > 0$ beliebig sind. a ist eingeführt, um den Fall $t^1 = \infty$ zu erfassen. Es ist klar, daß das Zeitstück

$$(8) \qquad 0 \leqq t \leqq m$$

der Integralkurve

$$u(t, u^0) = u(0, u^0) = u^0$$

eine positive Entfernung vom singulären Punkt $u = 0$ besitzt. Wegen der stetigen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen ist daher jede in genügender Nähe von u^0 startende Integralkurve durch (8) verfolgbar. Für alle Anfangspunkte u dieser Umgebung gilt somit

$$t^1(u) > m.$$

Da ε, a beliebig waren, folgt die gewünschte Halbstetigkeit. Nach einem bekannten Satze[5]) gibt es dann eine aufsteigende Folge stetiger und gegen $t^1(u)$ konvergierender Funktionen

$$t_1(u) \leqq t_2(u) \leqq \ldots, \quad t_n(u) \to t^1(u).$$

Wegen $t^1 > 0$ kann stets

$$0 \leqq t_n(u) < t^1(u) \qquad (u \neq 0)$$

erreicht werden. Die Funktionen

$$x_n(u^0) = \int_0^{t_n} u(t, u^0)\, dt, \quad t_n = t_n(u^0),$$

sind nun in jedem Punkte $u^0 \neq 0$ stetig und es gilt

$$\lim_{n=\infty} x_n(u^0) = X(u^0),$$

woraus der Hilfssatz unmittelbar folgt.

---

[4]) A. H. Copeland. Erscheint im Bull. Am. Math. Soc.

[5]) Vgl. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1918, S. 402, Satz 1.

Der wesentliche Punkt im Beweise von Satz 1, 1 ist in folgendem Satze enthalten.

Hilfssatz 1, 3. *$h(\psi)$ sei eine in den ψ_i (mod P_i) periodische und R-integrable Funktion. Die Kurve*

$$y(t):\quad y_1(t), \ldots, y_n(t); \qquad 0 \leqq t \leqq a$$

sei stetig differenzierbar, und die Werte der Ableitungen

$$y_1'(t), \ldots, y_n'(t)$$

seien für jedes t, abgesehen von einer t-Menge vom Maße Null, linear unabhängig. Dann ist

$$\lim_{\mu=0} \frac{1}{a} \int_0^a h\left(\frac{y(t)}{\mu}\right) dt = \frac{\int_0^P h(\psi)\, d\psi}{\int_0^P d\psi}.$$

Beweis. Im speziellen Falle einer Geraden, $y' = \text{const.}$, ist dies der Weylsche Gleichverteilungssatz[6]). Der allgemeine Fall läßt sich ganz ähnlich beweisen. Wir setzen h als stetig voraus. Der Übergang zu R-integrablen h kann genau wie bei Weyl vollzogen werden. Wegen der gleichmäßigen Approximierbarkeit von h durch trigonometrische Polynome genügt es, den Fall (mit $P_i = 2\pi$)

$$h = e^{i \Sigma N_\nu \psi_\nu}, \quad \Sigma |N_\nu| > 0,$$

mit ganzen N_ν zu betrachten. Dabei ist zu beweisen, daß der fragliche Grenzwert Null ist. Die zu beweisende Gleichung lautet dann

$$\lim_{\mu=0} \int_0^a e^{i \frac{g(t)}{\mu}} dt = 0, \tag{9}$$

wobei

$$g(t) = \Sigma N_\nu y_\nu(t)$$

gesetzt ist. $g'(t)$ ist in $\langle 0, a \rangle$ stetig und kann wegen der Unabhängigkeits-Voraussetzung nur in einer Nullmenge verschwinden. Da die Menge der Nullstellen von g' abgeschlossen ist, kann man sie mit endlich vielen offenen Intervallen beliebig kleinen Gesamtmaßes ($< \varepsilon$) überdecken. Die Komplementärmenge dieser Intervallsumme in $\langle 0, a \rangle$ ist dann eine Summe von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen I_λ, und man hat

$$\left| \int_0^a e^{i \frac{g(t)}{\mu}} dt - \sum_\lambda \int_{I_\lambda} e^{i \frac{g(t)}{\mu}} dt \right| < \varepsilon.$$

[6]) H. Weyl, Math. Annalen 77 (1916), S. 313.

Nach obigen hat nun $|g'(t)|$ in jedem der Intervalle I eine positive untere Grenze. In I kann man daher $s = g(t)$ als neue Variable einführen. Dann ist $t = \gamma(s)$ mit stetigem γ'. In

$$\int_I e^{i\frac{g(t)}{\mu}} d\,t = \int_\alpha^\beta e^{i\frac{s}{\mu}} \gamma'(s)\,d\,s$$

strebt indessen die rechte Seite für $\mu \to 0$ nach Null. Daraus ergibt sich der Beweis.

Beweis von Satz 1, 1. Man betrachte die der Anfangsphase x^0, u^0 entsprechende Endlage (5). Betrachten wir nun die Werte $x(t)$, $u(t)$ der durch x^0, u^0 gehenden Integralkurve von (4) als neue Anfangsphase, so muß derselben die gleiche Endlage entsprechen, d. h. es ist wegen (5)

$$x^0 + X(u^0) = x(t) + X\big(u(t)\big).$$

Wegen der u-Gleichungen (4) lautet dies in differentieller Schreibweise

$$\frac{d\,X(u(t))}{d\,t} = -\,u(t), \tag{10}$$

entlang einer beliebigen Lösungskurve der u-Gleichungen (4). Insbesondere sind also die X_i entlang jeder solchen Kurve stetig differenzierbar.

Es genügt nun, die Gleichverteilungsformel für ein Stromröhrenstück G im u-Raume zu beweisen. Wir erhalten ein solches G, wenn wir eine Stromlinie der u-Gleichungen (4) mit einem kleinen $(n-1)$-dimensionalen Hyperflächenstück S schneiden und von jedem Punkte von S die Stromlinie bis zu einem festen Zeitpunkt $t = a$ verfolgen. In G kann man immer neue Koordinaten

$$t, \quad Q = (q_1, \ldots, q_{n-1})$$

derart einführen, daß die u-Gleichungen (4)

$$\dot{q}_i = 0$$

lauten und daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(q_1, \ldots, q_{n-1}, t)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)} \neq 0$$

und stetig ist. Es genügt dann die Gleichverteilung in der Form

$$\lim_{\mu=0} \frac{\int\limits_{(Q)} \int\limits_0^a h\left(\frac{X}{\mu}\right) d\,t\,d\,q}{a \int\limits_{(Q)} d\,q} = \frac{\int\limits_0^P h(\psi)\,d\,\psi}{\int\limits_0^P d\,\psi} \tag{11}$$

zu beweisen.

Wir brauchen den Hilfssatz 1, 2, um uns zu vergewissern, daß das Integral links in (11) überhaupt einen Sinn hat. Ist h stetig, so ist die Meßbarkeit des Integranden im u-Raum, also auch im (q, t)-Raume klar.

Im Falle, wo h die charakteristische Funktion eines Parallelepipeds im φ-Torus ist, muß gezeigt werden, daß die u-Menge, für welche der Punkt

$$\frac{X(u)}{\mu}$$

in dieses Parallelepiped fällt, meßbar ist. Dies ist ebenfalls klar, da ein solches Gebiet durch abzählbar viele Ungleichungen definiert ist.

Wir erinnern daran, daß das Integrationsgebiet links in (11) eineindeutiges und meßbares Bild eines u-Gebietes ist. Die Integralkurven sind die Parallelen zur t-Achse, und wegen (10) ist

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -u$$

bei festgehaltenem Punkte Q in (Q). Die Punkte u mit linear unabhängigen Koordinaten u_i bilden nun im u-Gebiete, also auch im Integrationsgebiete eine Menge vom Maße des ganzen Gebietes. Nach dem Fubinischen Satze gilt also: Für jeden Punkt Q in (Q), bis auf eine Nullmenge, sind die Größen

$$u_1 = u_1(t), \ldots, u_n = u_n(t)$$

für fast alle t linear unabhängig. Setzen wir

$$X = X(t, Q) = y(t),$$

so sind für jeden solchen Punkt die Voraussetzungen von Hilfssatz 1, 3 erfüllt und es ist

$$\lim_{\mu=0} \frac{1}{a}\int_0^a h\left(\frac{X}{\mu}\right) dt = \frac{\int_0^P h(\varphi)\, d\varphi}{\int_0^P d\varphi}. \tag{12}$$

Hieraus folgt (11) durch Integration bezüglich Q. Dabei darf man wegen der Beschränktheit des Integranden h zum Doppelintegral übergehen. Die Betrachtung hat das schärfere Resultat (12) für fast alle Anfangspunkte u^0 im u-Raume geliefert.

§ 2.

Eine Hilfsbetrachtung.

Wir setzen $\|g\|$ für die obere Grenze des Betrages einer Funktion g bezüglich aller betrachteten Veränderlichen. Es sei nun

$$f(y_1, \ldots, y_n, \varphi)$$

eine in φ (mod 1) periodische, stetige und beschränkte Funktion aller Variablen, wofern nur der Punkt $(y_1, \ldots, y_n)$ in einem gewissen Gebiete G liegt. Wir setzen allgemein

$$\bar{f}(y) = \int_0^1 f(y, \varphi)\, d\varphi$$

für das Mittel bezüglich der Winkelvariablen φ.

Hilfssatz 2,1. *Die stetige Kurve*

$$y(x): \quad y_1(x), \ldots, y_n(x); \quad a \leqq x \leqq b,$$

liege ganz in G. Dann strebt die Differenz

$$\int_a^b f\left(y(x), \frac{x}{\mu}\right) dx - \int_a^b \bar{f}(y(x))\, dx \tag{13}$$

nach Null, wenn $\mu \to 0$. Betrachtet man eine Menge von in $a \leqq x \leqq b$ gleichgradig stetigen Kurven in hinreichend kleiner Nachbarschaft der gegebenen Kurve, so ist die Konvergenz gleichmäßig.

Beweis: Wir betrachten einen ganz in G gelegenen Bereich B, der seinerseits die obige Kurve oder Kurvenmenge enthält. $\omega_f(\delta)$ sei der Stetigkeitsmodul von f in B, d. h. die obere Grenze von

$$|f(y', \varphi) - f(y, \varphi)|$$

für alle φ und alle Punktepaare y, y' in B mit

$$|y_i' - y_i| < \delta.$$

Ähnlich bedeute $\omega_y(\varepsilon)$ den gemeinsamen Stetigkeitsmodul der Funktionen $y_i(x)$ für alle Kurven. Wir teilen das Intervall $a \leqq x \leqq b$ in k gleichgroße Intervalle

$$(i): \quad a + (i-1)\frac{b-a}{k} \leqq x < a + i\frac{b-a}{k}; \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Dann ist, für $y_i = y(x')$, wo x' in (i) liegt,

$$\left| \int_a^b f\left(y(x), \frac{x}{\mu}\right) dx - \sum_1^k \int_{(i)} f\left(y_i, \frac{x}{\mu}\right) dx \right| \tag{14}$$

$$\leqq \sum_1^k \int_{(i)} \left| f\left(y(x), \frac{x}{\mu}\right) - f\left(y_i, \frac{x}{\mu}\right) \right| dx$$

$$\leqq (b-a)\, \omega_f \left\{ \omega_y\left(\frac{b-a}{k}\right) \right\}.$$

Nun kann man

$$\int_{(i)} f\left(y_i, \frac{x}{\mu}\right) dx = \frac{b-a}{k} \cdot \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(y_i, \varphi)\, d\varphi$$

schreiben, wo

$$\beta - \alpha = \frac{b-a}{k\mu}$$

ist. Da nach einer einfachen Schlußweise

$$\left|\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(y_i, \varphi)\,d\varphi - \bar{f}(y_i)\right| \leqq \frac{2}{\beta-\alpha}\|f\|$$

gilt, folgt

$$\left|\int_{(i)} f\left(y_i, \frac{x}{\mu}\right) dx - \int_{(i)} \bar{f}(y_i)\,dx\right| \leqq 2\mu\|f\|.$$

Kombiniert man dies mit (14) und berücksichtigt man, daß (14) bestehen bleibt, wenn links $\bar{f}$ statt f geschrieben wird, so erhält man die Ungleichung

$$(15)\qquad \left|\int_a^b f\left(y(x), \frac{x}{\mu}\right) dx - \int_a^b \bar{f}(y(x))\,dx\right|$$
$$\leqq 2\mu k\|f\| + 2(b-a)\,\omega_f\left\{\omega_y\left(\frac{b-a}{k}\right)\right\}.$$

Der Beweis des Satzes ergibt sich hieraus, wenn man die Hilfsgröße k genügend groß wählt, und dann μ bei festem k hinreichend verkleinert.

Für eine spätere Anwendung sei noch bemerkt, daß der Satz offenbar bestehen bleibt, wenn die obere Grenze b in den Integralen durch eine beliebige Zahl x des Intervalles (a, b) ersetzt wird. Die Gleichmäßigkeit gilt dann auch bezüglich x.

Hilfssatz 2, 2. *G sei ein achsenparalleles Parallelepiped im u-Raume. Die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y}$ seien stetig in allen Variablen, wenn der Punkt im abgeschlossenen G liegt. Ferner seien alle Kurven $y(x)$ der betrachteten Menge stetig differenzierbar mit endlichem gemeinsamem $\left\|\frac{dy}{dx}\right\|$. Dann ist der Betrag von* (13) *kleiner als*

$$(b-a)\,C\sqrt{\mu},$$

wo C nur von den oberen Grenzen

$$\|f\|,\quad \left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|,\quad \left\|\frac{dy}{dx}\right\|$$

abhängt.

Beweis. f genügt in G der Lipschitzbedingung mit dem Lipschitzfaktor

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|.$$

Daher ist in G die rechte Seite von (15) kleiner als

$$2\mu k\|f\| + A\frac{(b-a)^2}{k}\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|\cdot\left\|\frac{dy}{dx}\right\|,$$

wo $A > 0$ eine numerische Konstante ist. Wählt man für k die kleinste ganze Zahl

$$\geqq \frac{b-a}{\sqrt{\mu}},$$

so folgt der Satz.

§ 3.

Die Lösungen der Differentialgleichungen bei kleinem μ.

In den Differentialgleichungen

$$\text{(16)} \qquad \frac{du}{dx} = F\left(u, \frac{x}{\mu}\right)$$

seien die Funktionen

$$F(u, \varphi): \quad F_i(u_1, \ldots, u_n, \varphi); \qquad i = 1, \ldots, n,$$

periodisch in φ (mod 1) und nebst den Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial u}$ in einem u-Gebiete stetige Funktionen aller $n+1$ Variablen. Wir betrachten neben (16) auch die „gemittelten" Gleichungen

$$\overline{(16)} \qquad \frac{du}{dx} = \overline{F}(u),$$

wo in $\overline{F}_i$ die Mittelung sich auf die Winkelvariable φ bezieht. Dann gilt der

Satz 3, 1. *Es sei $\overline{u}(x)$ die den Anfangsbedingungen*

$$x = a, \quad u = \overline{u}^0,$$

$\overline{u}^0$ in G, genügende Lösung von $\overline{(16)}$. Sie verlaufe für $a \leqq x \leqq b$ ganz in G. Es gibt dann zwei positive Zahlen μ_0 und B derart, daß die den gleichen Anfangswerten entsprechende Lösung $u(x)$ von (16), *$\mu < \mu_0$, im gleichen x-Intervalle in G verläuft, und daß in $\langle a, b\rangle$*

$$|u_i(x) - \overline{u}_i(x)| < B\sqrt{\mu}; \qquad i = 1, \ldots, n$$

gilt. μ_0 und B können bei hinreichend geringer Variation des Anfangspunktes $\overline{u}^0$ fest gewählt werden.

Beweis. Unter der Distanz $D(u, u')$ zweier Punkte u, u' des u-Raumes sei hier die Größe

$$\operatorname*{Max}_i |u'_i - u_i|$$

verstanden. Wir wählen die abgeschlossene Umgebung

$$D(u, \bar{u}(x)) \leqq 2\varkappa, \quad a \leqq x \leqq b, \tag{17}$$

des Bogens $\bar{u}(x)$, $a \leqq x \leqq b$, ganz innerhalb G.

Die oberen Grenzen $\|F\|$, $\left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\|$ seien auf diese Umgebung bezogen. Variiert man den Anfangspunkt jenes Bogens

$$\bar{u}(a) = \bar{u}^0$$

wenig, so bleiben diese Grenzen beschränkt.

Die $\varkappa$-Umgebung des Anfangspunktes $\bar{u}^0$ ist

$$D(u, \bar{u}^0) \leqq \varkappa. \tag{18}$$

Die $\varkappa$-Umgebung jedes Punktes von (18) liegt natürlich in (17). Nach einer bekannten, bei den sukzessiven Annäherungen angewandten Überlegung verläuft nun die durch irgendeinen in (18) gelegenen Anfangspunkt $u = u^0$ $(x = a)$ gehende Lösung $u(x)$ von (16) ganz in der $\varkappa$-Umgebung dieses Anfangspunktes, wenn x auf das Intervall

$$a \leqq x \leqq a + \frac{\varkappa}{\|F\|} \tag{19}$$

beschränkt bleibt. Somit verläuft sie ganz in

$$D(u, \bar{u}^0) \leqq 2\varkappa, \tag{20}$$

also erst recht in (17), wenn x in (19) liegt. Die Lösung befriedigt die Gleichung

$$u(x) - u^0 = \int_a^x F\left(u(x), \frac{x}{\mu}\right) d x.$$

Im Intervall (19) darf auf das Integral, mit (20) als Parallelepiped, der Hilfssatz 2, 2 angewandt werden, wobei zu beachten ist, daß

$$\left\|\frac{d y}{d x}\right\| = \left\|\frac{d u}{d x}\right\| = \|F\|$$

gilt. Es ergibt sich

$$\left|u_i(x) - u_i^0 - \int_a^x \bar{F}_i(u(x)) d x\right| < C' \sqrt{\mu}\,; \qquad i = 1, \ldots, n \tag{21}$$

im Intervalle (19). Dabei hängt C' nur von den besagten oberen Grenzen in (17) ab. Wir erwähnen noch einmal, daß hier u^0 ein ganz beliebiger, in

$$D(u^0, \bar{u}^0) \leqq \varkappa \tag{22}$$

gelegener Aufangspunkt sein darf. Außerdem können $\varkappa$, C' fest gewählt werden, wenn der Anfangspunkt $\bar{u}^0$ des ursprünglichen Bogens $\bar{u}(x)$ genügend wenig variiert. Nun ist

$$\bar{u}_i(x) - \bar{u}_i^0 = \int_a^x \bar{F}_i(\bar{u}(x))\,dx, \tag{23}$$

und im Intervalle (19) verläuft die Kurve $\bar{u}(x)$ ganz in (20). Aus (21) und (23) ergibt sich daher nach Anwendung des Mittelwertsatzes leicht

$$D\{u(x), \bar{u}(x)\} < D(u^0, \bar{u}^0) + C'\sqrt{\mu} + n\left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\| \cdot \int_a^x D(u, \bar{u})\,dx.$$

Eine geläufige Diskussion dieser linearen Differentialungleichung liefert dann

$$D\{u(x), \bar{u}(x)\} < C''\,D(u^0, \bar{u}^0) + C'''\sqrt{\mu} \tag{24}$$

im Intervalle (19). Man beachte, daß hier die beiden Konstanten C fest gewählt werden können, wenn $\varkappa$ in (17) ein für allemal passend festgesetzt wird, und wenn der Anfangspunkt $\bar{u}^0$ des Bogens $\bar{u}(x)$ genügend wenig variiert. Außerdem darf hierbei ein ganz beliebiger Punkt dieses Bogens die Rolle des Anfangspunktes $\bar{u}^0$ übernehmen.

Wir betrachten sukzessive die x-Intervalle

$$(a, a+l),\ (a+l,\ a+2l), \ldots;\ l = \frac{\varkappa}{\|F\|},$$

von denen das erste (19) ist. Im ersten Intervalle folgt wegen (24) und mit Rücksicht auf

$$u(a) = \bar{u}(a)$$

sofort die zu beweisende Ungleichung. Insbesondere gilt sie im Endpunkte. Faßt man diesen als Anfangspunkt des zweiten Intervalls auf, so kann man (24) noch einmal anwenden, usw. Dabei ergibt sich schließlich im ganzen Intervalle (a, b) die gewünschte Ungleichung nebst allen Behauptungen bezüglich Variation von $\bar{u}^0$, μ_0 muß dabei lediglich so gewählt werden, daß $u(x, \mu)$ immer in (17) hineinfällt.

Satz 3, 2. *Die Voraussetzungen seien die gleichen wie oben. Dann konvergieren für $\mu \to 0$ auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \bar{u}^0}$ der Lösung $u(x, \bar{u}^0; \mu)$ von (16) nach den Anfangskoordinaten gegen die entsprechenden Größen für das gemittelte System $\overline{(16)}$, und zwar gleichmäßig im x-Intervalle $\langle a, b\rangle$. Variiert man den Anfangspunkt $\bar{u}^0$ genügend wenig, so besteht auch Gleichmäßigkeit bezüglich $\bar{u}^0$.*

Beweis. Die Größen

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial u_k^0}; \quad u = u(x, u^0; \mu),$$

(wir schreiben wieder u^0 statt $\bar{u}^0$) genügen bekanntlich den Variationsgleichungen von (16),

$$\frac{d\alpha_{ik}}{dx} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial u_\nu} \alpha_{\nu k}; \qquad i = 1, \ldots, n \tag{25}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\alpha_{ik} = \varepsilon_{ik} \equiv \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \qquad x = a.$$

Entsprechend hat man für die aus der Lösung $\bar{u}(x, u^0)$ von $\overline{(16)}$ gebildeten Größen

$$\bar{\alpha}_{ik} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial u_k^0}$$

die Gleichungen

$$\frac{d\bar{\alpha}_{ik}}{dx} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial u_\nu} \bar{\alpha}_{\nu k}; \qquad i = 1, \ldots, n \tag{$\overline{25}$}$$

mit denselben Anfangsbedingungen. In (25) ist genauer

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u}\left(u(x, u^0; \mu), \frac{x}{\mu}\right), \tag{26}$$

und in $\overline{(25)}$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial u}(\bar{u}(x, u^0)) \tag{$\overline{26}$}$$

zu setzen. Wir lassen in (25), $\overline{(25)}$ den Index k weg. Zu beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ können wir nun nach vorangehendem Satze μ_0 so wählen, daß für $\mu < \mu_0$ die Größen (26) von den Größen

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\bar{u}(x, u^0), \frac{x}{\mu}\right)$$

im x-Intervalle (a, b) um weniger als ε abweichen. μ_0 kann fest gewählt werden, wenn u^0 hinreichend wenig variiert. Durch Subtraktion von (25), $\overline{(25)}$ und durch Integration erhält man dann nach einer Rechnung, deren Prinzip klar ist, Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \alpha(x) - \bar{\alpha}(x) &= \vartheta\, \varepsilon \int_a^x |\bar{\alpha}|\, dx + \vartheta' \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| \int_a^x |\alpha - \bar{\alpha}|\, dx \\ &\quad + \left\{ \int_a^x \frac{\partial F}{\partial u}\left(\bar{u}(x), \frac{x}{\mu}\right) \bar{\alpha}\, dx - \int_a^x \frac{\partial \bar{F}}{\partial u}(\bar{u}(x))\, \bar{\alpha}\, dx \right\}, \end{aligned} \tag{27}$$

wo jeder Term rechts durch eine Summe zu ersetzen ist, und wo ϑ, ϑ' Zahlen vom Betrage kleiner als Eins bedeuten. Der Durchsichtigkeit

halber behandeln wir (27), als ob dort nur eine einzige Funktion α bzw. $\bar{\alpha}$ vorkommt. Die Schranke $\left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\|$ bezieht sich auf eine passende feste Umgebung des Bogens $\bar{u}(x)$. Man kann alles so einrichten, daß diese Schranke, sowie das Integral im ersten Term in (27) gleichmäßig beschränkt bleiben, wenn u^0 genügend wenig variiert. Auf die geschweifte Klammer kann man Hilfssatz 2, 1 — siehe auch die Bemerkung am Schluß des Beweises — anwenden, da die Integranden von der Form

$$f\left(y_1(x), \ldots, y_{n+1}(x), \frac{x}{\mu}\right)$$

bzw.

$$\bar{f}(y_1(x), \ldots, y_{n+1}(x))$$

sind, mit $y_1 = \bar{u}_1, \ldots, y_n = \bar{u}_n, y_{n+1} = \bar{\alpha}$. Die gleichgradige Stetigkeit der y folgt daraus, daß sie Lösungen der Differentialgleichungen (16) bzw. (25) sind. Man kann daher μ_0 so bestimmen, daß für $\mu < \mu_0$ auch die geschweifte Klammer dem Betrage nach kleiner als ε wird, und zwar gleichmäßig in x und u^0. Man erhält dann aus (27)

$$|\alpha(x) - \bar{\alpha}(x)| < B'\varepsilon + B'' \int_a^x |\alpha - \bar{\alpha}|\, dx$$

in (a, b) und mit von u^0 (bei hinreichend kleiner Variation) unabhängigen B', B'', und schließlich

$$|\alpha - \bar{\alpha}| < B'''\varepsilon, \quad a \leqq x \leqq b,$$

mit ähnlicher Konstante B'''. Hieraus folgt der Satz.

§ 4.

Das Verhalten der Endlagen für $\mu \to 0$.

Von den Funktionen F in den Gleichungen (1) wird vorausgesetzt, daß sie und die Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial \omega}$ im ganzen ω-Raume, abgesehen von $\omega = 0$, stetig von allen ω, φ abhängen. Die kinetische Energie $E = \frac{1}{2}\Sigma\omega_\nu^2$ soll stets abnehmen,

$$\dot{E} = \mu\,\Sigma\omega_\nu F_\nu = -\mu Q(\omega, \varphi) < 0. \tag{28}$$

Außerdem verlangen wir, daß stets

$$Q(\omega, \varphi) \geqq q(E) > 0 \tag{29}$$

mit endlichem

$$\int_0^E \frac{\sqrt{E}}{q(E)}\, dE = p(E) \tag{30}$$

gelten soll.

Wegen (28) ist dann bei passender Zeit $\tau^1 \leqq \infty$

$$E \to 0, \quad \tau \to \tau^1.$$

Außerdem ist wegen (28), (29) und (30) für $\tau < \tau' \leqq \tau^1$

$$(31) \qquad \left|\int_{\tau}^{\tau'} \omega_i \, d\tau\right| \leqq \frac{\sqrt{2}}{\mu} \int_{\tau}^{\tau'} \sqrt{E}\, dt \leqq \frac{\sqrt{2}}{\mu} [p(E) - p(E')],$$

woraus die Existenz der Endlage φ^1 für $\tau \to \tau^1$ folgt.

Wie in § 1 transformieren wir die Gleichungen (1) durch

$$(32) \qquad \omega = u, \quad \mu\,\varphi = x, \quad \mu\,\tau = t.$$

Man erhält dann

$$(33) \qquad \begin{aligned} \dot{u} &= F\left(u, \frac{x}{\mu}\right), \\ \dot{x} &= u, \end{aligned}$$

wo nunmehr der Punkt Differentiation nach der neuen Zeit t bedeuten soll. Dann gilt für die Anfangs- und Endlagen

$$\varphi^0 = \frac{x^0}{\mu}, \quad \varphi^1 = \frac{x^1}{\mu} \quad \left(\tau^1 = \frac{t^1}{\mu}\right).$$

Wegen (31) und (32) ist

$$(34) \qquad \left|\frac{d x_i}{d p(E)}\right| \leqq \sqrt{2}.$$

Wir beschränken uns von nun ab bei den Gleichungen (1) auf den speziellen Fall, wo die F nur eine der Winkelvariablen φ_i, etwa φ_1, enthalten. Ferner sei

$$F_1(0, \omega_2, \ldots, \omega_n, \varphi_1) \equiv 0$$

vorausgesetzt.

Dies hat zur Folge, daß eine beliebige der Beziehungen $\omega_1 > 0$, $\omega_1 = 0$, $\omega_1 < 0$ für alle Zeiten gilt, falls sie in einem Moment stattgefunden hat. Wir schließen den unwesentlichen Fall $\omega_1 = 0$ aus und beschränken uns auf den Fall

$$(35) \qquad \omega_1 > 0.$$

Wegen $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ kann daher φ_1 als unabhängige Variable eingeführt werden.

Unter den obigen Annahmen gilt der

Satz 4, 1. *Für $\mu \to 0$ gilt*

$$\mu\,\varphi^1(\omega^0, \varphi^0, \mu) = x^1(u^0, x^0, \mu) \to \bar{x}^1(u^0, x^0),$$

wobei $\bar{x}^1$ bei gleichen Anfangsbedingungen die Endlage des bezüglich der Winkelvariablen gemittelten Systems (33) *ist. Die Konvergenz ist in φ^0, u^0 gleichmäßig, wofern nur u^0 in einem in $u_1^0 > 0$ gelegenen abgeschlossenen Bereiche B liegt.*

Beweis. Dividiert man die Gleichungen (33) durch die erste der zweiten Reihe, so folgt

$$\frac{d u_i}{d x_1} = \frac{F_i\left(u, \frac{x_1}{\mu}\right)}{u_1}; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{36}$$

$x_2, \ldots, x_n$ werden dann durch Quadratur erhalten,

$$\frac{d x_i}{d x_1} = \frac{u_i}{u_1}; \qquad i = 2, \ldots, n. \tag{36'}$$

Die Gleichungen (36) sind nun von dem in § 3 behandelten Typus. Man beachte (35), d. h. $u_1 > 0$. Die den gleichen Anfangsbedingungen

$$u = u^0, \quad u_1^0 > 0, \quad x_1 = x_1^0$$

genügende Lösung des gemittelten Systems (36) sei $\bar{u}(x_1)$ und der Endwert von x_1 sei $\bar{x}_1^1$. Für diese Lösung und die entsprechenden x_i gilt ebenfalls die Ungleichung (34). Man beachte nun, daß im Laufe der Bewegung stets $p \to 0$ gilt. Für jeden Punkt

$$x_1 \leqq a; \quad a < \bar{x}_1^1,$$

ist nun nach Satz 3, 1 für $\mu \to 0$

$$u(x_1, \mu) \to \bar{u}(x_1) \tag{37}$$

und daher wegen (36')

$$x_i(x_1, \mu) \to \bar{x}_i(x_1), \qquad i \geqq 2 \tag{38}$$

gleichmäßig in $x_1^0 \leqq x_1 \leqq a$.

Insbesondere ist

$$p\{E(u(a, \mu))\} \to p\{E(\bar{u}(a))\}. \tag{39}$$

Dabei ist überall die Konvergenz nach jenem Satze gleichmäßig in u^0, falls dieses wenig abgeändert wird. Man wähle nun a so nahe bei $\bar{x}_1^1(u^0)$ für den ursprünglichen festgehaltenen Punkt u^0, daß die Größe rechts in (39) kleiner als $\varepsilon > 0$ ausfällt. Dieses a halte man von nun ab fest. Diese Ungleichung bleibt für alle u^0 einer gewissen Umgebung des festen u^0 bestehen. Wegen der Gleichmäßigkeit von (39) in u^0 kann man daher eine Umgebung U^0 von u^0 so wählen, daß in U^0 und etwa für alle $\mu < \mu^*$

$$p\{E(u(a, \mu))\} < \varepsilon; \quad u^0 \subset U^0, \ \mu < \mu^*, \tag{40}$$

gilt.

Integriert man nun (34), $i = 1$, zwischen $p = 0$ und dem Werte links in obiger Ungleichung, so folgt

$$0 < x_1^1 - a < \sqrt{2}\, \varepsilon.$$

Da nun die Größe rechts in (39) ebenfalls $< \varepsilon$ ist, folgt ähnlich

$$0 < \bar{x}_1^1 - a < \sqrt{2}\, \varepsilon.$$

Dies liefert

$$|x_1^1 - \bar{x}_1^1| < \sqrt{2}\,\varepsilon$$

für alle u^0, μ von (40). Integriert man (34), $i \geqq 2$, sowohl für x_i als auch für $\bar{x}_i$ zwischen den obigen Grenzen, so folgt

$$|x_i(a\ \mu) - x_i^1(\mu)| < \sqrt{2}\,\varepsilon, \quad |\bar{x}_i(a) - \bar{x}_i^1| < \sqrt{2}\,\varepsilon,$$

ganz unabhängig von u^0. Nach (38) ist nun gewiß

$$|x_i(a, \mu) - \bar{x}_i(a)| < \sqrt{2}\,\varepsilon,$$

für alle hinreichend kleinen μ und unabhängig davon für alle u^0 einer gewissen Umgebung des festen u^0. Also folgt unter diesen Bedingungen

$$|x_i^1(\mu) - \bar{x}_i^1| < 3\sqrt{2}\,\varepsilon; \qquad i \geqq 2.$$

Damit ist gezeigt: Bei gegebenem Punkte u^0 gibt es zu jedem $\eta > 0$ ein δ und eine Umgebung U von u^0 derart, daß für $u^0 \subset U$ und $\mu < \delta$ stets

$$|x_i^1(\mu) - \bar{x}_i^1| < \eta; \qquad i = 1, \ldots, n$$

gilt. Nun kann der Bereich B mit endlich vielen solchen U überdeckt werden. Ist δ' das kleinste dabei auftretende δ, so folgt letztere Ungleichung für

$$u^0 \subset B, \quad \mu < \delta', \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Bemerkung. Eine ähnliche Überlegung zeigt, daß $x^1(u^0, \mu)$ und $\bar{x}^1(u^0)$ stetig von u^0 abhängen.

Von den partiellen Ableitungen der Endlagen nach den Anfangsimpulsen gilt kein ähnlicher Satz. Dies ist ein im Hinblick auf das Hauptproblem charakteristisches Phänomen, das später deutlicher hervortreten wird.

Ein Fall, wo (28), (29) und (30) sofort verifizierbar sind, ist der, wo die u-Gleichungen

$$\dot{\omega}_i = -\mu \frac{\partial G}{\partial \omega_i}, \quad G = G(\omega, \varphi) > 0$$

lauten, und wo G homogen in den ω vom Grade

$$0 < m < 3$$

ist.

Hier ist $Q = mG$, und man kann

$$q(E) \sim E^{\frac{m}{2}}$$

setzen. Dann wird

$$p(E) \sim E^{\frac{3-m}{2}}.$$

§ 5.

Systeme mit einem Freiheitsgrad.

Die zwei Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{\omega} = -\mu F(\omega, \varphi),$$
$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \omega > 0,$$

wo F in φ (mod 1) periodisch ist. Wir setzen voraus, daß in

$$\omega \geqq 0$$

F eine positive und stetige Funktion von ω, φ ist. Ferner sei $\partial F/\partial \omega$ stetig für $\omega > 0$ und für kleine Werte von ω gelte

$$\frac{1}{F}\left|\frac{\partial F}{\partial \omega}\right| < \gamma(\omega),$$

wo $\gamma(\omega)$ bei $\omega = 0$ summierbar bleibt und wo $\gamma(\omega)/\omega$ mit wachsendem ω abnimmt.

Mechanisch handelt es sich hier um die Bewegung eines schwachen Reibungskräften unterworfenen Rades um eine feste Achse.

Satz 5, 1. *Das System besitzt eine universelle Verteilungsfunktion im Sinne von* (2) *und es gilt*

$$V(\psi) = F(0, \psi).$$[7]

Beweis. Setzt man $\omega^2 = 2v$ und

$$F(\omega, \varphi) = f(v, \varphi),$$

so erhält man mit $\mu\varphi = x$ durch Division der Bewegungsgleichungen

$$\frac{dv}{dx} = -f\left(v, \frac{x}{\mu}\right), \quad v > 0. \tag{42}$$

Dabei ist f positiv und stetig für $v \geqq 0$. Ferner ist für kleine v

$$\frac{1}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| < \frac{\gamma(\omega)}{\omega} = \delta(v) \tag{43}$$

mit abnehmender und bei $v = 0$ R-integrierbarer rechter Funktion.

Es genügt offenbar, den Fall

$$\varphi^0 = x^0 = 0$$

zu betrachten. Die Existenz der Endlage

$$\varphi^1 = \frac{x^1}{\mu}, \quad x^1 = x^1(v^0, \mu) > 0,$$

derart, daß $v \to 0$ für $x \to x^1$ gilt, ist klar. Für die Lösung von (42) schreiben wir

$$v(x, v^0, \mu) \tag{44}$$

[7]) Eine mechanische Illustration findet der Leser am Ende des Paragraphen.

mit

(45) $$v(0, v^0, \mu) = v^0.$$

v nimmt mit wachsendem $x > 0$ ab, und man hat

(46) $$v(x^1 - 0, v^0, \mu) = 0.$$

Man erkennt leicht, daß die in § 4 eingangs gemachten Voraussetzungen in unserem Falle erfüllt sind. Bezeichnet man mit

$$\bar{x}^1(v^0)$$

die Endlage bei der Lösung

$$\bar{v}(x, v^0), \quad \bar{v}(0, v^0) = v^0$$

der gemittelten Differentialgleichung

$\overline{(42)}$ $$\frac{dv}{dx} = -\bar{f}(v),$$

so kann demnach Satz 4, 1 angewandt werden. Es gilt also

(47) $$\lim_{\mu = 0} x^1(v^0, \mu) = \bar{x}^1(v^0)$$

gleichmäßig in jedem endlichen v^0-Intervalle.

Da wir vorderhand v^0 fest lassen, unterdrücken wir es, wo es der Vereinfachung der Schreibweise dient. Die Größe

$$\alpha(x, \mu) = \frac{\partial v(x, v^0, \mu)}{\partial v^0}$$

befriedigt die Variationsgleichung

(48) $$\frac{d\alpha}{dx} = -f_v'\left(v, \frac{x}{\mu}\right)\alpha,$$

mit der Anfangsbedingung $\alpha = 1$, $x = 0$. Für

$$\bar{\alpha}(x) = \frac{\partial \bar{v}(x, v^0)}{\partial v^0}$$

hat man ähnlich

(49) $$\frac{d\alpha}{dx} = -\bar{f}'(\bar{v})\alpha, \quad \alpha = \bar{\alpha},$$

mit gleicher Anfangsbedingung. Nach den Sätzen 3, 1 und 3, 2 ist dann

(50) $$\lim_{\mu = 0} v(x, \mu) = \bar{v}(x), \quad \lim_{\mu = 0} \alpha(x, \mu) = \bar{\alpha}(x)$$

gleichmäßig in jedem Intervalle

(51) $$0 \leqq x \leqq a; \quad a < \bar{x}^1,$$

wobei auch Gleichmäßigkeit in v^0 bei geringer Variation desselben besteht.

Man dividiere nun (48) durch (42),

(52) $$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{f_v'}{f}\alpha,$$

und (49) durch $(\overline{42})$,

$$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{\bar{f}'}{\bar{f}}\alpha; \quad \alpha = \bar{\alpha}, \quad v = \bar{v}. \tag{53}$$

Wegen der Anfangsbedingung $\alpha = 1$, $v = v^0$ folgt hieraus

$$\alpha = e^{-\int\limits_v^{v^0} \frac{f'_v}{f} dv}$$

und

$$\bar{\alpha} = e^{-\int\limits_v^{v^0} \frac{\bar{f}'}{\bar{f}} dv} = \frac{\bar{f}(v)}{\bar{f}(v^0)}. \tag{54}$$

Aus diesen Gleichungen und aus (43) schließt man, daß

$$\frac{1}{A} < \alpha(x, \mu) < A \tag{55}$$

gilt, mit

$$A = A(v^0) = e^{\int\limits_0^{v^0} \delta(v)\, dv}$$

In jedem endlichen v^0-Intervalle ist daher A beschränkt.

Wir kommen nun zum Hauptteil des Beweises. Es genügt, den Satz im Falle zu beweisen, wo der Bruch links die Form

$$\frac{\int\limits_I h\left(\frac{x^1}{\mu}\right) g(v^0)\, dv^0}{\int\limits_I g(v^0)\, dv^0} \tag{56}$$

hat. Dabei ist $g > 0$ eine feste stetige Funktion, die wir später passend wählen werden, und I ein beliebiges endliches v^0-Intervall.

Wegen (42), (45) und (46) ist nun

$$v^0 = \int\limits_0^{x^1} f\left(v, \frac{x}{\mu}\right) dx$$

entlang einer Integralkurve. Ähnliches gilt für die Lösung der gemittelten Gleichung $(\overline{42})$. Man kann nun beweisen, daß dx^1/dv^0 existiert und stetig ist und daß man die obige Gleichung in der gewohnten Weise nach v^0 differenzieren darf[8]). Man erhält dann

$$1 = \frac{dx^1}{dv^0} f\left(0, \frac{x^1}{\mu}\right) + \int\limits_0^{x^1} f'_v \alpha\, dx, \quad v = v(x, \mu), \tag{57}$$

[8]) Dabei wäre die Abnahme von $\delta(v)$ in (43) für kleine v zu benutzen.

und eine analoge Gleichung

$$(58)\qquad 1 = \frac{d\bar{x}^1}{d v^0}\bar{f}(0) + \int_0^{\bar{x}^1} \bar{f}'\bar{\alpha}\,dx, \quad v = \bar{v}(x).$$

Der Kernpunkt unseres Satzes ist nun, daß für $\mu \to 0$ das Integral rechts in (57) gegen das entsprechende Integral in (58) strebt, d. h. daß

$$(59)\qquad \lim_{\mu=0} \frac{d x^1}{d v^0} f\left(0, \frac{x^1}{\mu}\right) = \frac{d \bar{x}^1}{d v^0}\bar{f}(0)$$

ist, und zwar gleichmäßig in v^0 bei geringer Änderung desselben. Aus $(\overline{42})$, (53), (54) und (58) ergibt sich für die rechte Seite der Wert

$$\frac{\bar{f}(0)}{\bar{f}(v^0)} = g(v^0) > 0.$$

Die hieraus bestimmte Funktion g wird dann in (56) gewählt.

Zum Beweise von (59) beachte man, daß das Integral in (57) den Wert

$$(60)\qquad -\alpha(x^1,\mu) + 1 = -[\alpha(x^1,\mu) - \alpha(a,\mu)] - [\alpha(a,\mu) - 1]$$

hat. Ähnlich ist bei (58) der Wert gleich

$$(\overline{60})\qquad -[\bar{\alpha}(\bar{x}^1) - \bar{\alpha}(a)] - [\bar{\alpha}(a) - 1].$$

Wegen (50), (51) strebt die zweite Differenz in (60) gegen die entsprechende in $(\overline{60})$, und zwar gleichmäßig in v^0. Der Betrag der ersten ist wegen (52), (43) und (55) kleiner als

$$A\int_a^{x^1} \delta(v)\,|f|\,dx = A\int_0^{v} \delta(v)\,dv; \quad v = v(a,\mu).$$

Die analoge Schranke für die erste Differenz in $(\overline{60})$ ist

$$A\int_0^{\bar{v}} \delta(v)\,dv; \quad \bar{v} = \bar{v}(a).$$

Wegen (42) ist für kleine v

$$\left|\frac{dv}{dx}\right| < B,$$

unabhängig von μ und v^0. Daher hat man für obige Werte von v und $\bar{v}$

$$v < B(x^1 - a), \qquad \bar{v} < B(\bar{x}^1 - a).$$

Somit ist die Differenz der beiden Integrale in (57) und (58) dem Betrage nach kleiner als

$$|\alpha(a,\mu) - \bar{\alpha}(a)| + \eta(x^1 - a) + \eta(\bar{x}^1 - a)$$

mit stetigem $\eta(\xi)$ und $\eta(0) = 0$. Wegen (47) und der Stetigkeit der dortigen rechten Seite folgt also: Bei festem v^0 gibt es zu jedem ε ein δ und eine Umgebung U von v^0 derart, daß die Differenz der Integrale

in (57) und (58) dem Betrage nach kleiner als ε ausfällt, wenn nur $\mu < \delta$ und $v^0 \subset U$ gilt. Ähnlich wie früher kann man dann von U zu einem gegebenen v^0-Intervalle übergehen. Nachträglich ergibt sich auch die Gleichmäßigkeit von (59) in einem solchen Intervalle.

Man führe nun in (56) unten und oben x^1 als Integrationsvariable ein. Dann ist

$$d v^0 = f\left(0, \frac{x^1}{\mu}\right) d x^1 \Big/ \frac{d x^1}{d v^0} f\left(0, \frac{x^1}{\mu}\right), \tag{61}$$

und die x^1-Grenzen in den Integralen streben wegen (47) für $\mu \to 0$ gegen voneinander verschiedene Grenzen. Man sieht daher, daß an dem Grenzverhalten der Integrale in (56) nichts geändert wird, wenn man den Nenner in (61) durch eine Konstante > 0 ersetzt, d. h. einfach wegläßt. Tut man dies, so ist unmittelbar klar, daß (56) für $\mu \to 0$ den Limes

$$\frac{\int_0^1 h(\varphi) f(0, \varphi) d\varphi}{\int_0^1 f(0, \varphi) d\varphi}$$

hat, w. z. b. w.

Zur Illustration des Satzes dient die folgende einfache Anordnung. Am Radumfang sei parallel zur Achse und immer im gleichen Abstand von ihr eine große Anzahl von Stiften eingeschlagen. Bei der Drehung sollen die Stifte gegen das Ende einer festen Feder anstoßen. Verteilt man die Stifte gleichförmig auf jeder von zwei Hälften des Umfanges, jedoch doppelt so eng auf der zweiten Hälfte, so sind dort die doppelten Häufigkeiten zu erwarten; denn die Geschwindigkeitsänderung in einem kleinen Zeitintervall und damit die „Hemmung“ wird in der zweiten Hälfte doppelt so groß. Den gleichen Effekt wie durch kleine Hemmung kann man hier durch genügende Schwere des Rades erreichen.

§ 6.

Ein Problem mit zwei Freiheitsgraden.

Das hier zu betrachtende Problem gehört der am Ende von § 4 erwähnten Klasse von Problemen an,

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i &= -\mu \frac{\partial G}{\partial \omega_i}, \; G > 0, \\ \dot{\varphi}_i &= \omega_i; \; \varphi_1 \pmod 1, \; \varphi_2 \pmod P, \end{aligned} \tag{62}$$

$i = 1, 2$, wobei

$$G(\omega_1, \omega_2, \varphi_1)$$

eine in φ_1 (mod 1) periodische und nebst den $\partial^2/\partial\omega^2$ eine für $\omega \neq 0$ stetige Funktion aller drei Variablen ist. G sei ferner in den ω homogen vom Grade

$$0 < m < 3.$$

Führt man in der ω-Ebene vermöge

$$\omega_1 = r\cos\sigma, \quad \omega_2 = r\sin\sigma$$

Polarkoordinaten r, σ ein, so kann

$$G = r^m H(\sigma, \varphi_1), \quad H > 0, \quad H(\sigma+\pi, \varphi_1) = H(\sigma, \varphi_1)$$

geschrieben werden. H ist mit seinen beiden ersten σ-Ableitungen stetig in σ, φ_1. Wir machen nun eine wesentlich einschränkende

Voraussetzung. Bei festgehaltenem, aber beliebigem φ_1 soll H als Funktion von σ ihr Maximum für $\sigma = \pm\frac{\pi}{2}$ [9], und ihr Minimum für $\sigma = \sigma^*, \sigma^* + \pi\left(|\sigma^*| < \frac{\pi}{2}\right)$ annehmen, wobei σ^* von φ_1 unabhängig ist. Für andere Werte von σ sei stets $\partial H/\partial\sigma \neq 0$. An der Minimumstelle sei die zweite Ableitung stets positiv.

Dann gilt

Satz 6, 1. *Das System besitzt im Sinne von* (2) *eine universelle Verteilungsfunktion, und es gilt*

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = H(\sigma^*, \varphi_1).\ [10]$$

Der Beweis diese sehr speziellen Satzes soll hier nicht angeführt werden. Er stützt sich auf die auf Polarkoordinaten transformierten Grundgleichungen und verläuft in seinen wesentlichen Zügen ganz ähnlich wie der von Satz 5, 1. Von den Sätzen von § 3, § 4 wird dabei Gebrauch gemacht.

Bei dem in der Einleitung erwähnten Beispiel der Bewegung eines flachen Objektes auf einer gleichförmig rauhen Ebene, auf der parallele Linien gleichen Abstandes eingezeichnet sind, liegen die Verhältnisse komplizierter. Hier handelt es sich um ein System mit drei Freiheitsgraden, da sich im allgemeinen der Schwerpunkt nicht geradlinig bewegt. Dabei ist wohl Gleichverteilung der Endlagen zu erwarten. Unterwirft man indessen den Schwerpunkt einer reibungslosen Geradführung, so hat man nur zwei Freiheitsgrade. Die Gleichungen für die Bewegung erhalten unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Reibung die Form (62). Die dem Satze 6, 1 zugrundegelegte Voraussetzung ist im allgemeinen hier

---

[9]) Wegen der Drehinvarianz der Gleichungen bedeutet natürlich die Wahl dieser speziellen Werte keine Einschränkung.

[10]) Man beachte die Unabhängigkeit von φ_2. Für $\mu \to 0$ sind demnach die beiden Koordinaten der Endlage unabhängig verteilt.

nicht erfüllt, da die Minimums-Richtung σ^* der Funktion $H(\sigma, \varphi_1)$ durchaus von φ_1 abhängt. Es ist wohl eine universelle Verteilung der Endlagen zu erwarten, jedoch ist es fraglich, ob sie gleichförmig ist. Nur in einem sehr speziellen Falle, nämlich wenn die auf ein Teilchen der Masse m und der Vektorgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ wirkende Reibungskraft als

$$-\mu m \mathfrak{v},$$

also proportional zur Geschwindigkeit angenommen wird, wird im wesentlichen

$$G = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

In diesem Falle treten in den Kräften die Winkelvariablen nicht explizit auf und der Satz 1, 1 tritt in Kraft.

Zum Schluß sei noch ein System mit zwei Freiheitsgraden angeführt, bei welchem die Verteilungsfunktion nicht universell ist,

$$\dot{\omega}_1 = -\mu \omega_1 f\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}, \varphi_1\right),$$

$$\dot{\omega}_2 = -\mu \omega_2 f\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}, \varphi_1\right),$$

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i,$$

wobei f positiv und stetig sein soll. Dann existiert die Verteilungsfunktion der Endlagen, und man hat

$$V = V(\psi_1, \psi_2, \omega_1^0, \omega_2^0) = f\left(\frac{\omega_2^0}{\omega_1^0}, \psi_1\right).$$

Schlußbemerkung. Zum allgemeinen in der Einleitung formulierten Problem sei noch kurz bemerkt, daß sich die Unabhängigkeit der Verteilungsfunktion V von der Anfangslage φ^0 beweisen läßt,

$$V = V(\psi, \omega^0).$$

Ferner ist V als Funktion von ω^0 entlang jeder Bahnkurve des gemittelten Systems

$$\dot{\omega} = \bar{F}(\omega)$$

konstant.

(Eingegangen am 24. 9. 1936.)

Bemerkungen zu den Strahlenabbildungen der geometrischen Optik.

Von

C. Carathéodory in München.

1. Wenn Licht durch ein beliebiges optisches Instrument geschickt wird, so werden die einzelnen Strahlen des Objektraumes — insofern sie das Instrument durchsetzen — den Strahlen des Bildraumes eineindeutig zugeordnet. Diese Zuordnung genügt einer für die optischen Abbildungen charakteristischen Bedingung, die man auf sehr verschiedene Weisen beschreiben kann. Man kann z. B. verlangen, daß bei allen zweiparametrigen Strahlenbündeln die Lagrangesche Klammer denselben Wert auf einander entsprechenden Strahlen haben muß; oder man kann fordern, daß für geschlossene einparametrige Scharen von Strahlen die Poincarésche relative Integralinvariante im Objekt- und im Bildraum denselben Wert haben soll.

In dieser Note werden zweiparametrige Strahlensysteme aufeinander abgebildet, von denen jedes eine nicht zerfallende reelle Brennfläche besitzt, und die obige Bedingung wird mit Hilfe von Figuren aufgestellt, die auf den Brennflächen selbst liegen. Man erhält auf diese Weise die charakteristische Eigenschaft der optischen Abbildungen in einer neuen Gestalt, die für gewisse Fragestellungen der geometrischen Optik außerordentlich bequem, und übrigens wegen ihrer großen Anschaulichkeit auch an sich von Interesse ist.

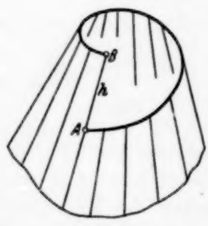


Fig. 1.

2. Wir nehmen an, der Objekt- und der Bildraum seien mit isotropen, homogenen Medien erfüllt, deren Brechungskoeffizienten mit n bzw. mit n' bezeichnet werden. Wir betrachten eine einparametrige geschlossene Schar von (geradlinigen) Strahlen des Objektraumes und eine orthogonale Trajektorie dieser Strahlen, die genau einmal um die Regelfäche herumläuft, die auf diese Weise gebildet ist (Fig. 1).

Die Endpunkte A und B dieser Kurve liegen dann auf demselben Strahl und ihre Entfernung h ist augenscheinlich unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes A, den man irgendwo auf der Fläche annehmen

kann. Nach einer Bemerkung von G. Prange[1]) hat dann die relative Integralinvariante von Poincaré einfach den Wert

$$nh. \tag{2.1}$$

3. Wir betrachten jetzt auf einer beliebigen Fläche $\mathfrak{B}$ eine Schar von Kurven c. Die Tangenten an diese Kurven bilden eine Strahlenkongruenz, deren eine Brennfläche die Fläche $\mathfrak{B}$ ist, wenn man gewisse leicht zu charakterisierende Ausnahmefälle ausschließt. Wir konstruieren die Tangenten an die Kurven c in den Schnittpunkten dieser Kurven mit einer geschlossenen Kurve γ, die auf $\mathfrak{B}$ liegt (Fig. 2), und erhalten eine Figur, wie wir sie im § 2 betrachtet haben. Wir wollen die Invariante h für diese geschlossene Regelfläche berechnen.

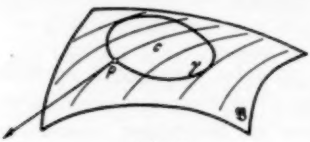


Fig. 2.

Hierzu bemerken wir zunächst, daß wenn γ die Gestalt eines krummlinigen Rechtecks hat, von dem zwei gegenüberliegende Seiten mit Kurvenbögen zusammenfallen, die der Kurvenschar c angehören, und dessen beide übrigen Seiten aus orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar c gebildet werden, augenscheinlich

$$h = s' - s \tag{3.1}$$

sein muß, wenn man mit s' und s die Längen der zuerst genannten Seiten des Rechtecks bezeichnet. In der Tat besteht die orthogonale Trajektorie der Erzeugenden der betrachteten geschlossenen Regelfläche aus Evolventen der Seiten des Rechtecks, die auf c' und c liegen, und aus Kurven, die den beiden übrigen Seiten des Rechtecks parallel sind.

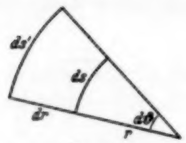


Fig. 3.

Für eine Schar von *ebenen* Kurven c kann man dann den Ausdruck $ds' - ds$ für ein Elementarrechteck dieser Art sehr leicht mit Hilfe von anderen geometrischen Invarianten ausdrücken. Bezeichnet man nämlich mit r den Krümmungsradius und mit k die Krümmung dieser Kurven in einem Punkte P der Ebene und mit $d\omega$ den Flächeninhalt des Elementarrechtecks, ferner mit $d\vartheta$ den Winkel der Normalen in den Endpunkten des Elementarbogens ds, so gelten die Formeln

$$ds = r\,d\vartheta, \quad ds' = (r + dr)\,d\vartheta, \tag{3.2}$$

$$ds' - ds = dr\,d\vartheta = \frac{1}{r}\,dr \cdot ds, \tag{3.3}$$

[1]) G. Prange, Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik, Math. Encyklopädie Bd. IV, 2, S. 622.

aus welchen man schließlich erhält

$$ds' - ds = k \cdot d\omega. \tag{3.4}$$

Projizieren wir aber das Elementarrechteck, das auf der Fläche $\mathfrak{B}$ liegt, auf die Tangentialebene an $\mathfrak{B}$ durch einen seiner Punkte, so bleiben die Längen der Linienelemente ds, ds' bis auf Größen dritter Ordnung unverändert, ebenso hat $d\omega$ bis auf Größen vierter Ordnung denselben Wert für die Figur auf der Fläche und für ihre Projektion. Endlich ist die Krümmung k der Projektionskurve gleich der geodätischen Krümmung k_g der Kurve c, die auf der Brennfläche $\mathfrak{B}$ liegt. Aus allen diesen Überlegungen erhält man

$$dh = k_g\, d\omega \tag{3.5}$$

und für das Gebiet G, das in der Fig. 2 durch die Kurve γ berandet wird,

$$h = \iint_G k_g\, d\omega. \tag{3.6}$$

4. Wir nehmen nun an, daß die Strahlenkongruenz, die wir soeben betrachtet haben, durch irgendeine optische Abbildung einer Strahlenkongruenz des Bildraumes zugeordnet wird, die ebenso wie die erste eine nicht zerfallende Brennfläche $\mathfrak{B}'$ besitzt. Durch die Strahlenabbildung werden die beiden Brennflächen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ punktweise und eineindeutig aufeinander bezogen. Auf der Brennfläche $\mathfrak{B}'$ gibt es eine Schar von Kurven c^*, die von den abgebildeten Strahlen umhüllt werden. Bezeichnet man also mit G' denjenigen Teil von $\mathfrak{B}'$, auf welchen unser Gebiet G abgebildet wird, und mit k_g^* die geodätische Krümmung der Kurven c^* auf $\mathfrak{B}'$, so wird nach dem § 2 und nach (3.6) die Erhaltung der Poincaréschen Integralinvariante durch die Gleichung

$$n \cdot \iint_G k_g\, d\omega = n' \iint_{G'} k_g^*\, d\omega' \tag{4.1}$$

ausgedrückt.

Dies bedingt, daß man in entsprechenden Punkten P und P' der beiden Brennflächen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ haben muß:

$$\frac{n'}{n} \cdot \frac{k_g^*}{k_g} \cdot \frac{d\omega'}{d\omega} = 1. \tag{4.2}$$

Die Gleichung (4.2) *ist in unserem Falle mit der Forderung der Erhaltung der Poincaréschen Integralinvariante völlig äquivalent und drückt daher, wenn man die Brennflächen an die Spitze der Betrachtungen stellt, ein Gesetz aus, das dem gewöhnlichen Brechungsgesetz gleichwertig ist.*

5. Für den Fall, daß die Kurven c auf der Fläche $\mathfrak{B}$ aus lauter geodätischen Linien bestehen, ist k_g identisch Null und man entnimmt

aus (4.1), daß dann auch k_g^* identisch Null sein muß, d. h. daß die Kurven c^* auch geodätische Linien sein müssen. In diesem Falle verschwindet die Integralinvariante nh, wodurch ausgedrückt wird, daß die Strahlenkongruenzen notwendig Normalenkongruenzen sein müssen.

Dieser Tatbestand, der seit fast hundert Jahren bekannt ist, kann also als spezieller Fall der Formeln des § 4 angesehen werden.

6. Die obigen Resultate können auch auf die beiden Mäntel der Brennfläche einer Strahlenkongruenz angewandt werden, falls diese nicht zerfallen und reell sind. In diesem Falle kann man in der Formel (4.2) die Größen $n = n' = 1$ setzen und erhält die Gleichung

$$\frac{k_g^*}{k_g} = \frac{d\omega}{d\omega'}. \tag{6.1}$$

Wenn man von der Tatsache Gebrauch macht, daß hier die beiden Schmiegungsebenen der Kurven c und c^* in entsprechenden Punkten gleichzeitig Tangentialebenen der Flächen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}$ sind, sieht man, daß man in der Gleichung (6.1) die geodätischen Krümmungen k_g^* und k_g durch die gewöhnlichen Krümmungen k^* und k ersetzen kann. Man erhält auf diese Weise die Gleichung

$$\frac{k^*}{k} = \frac{d\omega}{d\omega'}, \tag{6.2}$$

die auch für den Fall gilt, daß die Kurven c und c^* geodätische Linien sind. Die Relation (6.2) ist demnach ganz unabhängig davon, ob die betrachtete Strahlenkongruenz normal ist oder nicht[1]).

7. Es ist sehr überraschend, daß die Sätze, zu denen wir gelangt sind, namentlich diejenigen des letzten Paragraphen, nicht schon früher bemerkt und beachtet worden sind. Man findet nämlich im Kapitel über geodätische Kreise der „Théorie des Surfaces“ von Darboux (Bd. III, S. 140) das Schlußresultat unseres § 3, das noch mit mehr Einzelheiten ausgeführt ist als bei uns. Darboux hat lediglich versäumt, die Fläche $\mathfrak{B}$ als Brennfläche einer Strahlenkongruenz zu betrachten, und hat deshalb nicht bemerkt, daß die Größe h, die bei ihm (S. 141) in der Gestalt

$$\int \cos\Theta\, d\,s$$

erscheint, für zwei geschlossene Kurven γ und γ', die auf verschiedenen Mänteln der Brennfläche liegen und einander zugeordnet sind, einen und denselben Wert besitzen muß.

[1]) Bei Gelegenheit des internationalen Mathematikerkongresses in Oslo sprach ich mit Herrn G. Tzitzeica über die obigen Resultate. Die zuletzt erwähnte Bemerkung stammt von ihm, und er konnte auch sofort die Gleichung (6.2) mit Hilfe einer sehr eleganten, direkten geometrischen Überlegung ableiten.

An derselben Stelle findet man bei Darboux die vollständige Lösung einer Frage, die dort, wo er sie behandelt, ein wenig künstlich erscheint, die aber für unsere Zwecke von großer Bedeutung ist: Er bestimmt sämtliche Kurven einer Fläche, deren geodätische Krümmung als Funktion des Ortes gegeben ist (l. c. S. 143). Nach diesem Resultat von Darboux kann man sich die Brennfläche $\mathfrak{B}$ und die Kurvenschar c, d. h. die Strahlenkongruenz im Objektraum vorschreiben, außerdem kann man eine Brennfläche $\mathfrak{B}'$ der zugeordneten Strahlenkongruenz des Bildraumes vorschreiben und noch dazu die Abbildung der beiden Brennflächen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ aufeinander. Dann kann man fragen, wie die Schar der Kurven c^* gewählt werden muß, wenn die Gleichung (4. 2) identisch erfüllt sein soll. Es zeigt sich (l. c. S. 146), daß die Kurven c^* Extremalen eines ziemlich leicht zu berechnenden Variationsproblems sein müssen.

Ein weiteres Problem, das man mit Hilfe der Darbouxschen Theorie recht einfach behandeln kann (s. u. § 10), entsteht aus der Bemerkung, daß die Kurven c', die auf $\mathfrak{B}'$ liegen und bei der Abbildung von $\mathfrak{B}'$ auf $\mathfrak{B}$ in die Kurven c transformiert werden, im allgemeinen von den Kurven c^* grundsätzlich verschieden sind. Es gibt aber nichttriviale Beispiele, bei denen die Kurven c^* mit den Bildern c' von c zusammenfallen. Dies ist z. B. der Fall, wenn man für $\mathfrak{B}'$ eine Fläche wählt, die durch Verbiegung von $\mathfrak{B}$ entsteht, $n' = n$ nimmt und die Strahlen der Kongruenz bei der Verbiegung mitführt. Man kann also die Aufgabe stellen, alle Strahlenabbildungen anzugeben, die optisch möglich sind und die geschilderte Eigenschaft besitzen, wenn die Brennflächen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ sowie die Abbildung dieser beiden Flächen aufeinander, die durch die zu konstruierende Strahlenabbildung hervorgerufen werden soll, vorgeschrieben sind. Die Kurvenschar c kann dagegen jetzt nicht immer willkürlich vorgeschrieben werden.

8. Alle diese Resultate können auf beliebige Finslersche Räume übertragen werden, d. h. sie können als Sätze der Variationsrechnung ausgesprochen werden. Dies soll noch ganz kurz skizziert werden.

Wir verallgemeinern zuerst die Gleichung (3. 6). Es sei also ein beliebiges Variationsproblem im dreidimensionalen Raum gegeben und eine zweidimensionale Fläche $\mathfrak{B}$, die durch die Parameter s und u dargestellt werden soll. Wir berechnen zunächst die Hamiltonsche Funktion $K(s, u, v)$ des auf dieser Fläche induzierten Variationsproblems [3]), wobei v die zu u konjugierte kanonische Veränderliche sein soll. Eine Kurvenschar c erhalten wir, wenn wir

$$(8.1) \qquad v = \varphi(s, u)$$

---

[3]) Siehe C. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung (Leipzig, Teubner, 1935), § 342.

setzen und die Differentialgleichung

$$\frac{du}{ds} = K_v(s, u, \varphi) \tag{8.2}$$

integrieren.

Dann erhalten wir den Wert der Integralinvarianten h für eine geschlossene Kurve γ (s. Fig. 2) durch die Formel

$$h = \int_\gamma - K(s, u, \varphi)\, ds + \varphi\, du. \tag{8.3}$$

Wir berechnen mit Hilfe des Gaußschen Satzes die Größe h als Doppelintegral und setzen

$$h = \iint_G \Omega\, ds\, du. \tag{8.4}$$

Hierbei ist

$$\Omega = \varphi_s + K_u + K_v \varphi_u; \tag{8.5}$$

die rechte Seite dieser Gleichung ist, genau wie im § 3, gleich der ersten Variation der Kurven unserer Schar, denn infolge der Gleichungen (8.1 und (8.2) kann man an Stelle von (8.5) schreiben

$$\Omega = \frac{dv}{ds} + K_u. \tag{8.6}$$

9. Ganz ebenso leicht können wir die der Gleichung (4.2) entsprechende Gleichung aufstellen. Wir betrachten für ein zweites Variationsproblem eine Fläche $\mathfrak{B}'$, deren eineindeutige Abbildung auf $\mathfrak{B}$ dadurch festgelegt wird, daß wir für $\mathfrak{B}'$ dieselben Parameter s, u wie für $\mathfrak{B}$ benutzen. Die Hamiltonsche Funktion des auf $\mathfrak{B}'$ reduzierten Variationsproblems bezeichnen wir mit $\overline{K}(s, u, \bar{v})$. Die Kurven c^* sollen jetzt mit Hilfe der Gleichung

$$\bar{v} = \psi(s, u) \tag{9.1}$$

berechnet werden. Dann wird infolge von (8.5) die Bedingung (4.2) durch folgende ersetzt:

$$\varphi_s + K_u + K_v \varphi_u = \psi_s + \overline{K}_u + \overline{K}_{\bar{v}} \psi_u. \tag{9.2}$$

Das in § 7 erwähnte Resultat von Darboux ist eine unmittelbare Folge dieser Gleichung. Sind in der Tat die Kurven c vorgeschrieben, so stellt die linke Seite von (9. 2) eine bekannte Funktion von s und u dar. Wir bestimmen eine Funktion $f(s, u)$ durch die Gleichung

$$-\frac{df}{du} = \varphi_s + K_u + K_v \varphi_u. \tag{9.3}$$

Dann besagt die Gleichung (9. 2), daß die Kurven c^* Extremalen des Variationsproblems mit der Hamiltonschen Funktion

$$\overline{K}(s, u, \bar{v}) + f(s, u)$$

sein müssen.

10. Zum Schluß bestimmen wir noch diejenigen Kurven c, für welche man die Bilder c' von c an Stelle von c^* nehmen kann. Dann müssen die Differentialgleichungen (8.2) und

$$\frac{du}{ds} = \overline{K}_{\bar{v}}(s, u, \psi) \tag{10.1}$$

dieselben Lösungen besitzen. Die Funktion ψ muß also der Gleichung

$$\overline{K}_{\bar{v}}(s, u, \psi) = K_v(s, u, \varphi) \tag{10.2}$$

genügen. Aus dieser letzten Gleichung berechnen wir

$$\psi = \omega(s, u, \varphi) \tag{10.3}$$

und erhalten durch Einsetzen dieses Wertes von ψ in (9.2) mit Berücksichtigung von (10.2)

$$(1 - \omega_v)(\varphi_s + K_v \varphi_u) = (\omega_s + K_v \omega_u) + \overline{K}_u - K_u. \tag{10.4}$$

Ist

$$\omega_v \neq 1, \tag{10.5}$$

so stellt die Gleichung (10.4) eine partielle Differentialgleichung für φ dar, aus der man die gewünschten Kurven c berechnen kann. Ist aber

$$\omega_v \equiv 1, \tag{10.6}$$

so folgt aus (10.3), daß man hier setzen muß

$$\psi = \varphi - \alpha(s, u), \tag{10.7}$$

und nach (10.2) hat man dann

$$\overline{K}_{\bar{v}}(s, u, \psi) \equiv K_v(s, u, \psi + \alpha). \tag{10.8}$$

Diese letzte Gleichung besagt aber, daß man zu schreiben hat

$$\overline{K} = K(s, u, \psi + \alpha) + \beta(s, u), \tag{10.9}$$

woraus folgt

$$\overline{K}_u = K_u + K_v \alpha_u + \beta_u. \tag{10.10}$$

Die Gleichung (10.4) reduziert sich dann auf

$$0 = \beta_u - \alpha_s. \tag{10.11}$$

Ist die rechte Seite dieser letzten Gleichung nicht identisch Null, so hat unser Problem keine Lösung. Ist aber $\beta_u \equiv \alpha_s$, so kann die Schar der Kurven c ganz beliebig gewählt werden. Dies ist insbesondere der Fall für das Beispiel des § 7, in welchem die Brennfläche $\mathfrak{B}'$ eine Biegungsfläche von $\mathfrak{B}$ war.

München, den 8. August 1936.

(Eingegangen am 10. 8. 1936.)

Verzweigung periodischer Lösungen nichtlinearer Schwingungsgleichungen.

Von

Rudolf Iglisch in Aachen.

In neuerer Zeit sind eine ganze Reihe verschiedenartiger Randwertprobleme bei Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{x}(t) + f(x) = g(t) \tag{1}$$

untersucht worden. Besonders interessiert hat man sich in der Lehre der nichtlinearen Schwingungen für periodische Lösungen von (1), für die also bei beliebigem t mit einer passenden Zahl P gilt

$$x(t+P) = x(t), \tag{2}$$

falls $g(t)$ selbst die gleiche Periode P besitzt:

$$g(t+P) = g(t). \tag{3}$$

Vor allem wurde die Theorie kleiner Schwingungen oder kleiner periodischer Störungen einer periodischen Schwingung behandelt. In (unwesentlicher) Spezialisierung können wir das Problem dann mathematisch so formulieren: $x(t)$ sei eine bekannte mit P periodische Lösung von (1); gesucht werden die wenig von $x(t)$ verschiedenen mit P periodischen Lösungen $y(t)$ von

$$\ddot{y} + f(y) = g(t) + \beta G(t), \tag{4}$$

wo $\beta G(t)$ eine (infolge genügend kleiner Wahl des Parameters β) kleine gleichfalls mit P periodische Funktion ist[1]):

$$G(t+P) = G(t).$$

Der Einfachheit halber wollen wir etwa $g(t)$ und $G(t)$ als stetig annehmen.

Im allgemeinen behandelt man derartige Probleme mit Hilfe von Reihenansätzen (z. B. mit Hilfe der Theorie der nichtlinearen Integralglei-

[1]) Man kann natürlich ebenso das allgemeiner aussehende Problem behandeln, daß die rechte Seite in (4) eine Funktion $h(t, \beta)$ ist, die für jeden Wert von β die Periode $P+\beta$ besitzt. Zu diesem Zweck braucht man nur statt t die neue unabhängige Variable

$$\tau = \frac{P}{P+\beta}\, t$$

einzuführen. Die dann erscheinende Gleichung, in die der Parameter β etwas komplizierter eingeht, läßt sich prinzipiell in gleicher Weise behandeln.

chungen[2]) oder nach der Methode von Poincaré[3])), wobei $f(x)$ als analytische Funktion ihres Arguments vorauszusetzen ist; oder man berücksichtigt überhaupt außer den linearen Gliedern nur die Glieder nächsthöherer Ordnung[4]) und legt sich über die Berechtigung dieses Verfahrens entweder gar keine Rechenschaft ab oder sucht dessen Anwendbarkeit durch Feststellung der qualitativen Übereinstimmung der Nährungsresultate mit Resultaten aus allgemeinen Fixpunktsätzen zu erhärten[5]). — In vorliegender Arbeit soll die Lösung des Problems unter Benutzung von einfachen Gedankengängen der Sturm-Liouvilleschen Theorie von Randwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung und geläufigen Stetigkeitsbetrachtungen gewonnen werden, welch letztere natürlich ein Ersatz für die sonst zu benutzenden Reihenentwicklungen sind. Dabei braucht $f(x)$ nicht mehr als analytisch vorausgesetzt zu werden, sondern jeweils als so oft differenzierbar, als es bei der Rechnung benutzt werden muß. Die einfachsten und brauchbarsten Näherungsverfahren werden auf diesem Wege von selbst gerechtfertigt; gleichzeitig erhält man einen tieferen Einblick in den Aufbau der sogenannnten Verzweigungsgleichungen, die bei Behandlung des Problems mit Hilfe der Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen die ausschlaggebende Rolle spielen.

Wenn auch die Ausführungen an das Randwertproblem der Periodizität angeschlossen sind, so gelten sie natürlich unverändert für eine Reihe anderer Randwertprobleme; für die erste, zweite und dritte Randwertaufgabe würden sich die Rechnungen sogar wesentlich vereinfachen und anschaulicher gestalten, da hier in jede der beiden Randbedingungen nur je ein Intervallendpunkt eingeht und die ausschlaggebende lineare Gleichung höchstens einen einfachen Eigenwert besitzt. Aber auch die Differentialgleichung selbst läßt sich wesentlich verallgemeinern. So wird in Kap. 4 die Behandlung der Gleichung

$$\ddot{y} + f(y, \dot{y}) = g(t) + \beta G(t) \tag{5}$$

skizziert werden. Die Methode läßt sich natürlich auch auf Gleichungen noch allgemeinerer Form anwenden, in die z. B. der Parameter β in

---

[2]) Z. B. R. Iglisch, Zur Theorie der Schwingungen, Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), S. 325; 39 (1932), S. 173; 42 (1935), S. 7.

[3]) Z. B. L. Mandelstam und N. Papalexi, Über Resonanzerscheinungen bei Frequenzteilung, Zeitschr. f. Phys. 73 (1931), S. 223—248.

[4]) Z. B. N. Kryloff und N. Bogoliùboff, L'application des méthodes de la mécanique non linéaire à la théorie des perturbations des systèmes canoniques. Monogr. Acad. Sci. Ukraine 4 (1934), S. 1—55. — Wohl das bisher allgemeinste Verfahren dieser Art.

[5]) Z. B. N. Kryloff und N. Bogoliùboff, Les méthodes de la mécanique non linéaire appliquées à la théorie des oscillations stationnaires. Monogr. Acad. Sci. Ukraine 8 (1934), S. 1—99.

anderer Weise eingeht (die Gleichung könnte auch mehrere Parameter enthalten), oder auf Gleichungen höherer als zweiter Ordnung, schließlich auch auf Systeme von Differentialgleichungen, wie sie etwa bei der Bestimmung periodischer Bahnen im Dreikörperproblem auftreten[6]). Auch auf eine große Klasse von nichtlinearen Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen lassen sich ähnliche Schlüsse, mit entsprechender geringer Abänderung, übertragen.

1. Kapitel.

Der Nichtresonanzfall[7]).

Wir beweisen hier folgenden Satz[8]): *Ist $f(x)$ zweimal differenzierbar für Argumentwerte, die etwas über Maximum und Minimum von $x(t)$ hinausgreifen, und besitzt die homogene lineare Differentialgleichung*

$$\ddot{\varphi} + f'(x(t))\,\varphi = 0, \tag{6}$$

wo $x(t)$ die bekannte Lösung von (1) *bedeutet, keine mit P periodische Lösung, so besitzt bei genügend kleinem $|\beta|$ Gleichung* (4) *genau eine zu $x(t)$ benachbarte Lösung $y(t)$, welche mit P periodisch ist.* Mit anderen Worten: Es gibt zwei positive Zahlen δ und ε derart, daß für $|\beta| \leqq \delta$ Gleichung (4) genau eine mit P periodische Lösung $y(t)$ besitzt, für die $|y(t) - x(t)| \leqq \varepsilon$ gilt. Machen wir die Substitution

$$y(t) = x(t) + u(t), \tag{7}$$

so ist also nur zu zeigen, daß mit zwei passenden Zahlen δ und ε für $|\beta| \leqq \delta$ die Gleichung

$$\ddot{u} + f(x+u) - f(x) = \beta G(t) \tag{8}$$

genau eine mit P periodische Lösung $u(t)$ mit $|u| \leqq \varepsilon$ besitzt.

Daß (8) höchstens eine solche Lösung $u(t)$ besitzen kann, ist leicht zu sehen; denn hätte man zwei Lösungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$, so würde deren Differenz $z(t) = u_2(t) - u_1(t)$ mit P periodische Lösung von

$$\ddot{z} + f'(x + u_1 + \vartheta(u_2 - u_1))\,z = 0 \tag{9}$$

---

[6]) Vgl. hierzu auch: O. Perron, Neuer Existenzbeweis für periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem, Monatsh. f. Math. u. Phys. 43 (1936), S. 81—96; Über eine Schar periodischer Lösungen des ebenen Dreikörperproblems, Sitzungsber. der Bayr. Akad. d. Wissensch. 1936, S. 157—176; siehe auch: Über eine Schar periodischer Lösungen des ebenen Vierkörperproblems, Math. Annalen 113 (1936), S. 95—109.

[7]) Zur Terminologie vgl.: R. Iglisch, Über den Resonanzbegriff bei nichtlinearen Schwingungen. Erscheint demnächst in der Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.

[8]) Vgl. hierzu auch: R. Iglisch, Reelle Lösungsfelder der elliptischen Differentialgleichung $\Delta(u) = F(u)$ und nichtlinearer Integralgleichungen, Math. Annalen 101 (1929), S. 98—119, insbesondere § 2.

sein mit passendem $\vartheta(t)$ zwischen 0 und 1. Das geht bei genügend kleinem $u_1(t)$ und $u_2(t)$ nicht an, da dann ein Fundamentalsystem von (9) sich beliebig wenig von einem passend gewählten Fundamentalsystem von (6) unterscheidet und (6) keine mit P periodische Lösung besitzt.

Die Existenz einer kleinen Lösung von (8), die mit P periodisch ist, läßt sich nun so beweisen: Wir betrachten Gleichung (8) mit beliebigen Anfangsbedingungen

$$u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = B.$$

Man überzeugt sich leicht mit Hilfe des gewöhnlichen Existenzsatzes und der Stetigkeitssätze[9]) davon, daß für genügend kleines $|\beta|$, $|A|$ und $|B|$ diese Lösung $u(t)$ bis $t = P$ hin sich konstruieren läßt; denn für jede Lösung $u(t)$, welche nebst ihrer Ableitung unterhalb einer festen endlichen Schranke bleibt, läßt sich das Intervall $0 \leqq t \leqq P$ in eine endliche Anzahl gleichlanger Teilintervalle zerlegen, so daß in jedem dieser Teilintervalle die Lösung nach dem Verfahren der sukzessiven Approximation hergestellt werden kann. Wir gehen jetzt aus von der Lösung $u \equiv 0$ und machen die eben beschriebene Unterteilung; die Stetigkeitssätze sorgen dann dafür, daß, wofern $|\beta|$, $|A|$ und $|B|$ genügend klein sind, die gleichen Teilintervalle dazu benutzt werden können, jede Lösung $u(t)$ bis $t = P$ hin zu konstruieren. Es kann erreicht werden, daß dann stets $|u(t)| \leqq \varepsilon$ (genügend klein) gilt.

Offenbar läßt sich jedes $u(t)$ charakterisieren durch seine Anfangswerte A und B und den Parameterwert β, also $u(t, A, B, \beta)$. Nun ist die Funktionaldeterminante

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial A}[u(P,0,0,0) - u(0,0,0,0)] & \frac{\partial}{\partial B}[u(P,0,0,0) - u(0,0,0,0)] \\ \frac{\partial}{\partial A}[\dot{u}(P,0,0,0) - \dot{u}(0,0,0,0)] & \frac{\partial}{\partial B}[\dot{u}(P,0,0,0) - \dot{u}(0,0,0,0)] \end{vmatrix} \neq 0,$$

da $\frac{\partial}{\partial A} u(t,0,0,0)$ und $\frac{\partial}{\partial B} u(t,0,0,0)$[10]) unabhängige Lösungen von (6) sind, also als $\varphi_1(t)$ bzw. $\varphi_2(t)$ Verwendung finden können; außerdem beachte man, daß Gleichung (6) keine periodische Lösung besitzt. Da diese Determinante stetig von A, B und β abhängt, folgt, daß sich ein-

[9]) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, Berlin 1923, Abschnitt 1, Kap. II.

[10]) Über die Existenz und Stetigkeit dieser Ableitungen vgl. die in Anm. [9]) angegebene Literatur.

deutig eine kleine Lösung $u(t)$ von (8) bestimmen läßt durch die Bedingungen

$$u(P) - u(0) = \alpha_1,$$
$$\dot u(P) - \dot u(0) = \alpha_2,$$

wofern nur α_1, α_2 und β genügend klein sind. Setzt man $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, so hat man eine mit P periodische kleine Lösung $u(t)$ von (8); gleichzeitig ist die Eindeutigkeit noch einmal mitbewiesen.

Eine Lösung $x(t)$, die die in diesem Paragraphen vorausgesetzten Eigenschaften hat, nennen wir eine einfache Lösung oder Nichtresonanzlösung.

2. Kapitel.

Der Resonanzfall; einfacher Eigenwert.

§ 1.

$B \neq 0$, $L_2 \neq 0$.

Wir wollen jetzt den Fall behandeln, daß Gleichung (6) (bis aufs Vorzeichen) genau eine mit P periodische normierte Lösung $\varphi_1(t)$ besitzt. Ist (6) lösbar, so nennen wir $x(t)$ Resonanzlösung oder mehrfache Lösung (s. u.). Weiterhin sei zunächst angenommen, daß die in (4) auftretende Funktion $G(t)$ nicht zu $\varphi_1(t)$ orthogonal ist:

$$\int_0^P G(t)\,\varphi_1(t)\,dt = B \neq 0. \tag{11}$$

Schließlich sei noch vorausgesetzt, daß die Größe

$$L_2 = \tfrac{1}{2}\int_0^P f''(x(t))\,\varphi_1^3(t)\,dt \neq 0 \tag{12}$$

ausfällt und daß $f(x)$ etwa dreimal stetig differenzierbar ist für ein abgeschlossenes Intervall von x-Werten, das den ganzen Wertevorrat der Lösung $x(t)$ von (1) in seinem Innern enthält. Dann gilt der Satz: *Für genügend kleines β hat* (8) *zwei verschiedene kleine mit P periodische Lösungen $u(t)$ oder gar keine, je nachdem ob* $\operatorname{sign}\beta B = \operatorname{sign} L_2$ *ist oder nicht.*

Um zunächst die notwendige Bedingung für die Existenz einer mit P periodischen kleinen Lösung $u(t)$ von (8) zu gewinnen, bilden wir die sogenannte Lagrangesche Identität aus (8) und (6) ((8) mit $\varphi_1(t)$ multiplizieren, (6) mit $u(t)$ und subtrahieren) und integrieren sie; dabei nehmen wir an, $u(t)$ sei mit P periodische Lösung von (8). Es erscheint

$$\beta B = \tfrac{1}{2}\int_0^P f''(x(t) + \vartheta(t)\,u(t))\,u^2(t)\,\varphi_1(t)\,dt, \tag{13}$$

wo $0 < \vartheta(t) < 1$ gilt. Jetzt setzen wir

$$u(t) = \lambda\,\varphi_1(t) + v(t), \tag{14}$$

wo λ so gewählt sei, daß

(15) $$u(0) = \lambda\,\varphi_1(0), \quad \text{d. h. } v(0) = 0$$

gilt; dies geht, falls $\varphi_1(0) \neq 0$ ist, was eventuell durch Änderung des Nullpunktes der t-Achse zu erreichen ist. Da $u(t)$ und $\varphi_1(t)$ mit P periodisch sind, gilt das gleiche für $v(t)$. $v(t)$ genügt nun der Gleichung

(16) $$\ddot{v} + f'(x)v = \beta G(t) - \tfrac{1}{2} f''(x(t) + \vartheta(t)\,u(t))\,u^2(t).$$

Aus (13) entnimmt man noch, daß

$$|\beta| \leqq \text{Const. Max } u^2(t)$$

sein muß, so daß die ganze rechte Seite von (16) dem Betrage nach kleiner ist als Const. Max u^2. Außerdem gilt noch

(17) $$v(0) = 0 = v(P), \qquad \dot{v}(0) = \dot{v}(P).$$

Sei $v_0(t)$ die durch $v_0(0) = 0 = \dot{v}_0(0)$ bestimmte Lösung von (16). Wir werden im folgenden öfter benutzen, daß die durch $w_0(0) = 0 = \dot{w}_0(0)$ bestimmte Lösung einer Differentialgleichung

$$\ddot{w}_0 + f'(x)\,w_0 = h(t),$$

wo $|h(t)| \leqq \varepsilon$ ist, für $0 \leqq t \leqq P$ nebst ihrer Ableitung kleiner ist als Const. ε; den Beweis dafür erbringt man durch ein einfaches Majorantenverfahren. Die Anwendung dieser Abschätzung auf unser $v_0(t)$ zeigt, daß für $0 \leqq t \leqq P$ der Betrag von $v_0(t)$ und $\dot{v}_0(t)$ kleiner ist als Const. Max u^2. Nun ist

(18) $$v(t) = v_0(t) + \varkappa\,\varphi_2^*(t),$$

wenn $\varphi_2^*(t)$ die für $t = 0$ verschwindende (nicht mit P periodische!) normierte Lösung von (6) bezeichnet. Dabei bestimmt sich $\varkappa$ aus einer der beiden Gleichungen

$$v(P) = 0, \qquad \text{d. h. } v_0(P) = -\varkappa\,\varphi_2^*(P)$$

oder

$$\dot{v}(0) = \dot{v}(P), \qquad \text{d. h. } \dot{v}_0(P) = \varkappa(\dot{\varphi}_2^*(0) - \dot{\varphi}_2^*(P)).$$

Da $\varphi_2^*(t)$ nicht mit P periodisch ist, ist mindestens in einer dieser beiden Gleichungen der Faktor von $\varkappa$ von Null verschieden, so daß sich $|\varkappa|$ als kleiner ergibt als Const. Max u^2. Daher ist schließlich nach (18)

$$|v(t)| \leqq \text{Const. Max } u^2.$$

Nach dieser Feststellung läßt sich (13) so schreiben:

(19) $$\beta B = L_2 \lambda^2 + O(\lambda^3),$$

wobei mit $O(\lambda^3)$ angedeutet werden soll, daß dort ein Ausdruck steht, der seinem Betrage nach kleiner ist als Const. $|\lambda|^3$. Gleichung (19) lehrt aber, daß (8) bei genügend kleinem $|\beta|$ höchstens dann eine kleine mit P periodische Lösung $u(t)$ besitzen kann, wenn $\text{sign}\,\beta B = \text{sign}\,L_2$ ist. Daß

dann aber genau zwei verschiedene kleine Lösungen $u(t)$ von (8) existieren, die mit P periodisch sind, soll jetzt gezeigt werden.

Wir nennen dazu λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der in Hinblick auf (19) gebildeten Gleichung

$$\beta B = L_2 \lambda^2. \tag{20}$$

Alle Schlüsse, die jetzt ausgehend von λ_1 gemacht werden, gelten ebenso für λ_2 und führen dann zur zweiten Lösung von (8). — Wir machen analog (14) den Ansatz

$$u(t) = \lambda_1 \varphi_1(t) + v(t). \tag{21}$$

Damit dies mit P periodische Lösung von (8) ist, muß gelten

$$\ddot u + f(x+u) - f(x + \lambda_1\varphi_1) + f(x+\lambda_1\varphi_1) - f(x) = \beta G(t), \tag{22}$$

oder mit passenden Mittelwerten

$$\ddot v + f'(x+\lambda_1\varphi_1)v = \beta G(t) - \tfrac12 f''(\bar{\bar x})\lambda_1^2\varphi_1^2 - \tfrac12 f''(\bar x)v^2, \tag{23}$$

wozu noch festgestellt sei, daß $\bar{\bar x}(t)$ von $v(t)$ unabhängig ist. Dazu kommt als Randbedingung

$$v(0) = v(P), \qquad \dot v(0) = \dot v(P). \tag{24}$$

Unter Einführung des reellen von 0 nach 1 laufenden Parameters τ betrachten wir statt (22) bzw. (23) die Gleichungsschar

$$\begin{aligned} \ddot v_\tau + (1-\tau) f'(x+\lambda_1\varphi_1)v_\tau + \tau[f(x+\lambda_1\varphi_1+v_\tau) - f(x+\lambda_1\varphi_1)] \\ = \beta G(t) - \tfrac12 f''(\bar{\bar x})\lambda_1^2\varphi_1^2 \end{aligned} \tag{25}$$

unter den zu (24) analogen Randbedingungen. Für $\tau = 1$ geht diese Gleichung in (23) über, so daß $v_1(t)$ identisch $v(t)$ wird. Die zu (25) gehörende homogene lineare Gleichung (analog (6)) lautet

$$\ddot\psi_\tau + \{f'(x+\lambda_1\varphi_1) + \tau f''(x^*)v_\tau\}\psi_\tau = 0. \tag{26}$$

Wir wollen zunächst einmal annehmen, daß $|v_\tau| < \text{Const.}\,\lambda_1^2$ ist, was sich später herausstellen wird. Dann sei $\psi_{\tau 1}$ und $\psi_{\tau 2}$ das Fundamentalsystem von Lösungen von (26), für das gilt:

$$\psi_{\tau\nu}(0) = \varphi_\nu(0), \quad \dot\psi_{\tau\nu}(0) = \dot\varphi_\nu(0) \qquad (\nu = 1, 2),$$

wobei wir $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ als normiert und zueinander orthogonal annehmen wollen. Wir wollen jetzt beweisen:

$$|D_\tau| \equiv \text{abs} \begin{vmatrix} \psi_{\tau 1}(P) - \psi_{\tau 1}(0) & \psi_{\tau 2}(P) - \psi_{\tau 2}(0) \\ \dot\psi_{\tau 1}(P) - \dot\psi_{\tau 1}(0) & \dot\psi_{\tau 2}(P) - \dot\psi_{\tau 2}(0) \end{vmatrix} > p|\lambda_1| \tag{27}$$

mit passender positiver Konstante p.

Schreibt man (26) in der Form

$$\ddot\psi_\tau + f'(x)\psi_\tau = -\psi_\tau\{f''(x^{**})\lambda_1\varphi_1 + \tau f''(x^*)v_\tau\}, \tag{28}$$

so ist sofort zu sehen, daß $|\psi_{\tau\nu}(t) - \varphi_\nu(t)| \leqq \text{Const.}\,|\lambda_1|$ gilt für $\nu = 1, 2$. $\psi_\tau(t)$ sei jetzt irgendeine (annähernd) normierte Lösung von (26). Wir zeigen zunächst die Existenz einer endlichen positiven Zahl p_1 derart, daß mindestens eine der beiden Zahlen

$$|\psi_\tau(P) - \psi_\tau(0)| \quad \text{oder} \quad |\dot\psi_\tau(P) - \dot\psi_\tau(0)|$$

größer ist als $p_1|\lambda_1|$. Dazu bilden wir die Lagrangesche Identität aus (28) und (6) und integrieren:

$$\varphi_1(0)[\dot\psi_\tau(P) - \dot\psi_\tau(0)] - \dot\varphi_1(0)[\psi_\tau(P) - \psi_\tau(0)] = -\lambda_1 \int_0^P f''(x^{**})\,\psi_\tau(t)\,\varphi_1^2(t)\,dt + O(\lambda_1^2). \tag{29}$$

Nun ist

$$\psi_\tau(t) = C_1\,\psi_{\tau 1}(t) + C_2\,\psi_{\tau 2}(t). \tag{30}$$

Solange $|C_2| > \text{Const.}\,\sqrt{|\lambda_1|}$ ist, ist unsere vorläufige Behauptung sicher richtig. Im anderen Fall ist aber infolge $|C_1| \sim 1$ bei genügend kleinem $|\lambda_1|$ wegen (12) der Betrag der rechten Seite von (29) größer als $|\lambda_1||L_2|$ (weil der Koeffizient von λ_1 in (29) gleich $-2L_2$ ist), woraus wieder die Richtigkeit der Behauptung folgt. — Wir werden jetzt zeigen, daß das Gleichungssystem

$$\psi_\tau(P) - \psi_\tau(0) \equiv C_1[\psi_{\tau 1}(P) - \psi_{\tau 1}(0)] + C_2[\psi_{\tau 2}(P) - \psi_{\tau 2}(0)] = D_\tau \cdot A,$$
$$\dot\psi_\tau(P) - \dot\psi_\tau(0) \equiv C_1[\dot\psi_{\tau 1}(P) - \dot\psi_{\tau 1}(0)] + C_2[\dot\psi_{\tau 2}(P) - \dot\psi_{\tau 2}(0)] = D_\tau \cdot B$$

bei passend gewählten endlichen A und B ein Lösungssystem C_1, C_2 mit $C_1^2 + C_2^2 \sim 1$ besitzt. Daraus folgt dann nach dem eben Festgestellten sofort die Richtigkeit von (27), da mindestens eine der beiden linken Seiten von größerem Betrage sein muß als $p_1|\lambda_1|$. — In der Tat hat man

$$C_1 = \begin{vmatrix} A & \psi_{\tau 2}(P) - \psi_{\tau 2}(0) \\ B & \dot\psi_{\tau 2}(P) - \dot\psi_{\tau 2}(0) \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} \psi_{\tau 1}(P) - \psi_{\tau 1}(0) & A \\ \dot\psi_{\tau 1}(P) - \dot\psi_{\tau 1}(0) & B \end{vmatrix}.$$

Man setze etwa im Falle $\dot\varphi_2(P) - \dot\varphi_2(0) = \Phi_2 \neq 0$

$$A = \frac{1}{\Phi_2}, \quad B = 0;$$

im anderen Falle ist $\varphi_2(P) - \varphi_2(0) = \Phi_1 \neq 0$, und man setze dann

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{\Phi_1}.$$

In beiden Fällen ist $C_1 \sim 1$, $|C_2| < \text{Const.}\,|\lambda_1|$; damit ist der Beweis der Richtigkeit von (27) erbracht.

Wir wollen jetzt den Beweis dafür liefern, daß jede mit P periodische kleine Lösung v_τ von (25), die auf dem Wege von $\tau = 0$ bis $\tau = 1$ erreicht wird, dem Betrage nach kleiner ist als $\text{Const.}\,\lambda_1^2$. Damit ist

dann unsere diesbezügliche vorhin gemachte Annahme gerechtfertigt. Dazu schreiben wir (25) so um:

$$(31)\qquad \ddot{v}_\tau + f'(x + \lambda_1 \varphi_1) v_\tau = \beta G(t) - \frac{1}{2} f''(\bar{x}) \lambda_1^2 \varphi_1^2 - \frac{\tau}{2} f''(\bar{x}_\tau) v_\tau^2.$$

Indem wir rechts das als existierend angenommene v_τ einsetzen, können wir (31) als lineare inhomogene Differentialgleichung für v_τ betrachten. Bezeichnet $v_\tau^*(t)$ die durch $v_\tau^*(0) = 0 = \dot{v}_\tau^*(0)$ bestimmte Lösung von (31), so gilt unter Beachtung von (20) $v_\tau^*(t) = O(\lambda_1^2, v_\tau^2)$. Ebenso für $\dot{v}_\tau^*(t)$. Ferner ist

$$(32)\qquad v_\tau(t) = v_\tau^*(t) + C_1 \psi_{01}(t) + C_2 \psi_{02}(t).$$

Nun besteht für D_0 sicher die Ungleichung (27) zu Recht, da zu ihrer Ableitung die Annahme $v_\tau^2 < \text{Const.}\, \lambda_1^2$ nicht notwendig ist; denn das Glied mit v_τ^2 fällt wegen $\tau = 0$ aus (26) heraus. Die Erfüllung der Periodizitätsbedingung lehrt nun aber, wie die Cramersche Regel zeigt, daß $|C_1| = O\left(\lambda_1, \frac{v_\tau^2}{\lambda_1}\right)$ ausfällt und $|C_2| = O(\lambda_1^2, v_\tau^2)$. Bildet man die Lagrangesche Identität aus (31) und (6) und integriert, so kommt bei Beachtung von (20)

$$\lambda_1 \int_0^P f''(\bar{x}) \varphi_1^2 v_\tau \, dt = O(\lambda_1^3, v_\tau^2),$$

woraus nach (32) wird:

$$\lambda_1 C_1 [L_2 + O(\lambda_1)] = O(\lambda_1^3, v_\tau^2).$$

Daraus folgt

$$C_1 = O\left(\lambda_1^2, \frac{v_\tau^2}{\lambda_1}\right),$$

womit nach (32) eine gleiche Beziehung für v_τ folgt:

$$(33)\qquad |v_\tau(t)| \leqq K_1 \lambda_1^2 + K_2 \frac{\operatorname{Max} v_\tau^2}{|\lambda_1|}$$

mit von τ unabhängigen positiven Konstanten K_1 und K_2. Nun schließe man so weiter: Für $\tau = 0$ ist (25) linear, mithin gilt $|v_0(t)| \leqq K_1 \lambda_1^2$. Mit wachsendem τ ist gemäß dem Satz in Kap. 1 die Gleichung (31) stets für Nachbarwerte von τ eindeutig lösbar, solange $|v_\tau(t)| \leqq \text{Const.}\, \lambda_1^2$ ist. Da sich dann aber $v_\tau(t)$ stetig mit τ ändert und immer (33) gilt, muß stets etwa

$$|v_\tau(t)| \leqq 2 K_1 \lambda_1^2$$

gelten, so daß wir die Fortsetzung bis zum Parameterwert $\tau = 1$ hintreiben können, womit dann Gleichung (23) gelöst ist.

Daß es nicht zwei Lösungen von (22) von der Form

$$u(t) = \lambda \varphi_1(t) + v(t)$$

mit $\lambda\varphi_1(0) = u(0)$ und $\lambda \sim \lambda_1$ gibt, folgt so: Nach den Überlegungen, die zu Gleichung (19) führten, würde für zwei solche Lösungen $u_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2)$ gelten: $u_\nu(t) = \lambda_1\varphi_1(t) + O(\lambda_1^2)$, damit für die Differenz $z(t) = u_2(t) - u_1(t)$

$$\ddot{z} + f'(x(t) + \lambda_1\varphi_1(t) + O(\lambda_1^2))z = 0;$$

diese Gleichung hat aber nach den an (26) angeschlossenen Betrachtungen keine mit P periodische Lösung, also ist $z(t) \equiv 0$.

§ 2.

$B \neq 0, \quad L_1 = 0, \quad L_2 \neq 0.$

In diesem Paragraphen soll an der Bedingung (11) festgehalten werden; dagegen wollen wir annehmen, daß die in (12) definierte Größe L_1 verschwindet. Aus letzterem Grunde ist die Gleichung

$$(34) \qquad \ddot{w}_1 + f'(x)w_1 = -\tfrac{1}{2}f''(x)\varphi_1^2(t), \quad w_1(0) = w_1(P), \quad \dot{w}_1(0) = \dot{w}_1(P)$$

lösbar. Außerdem können wir willkürlich etwa noch vorschreiben, $w_1(t)$ sei normiert. Dann setzen wir statt (14) an

$$(35) \qquad u(t) = \lambda\varphi_1(t) + \lambda^2 w_1(t) + v(t),$$

wo wir, wie aus (8), (6) und (34) zu entnehmen ist, $v(t)$ zu bestimmen haben als mit P periodische Lösung einer Gleichung der Form

$$(36) \quad \ddot{v} + f'(x)v = \beta G(t) - f''(x)\lambda^3\varphi_1 w_1 - \frac{1}{3!}f'''(x)\lambda^3\varphi_1^3 + O(\lambda^4, \lambda v, v^2);$$

dabei ist $f(x)$ etwa als viermal stetig differenzierbar vorausgesetzt.

Wir wollen zunächst annehmen, daß die Größe

$$(37) \qquad L_2 = \int_0^P \left\{f''(x)\varphi_1 w_1 + \frac{1}{3!}\varphi_1^3 f'''(x)\right\}\varphi_1(t)\,dt \neq 0$$

ausfällt. Ist dann $v(t)$ eine kleine mit P periodische Lösung von (36), so folgt durch Integration der aus (36) und (6) gebildeten Lagrangeschen Identität

$$(38) \qquad \beta B = L_2\lambda^3 + O(\lambda^4, \lambda v, v^2).$$

Wählt man wieder λ so, daß $u(0) = \lambda\varphi_1(0) + \lambda^2 w_1(0)$, mithin $v(0) = 0$ ausfällt (was unter der nicht einschränkenden Annahme $\varphi_1(0) \neq 0$ möglich ist), so wollen wir jetzt wie in § 1 beweisen, daß

$$|v(t)| \leq \text{Const. Max}\,|u|^3$$

ist. Zunächst folgt aus (38) $\beta = O(\lambda^3, \lambda v, v^2)$, so daß eine gleiche Abschätzung für die ganze rechte Seite von (36) gilt. Wir tragen rechts

in (36) unser als bekannt angesehenes $v(t)$ ein und betrachten dann (36) als lineare Gleichung für $v(t)$. $v_0(t)$ sei davon die durch

$$v_0(0) = 0 = \dot{v}_0(0)$$

bestimmte Lösung. Offenbar ist $v_0(t) = O(\lambda^3, \lambda v, v^2)$; dasselbe gilt für $\dot{v}_0(t)$. Endlich hat man

$$v(t) = v_0(t) + \varkappa\, \varphi_2^*(t),$$

wenn $\varphi_2^*(t)$ die bei $t = 0$ verschwindende normierte Lösung von (6) bezeichnet. Aus $v(P) = 0$ und $\dot{v}(0) = \dot{v}(P)$ gewinnt man noch die Beziehungen

$$v_0(P) = -\varkappa\, \varphi_2^*(P) \quad \text{und} \quad \dot{v}_0(P) = \varkappa\left(\dot{\varphi}_2^*(0) - \dot{\varphi}_2^*(P)\right),$$

aus denen wie in § 1 folgt, daß auch $\varkappa = O(\lambda^3, \lambda v, v^2)$ sein muß. Damit ist $v(t) = O(\lambda^3, \lambda v, v^2)$, d. h. schließlich

$$v(t) = O(\lambda^3). \tag{39}$$

Somit erhalten wir aus (38) als notwendige Bedingung für eine mit P periodische Lösung $v(t)$ von (36)

$$\beta B = L_3 \lambda^3 + O(\lambda^4). \tag{40}$$

Jetzt soll noch gezeigt werden, daß zu jedem genügend kleinen β genau eine mit P periodische Lösung $u(t)$ von (8) vorhanden ist. Dazu bestimmen wir zunächst λ_1 als reelle Wurzel der in Hinblick auf (40) gebildeten Gleichung

$$\beta B = L_3 \lambda_1^3 \tag{41}$$

und machen analog (35) den Ansatz

$$u(t) = \lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_1^2 w_1(t) + v(t). \tag{42}$$

Schreibt man (8) in der Form

$$\begin{aligned} \lambda_1 \ddot{\varphi}_1 + \lambda_1^2 \ddot{w}_1 + \ddot{v} + f(x + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_1^2 w_1 + v) - f(x + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_1^2 w_1) \\ + f(x + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_1^2 w_1) - f(x) = \beta G(t), \end{aligned} \tag{43}$$

so erhält man unter Beachtung von (6) und (34) für $v(t)$ eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} \ddot{v} + f'(x + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_1^2 w_1)\, v = \beta G(t) - f''(x)\, \lambda_1^3 \varphi_1 w_1 - \frac{1}{3!} f'''(x)\, \lambda_1^3 \varphi_1^3 \\ + O(\lambda_1^4) - \frac{1}{2} f''(\tilde{x})\, v^2; \end{aligned} \tag{44}$$

hierin ist $\tilde{x}(t)$ ein noch von $v(t)$ abhängender Mittelwert, während alle anderen in (44) auftretenden Größen nicht von $v(t)$ abhängen. — Außerdem muß $v(t)$ noch mit P periodisch sein.

Unter Einführung des reellen von 0 nach 1 laufenden Parameters τ betrachten wir statt (44) die Gleichungsschar

$$\begin{aligned} \ddot{v}_\tau + (1 - \tau) f'(x + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_1^2 w_1)\, v_\tau \\ + \tau\left[f(x + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_1^2 w_1 + v_\tau) - f(x + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_1^2 w_1)\right] \\ = \beta G(t) - f''(x)\, \lambda_1^3 \varphi_1 w_1 - \frac{1}{3!} f'''(x)\, \lambda_1^3 \varphi_1^3 + O(\lambda_1^4), \end{aligned} \tag{45}$$

wo also nach der eben gemachten Bemerkung die rechte Seite eine bekannte Funktion von t ist. Die zugehörige homogene lineare Gleichung lautet

$$(46)\quad \ddot{\psi}_\tau + \Big\{f'(x+\lambda_1\varphi_1+\lambda_1^2 w_1) + \tau f''(x+\lambda_1\varphi_1 + \lambda_1^2 w_1)\,v_\tau + \frac{\tau}{2} f'''(x^*)\,v_\tau^2\Big\}\psi_\tau = 0.$$

Wir wollen zunächst annehmen, daß in der durch $z(0) = 0$ bestimmten Zerlegung

$$(47)\qquad v_\tau = \varkappa\,\varphi_1(t) + z(t) \qquad \varkappa = O(\lambda_1^2),\quad z(t) = O(\lambda_1^3)$$

ausfällt, was wir später beweisen werden. Unter dieser Annahme zeigen wir zunächst die Existenz einer positiven Zahl p derart, daß

$$(48)\qquad |D_\tau| = \operatorname{abs}\begin{vmatrix} \psi_{\tau 1}(P) - \psi_{\tau 1}(0) & \psi_{\tau 2}(P) - \psi_{\tau 2}(0) \\ \dot{\psi}_{\tau 1}(P) - \dot{\psi}_{\tau 1}(0) & \dot{\psi}_{\tau 2}(P) - \dot{\psi}_{\tau 2}(0)\end{vmatrix} > p\,|\lambda_1|^2$$

ausfällt; dabei bedeuten die $\psi_{\tau\nu}(t)$ für $\nu = 1, 2$ ein gleich noch näher zu bestimmendes Fundamentalsystem von (46). Nach den entsprechenden Überlegungen in § 1 müssen wir dazu nur die Existenz einer positiven Zahl p_1 sicherstellen derart, daß für jede (annähernd) normierte Lösung $\psi_\tau(t)$ von (46) mindestens eine der beiden Zahlen $|\psi_\tau(P) - \psi_\tau(0)|$ oder $|\dot{\psi}_\tau(P) - \dot{\psi}_\tau(0)|$ größer ist als $p_1|\lambda_1|^2$.

Wir schreiben zunächst (46) in der Form

$$(49)\qquad \ddot{\psi}_\tau + f'(x)\,\psi_\tau = -f''(x)\,\lambda_1\varphi_1\psi_\tau + O(\lambda_1^2)$$

und beachten daneben die Gleichung

$$(50)\qquad \ddot{\varphi} + 2\lambda_1\ddot{w}_1 + f'(x)\,[\varphi + 2\lambda_1 w_1] = -\lambda_1 f''(x)\,\varphi_1^2.$$

Führt man jetzt $\psi_{\tau 2}(t) = \varphi_2(t) + 2\lambda_1 w_1(t) + \Phi_2(t)$ mit $\Phi_2(0) = 0 = \dot{\Phi}_2(0)$ ein, so folgt durch Subtraktion von (49) und (50) $\Phi_2(t) = O(\lambda_1)$; analog folgt mit $\psi_{\tau 1}(t) = \varphi_1(t) + 2\lambda_1 w_1(t) + \Phi_1(t)$ mit $\Phi_1(0) = 0 = \Phi_1(0)$ die Abschätzung $\Phi_1(t) = O(\lambda_1^2)$. Nun bilden wir mit einer beliebigen Lösung $\psi_\tau(t)$ von (46) die Lagrangesche Identität aus (46) und (6) und integrieren, wobei wir (47) beachten:

$$(51)\qquad \varphi_1(0)\,[\dot{\psi}_\tau(P) - \dot{\psi}_\tau(0)] - \dot{\varphi}_1(0)\,[\psi_\tau(P) - \psi_\tau(0)]$$
$$= -\int_0^P \Big\{\varphi_1 f''(x)\,[\lambda_1\varphi_1 + \lambda_1^2 w_1 + \tau\varkappa\varphi_1]\,\psi_\tau + \frac{f'''(x)}{2}\lambda_1^2\varphi_1^3\psi_\tau\Big\}\,dt + O(\lambda_1^3).$$

Nun ist $\psi_\tau(t)$ wieder in der Form (30) darstellbar, und unsere vorläufige Behauptung ist sicher richtig, solange $|C_2| > \text{Const.}\,|\lambda_1|^{3/2}$ gilt. Im anderen Fall kann man $\psi_\tau(t) = \varphi_1(t) + 2\lambda_1 w_1(t) + O(|\lambda_1|^{3/2})$ setzen und findet wegen $L_2 = 0$ und $L_3 \neq 0$, daß der Betrag der rechten Seite von (51) bei genügend kleinem $|\lambda_1|$ größer ist als $\frac{3}{2}|\lambda_1|^2|L_3|$ (d. i. etwa die Hälfte des Betrages des sich rechnungsmäßig ergebenden quadratischen Gliedes in λ_1). Aus (51) folgt aber jetzt die Existenz unserer Zahl p_1.

Wir wollen nun den Beweis für die Richtigkeit von (47) erbringen. Dazu schreiben wir (45) so um:

$$(52)\quad \begin{aligned} &\ddot{v}_\tau + f'(x + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_1^2 w_1)\, v_\tau \\ &\qquad = \beta\, G(t) - f''(x)\lambda_1^3 \varphi_1 w_1 - \frac{1}{3!}\lambda_1^3 \varphi_1^3 f'''(x) \\ &\qquad\quad - \frac{\tau}{2} f''(x + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_1^2 w_1)\, v_\tau^2 + O(\lambda_1^4, v_\tau^3). \end{aligned}$$

Indem wir rechts das als bekannt angenommene $v_\tau(t)$ einsetzen, betrachten wir (52) als lineare inhomogene Differentialgleichung für v_τ. Bezeichnet $v_\tau^*(t)$ die durch $v_\tau^*(0) = 0 = \dot{v}_\tau^*(0)$ bestimmte Lösung von (52), so gilt bei Beachtung von (40) $v_\tau^*(t) = O(\lambda_1^3, v_\tau^2)$; ebenso für $\dot{v}_\tau^*(t)$. Ferner ist

$$(53)\qquad v_\tau(t) = v_\tau^*(t) + C_1\, \psi_{01}(t) + C_2\, \psi_{02}(t).$$

Nun besteht für D_0 sicher die Ungleichung (48) zu Recht, da zu ihrer Ableitung die Annahme (47) nicht notwendig ist. Die Erfüllung der Periodizitätsbedingung lehrt dann aber mit Hilfe der Cramerschen Regel, daß

$$(54)\qquad C_1 = O\left(\lambda_1, \frac{v_\tau^2}{\lambda_1^2}\right), \quad C_2 = O(\lambda_1^3, v_\tau^2)$$

ausfällt, wobei bei der letzten Abschätzung die früher festgestellte Beziehung $\psi_{01} = \varphi_1 + 2\lambda_1 w_1 + O(\lambda_1^2)$ zu beachten ist. Bildet man die Lagrangesche Identität aus (52) und (6), integriert und beachtet (41), so kommt

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^P \varphi_1 f''(x)(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_1^2 w_1)\, v_\tau\, dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^P \varphi_1 f'''(x)(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_1^2 w_1)^2 v_\tau\, dt \\ &\qquad = -\frac{\tau}{2}\int\limits_0^P \varphi_1 f''(x)\, v_\tau^2\, dt + O(\lambda_1^4, \lambda_1^3 v_\tau, \lambda_1 v_\tau^2, v_\tau^3), \end{aligned}$$

woraus nach (53) wird

$$C_1 \lambda_1^2 [3 L_3 + O(\lambda_1)] = O(\lambda_1^4, \lambda_1^3 v_\tau, \lambda_1 v_\tau^2, v_\tau^3, \tau \lambda_1 C_1^2, C_1 v_\tau^2).$$

Daraus folgt

$$C_1 = O\left(\lambda_1^2, \lambda_1 v_\tau, \frac{v_\tau^2}{\lambda_1}, \frac{v_\tau^3}{\lambda_1^2}, \tau \frac{C_1^2}{\lambda_1}, \frac{C_1 v_\tau^2}{\lambda_1^2}\right),$$

womit nach (53) eine gleiche Beziehung für v_τ folgt:

$$(55)\quad \begin{aligned} |v_\tau(t)| \leqq\, & K_1 \lambda_1^3 + K_2 |\lambda_1|\, \mathrm{Max}\,|v_\tau| + K_3 \frac{\mathrm{Max}\, v_\tau^2}{|\lambda_1|} + K_4 \frac{\mathrm{Max}\,|v_\tau^3|}{\lambda_1^2} \\ & + K_5\, \tau \frac{C_1^2}{|\lambda_1|} + K_6 \frac{|C_1|\, v_\tau^2}{\lambda_1^2} \end{aligned}$$

mit von τ unabhängigen positiven Konstanten $K_1, K_2, \ldots, K_6$. Für $\tau = 0$ ist (45) linear, mithin gilt $|v_0(t)| \leqq K_1 \lambda_1^3$; von der gleichen Ordnung

ist auch C_1 für $\tau = 0$. Solange mit wachsendem τ Gleichung (45) lösbar ist, muß stets etwa

(56) $$|v_\tau(t)| \leq 2K_1\lambda_1^2$$

sein. Dann folgt aber aus (53) sofort die Richtigkeit von (47). Damit ist dann nach Kap. 1 (45) stets für Nachbarwerte von τ eindeutig lösbar, so daß wir die Fortsetzung bis $\tau = 1$ hin treiben können. $v_1(t)$ ist dann aber die gesuchte Funktion, die wir in (42) für $v(t)$ einzutragen haben, um eine Lösung $u(t)$ von (8) zu erhalten.

Daß es außer unserer eben gefundenen Lösung $u(t)$ von (8) zu festem β nicht noch eine zweite $u_0(t)$ gibt, ist so zu sehen: Nach den Überlegungen zu Beginn dieses Paragraphen gilt

$$u_0(t) = \lambda_0\varphi_1(t) + \lambda_0^2 w_1(t) + O(\lambda_0^2),$$

wo λ_0 der Gleichung (40) genügt; dagegen wissen wir, daß

$$u(t) = (\lambda_1 + O(\lambda_1^2))\,\varphi_1(t) + \lambda_1^2 w_1(t) + O(\lambda_1^2)$$

gilt, wo λ_1 Wurzel von (41) ist. Da aus (40) und (41) sofort $\lambda_0 = \lambda_1 + O(\lambda_1^2)$ folgt, müßte die Differenz $u(t) - u_0(t) = z(t)$ gemäß (8) einer Gleichung der Form

$$\ddot{z} + f'\big(x + (\lambda_1 + O(\lambda_1^2))\,\varphi_1(t) + \lambda_1^2 w_1(t) + O(\lambda_1^2)\big)\,z = 0$$

nebst den Periodizitätsbedingungen genügen; diese Gleichung besitzt aber nach den an (46) angeschlossenen Überlegungen nur die Lösung $z(t) \equiv 0$.

§ 3.

$B \neq 0$, $L_n \neq 0$.

Ist auch $L_3 = 0$, so besitzt die Gleichung

(57) $$\ddot{w}_2 + f'(x)\,w_2 = -f''(x)\,\varphi_1 w_1 - \frac{1}{3!}\varphi_1^3 f'''(x)$$

eine mit P periodische normierte Lösung $w_2(t)$. Dann setze man statt (35)

(58) $$u(t) = \lambda\varphi_1(t) + \lambda^2 w_1(t) + \lambda^3 w_2(t) + v(t).$$

Dabei genügt $v(t)$ an Stelle von (36), wenn man etwa $f(x)$ als fünfmal stetig differenzierbar voraussetzt, einer Gleichung der Form

(59) $$\ddot{v} + f'(x)\,v = \beta G(t) - \lambda^4 F_4(x, \varphi_1, w_1, w_2) + O(\lambda^5, \lambda v, v^2);$$

hierin enthält F_4 alle mit λ^4 multiplizierten Glieder der Taylorentwicklung von $f(x+u) - f(x)$. Man definiere

(60) $$L_4 = \int_0^P F_4(x, \varphi_1, w_1, w_2)\,\varphi_1(t)\,dt.$$

Ist $L_4 \neq 0$, so schließe man wie in den vorigen Paragraphen, im anderen Fall gehe man einen Schritt weiter. Allgemein erhält man so

(61) $$u(t) = \lambda\varphi_1(t) + \lambda^2 w_1(t) + \lambda^3 w_2(t) + \ldots + \lambda^{n-1} w_{n-2}(t) + v(t),$$

wo also $w_\nu(t)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$ mit P periodische normierte Lösung einer Gleichung

$$(62)\qquad \ddot{w}_\nu + f'(x)\, w_\nu = -F_{\nu+1}(x, \varphi_1, w_1, w_2, \ldots, w_{\nu-1})$$

ist und angenommen wird, daß für die Größen

$$(63)\qquad L_\nu \equiv \int_0^P F_\nu \varphi_1\, dt = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 2, 3, \ldots, n-1$$

gilt. $v(t)$ genügt dann einer Gleichung der Form

$$(64)\qquad \ddot{v} + f'(x)\, v = \beta G(t) - \lambda^n F_n(x, \varphi_1, w_1, \ldots, w_{n-2}) + O(\lambda^{n+1}, \lambda v, v^2)$$

und ist mit P periodisch; dabei enthält F_n alle mit λ^n multiplizierten Glieder der Taylorentwicklung von $f(x+u) - f(x)$ mit dem $(n+1)$-ten Glied als Restglied. Sei jetzt

$$(65)\qquad L_n \equiv \int_0^P F_n \varphi_1\, dt \neq 0.$$

Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (8) erhält man wieder so: Sei $v(t)$ eine kleine mit P periodische Lösung von (64); dann folgt durch Integration der aus (64) und (6) gebildeten Lagrangeschen Identität

$$(66)\qquad \beta B = L_n \lambda^n + O(\lambda^{n+1}, \lambda v, v^2).$$

Wählt man λ so, daß $u(0) = \lambda \varphi_1(0) + \lambda^2 w_1(0) + \ldots + \lambda^{n-1} w_{n-2}(0)$ ist, mithin $v(0) = 0$, was bei $\varphi_1(0) \neq 0$ sicher möglich ist, so folgt genau wie zu Beginn von § 2, daß $v(t) = O(\lambda^n)$ ist. Damit hat man als notwendige Bedingung nach (66)

$$(67)\qquad \beta B = L_n \lambda^n + O(\lambda^{n+1}).$$

Wir lösen jetzt die in Hinblick auf (67) gebildete Gleichung

$$(68)\qquad \beta B = L_n \lambda^n.$$

Ihre reelle Wurzel sei λ_1 im Fall n ungerade, bei geradem n tritt noch λ_2 hinzu. Alle Schlüsse, die ich jetzt ausgehend von λ_1 mache, gelten bei geradem n auch, wenn man statt dessen von λ_2 ausgeht. Wir setzen

$$(69)\qquad u_1(t) = \lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_1^2 w_1(t) + \ldots + \lambda_1^{n-1} w_{n-2}(t)$$

und tragen dies für $u(t)$ in die linke Seite von (8) ein:

$$(70)\qquad \ddot{u}_1 + f'(x)\, u_1 + \frac{1}{2} f''(x)\, u_1^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)\, u_1^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\, u_1^n = \lambda_1^n F_n + O(\lambda_1^{n+1}),$$

wo $O(\lambda_1^{n+1})$ eine bekannte Funktion von t ist. Unter Einführung des von 1 nach 0 laufenden reellen Parameters τ betrachten wir sodann (in

geringer Abänderung der in den vorigen Paragraphen geschilderten Überlegungen) die Gleichungsschar

$$(71)\qquad \begin{aligned} \ddot{u}_\tau + f'(x)\,u_\tau + \frac{1}{2} f''(x)\,u_\tau^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\,u_\tau^n \\ = \tau[\lambda_1^n F_n + O(\lambda_1^{n+1})] + (1-\tau)\beta G(t) \\ - (1-\tau)\Big[f(x+u_\tau) - f(x) - \dots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\,u_\tau^n\Big], \end{aligned}$$

die für $\tau = 1$ in (70) übergeht. Die zugehörige homogene Gleichung hat die Form

$$(72)\qquad \begin{aligned} \ddot{\psi}_\tau + \Big[f'(x) + f''(x)\,u_\tau + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\,u_\tau^{n-1} \\ + \frac{1-\tau}{n!} f^{(n+1)}(\overline{x})\,u_\tau^n\Big]\,\psi_\tau = 0, \end{aligned}$$

wenn $f(x)$ etwa als $(n+1)$-mal stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. — Wir wollen mit abnehmendem τ unsere Lösung (69) stetig weiterverfolgen. Nehmen wir zunächst an, das ließe sich machen; sei also $u_\tau(t)$ eine so durch Fortsetzung erhaltene mit P periodische Lösung von (71). Dann folgt mit den zu (67) führenden Schlüssen unter Beachtung von (68):

$$(73)\qquad \begin{aligned} u_\tau(t) = \lambda_\tau\,\varphi_1(t) + \lambda_\tau^2 w_1(t) + \dots + \lambda_\tau^{n-1} w_{n-2}(t) + v_\tau(t), \\ v_\tau(0) = 0 = v_\tau(P), \quad \dot{v}_\tau(0) = \dot{v}_\tau(P). \end{aligned}$$

Zunächst stimmt für $\tau = 1$ (73) mit (69) überein, und es ist $v_1(t) \equiv 0$. Weiter folgt analog (67), wieder unter Beachtung von (68),

$$(74)\qquad \beta B = L_n \lambda_\tau^n + O(\lambda_\tau^{n+1}), \quad v_\tau(t) = O(\lambda_\tau^n).$$

Damit unsere Annahme der eindeutigen stetigen Fortsetzbarkeit von $u_\tau(t)$ bei abnehmendem τ bis $\tau = 0$ hin gerechtfertigt ist, brauchen wir in Hinblick auf Kap. 1 nur noch zu zeigen, daß jede mit P periodische Lösung $\psi_\tau(t)$ von (72) identisch verschwinden muß.

Wir betrachten jetzt unter Beachtung von (62) neben (72) die Gleichung

$$(75)\qquad \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + 2\lambda_\tau \ddot{w}_1 + 3\lambda_\tau^2 \ddot{w}_2 + \dots + (n-1)\lambda_\tau^{n-2} \ddot{w}_{n-2} \\ = -\sum_{\nu=1}^{n-2} (\nu+1) F_{\nu+1}(x, \varphi_1, w_1, \dots, w_{\nu-1})\,\lambda_\tau^\nu. \end{aligned}$$

Aus (72) folgt mit dem Ansatz

$$\psi_{\tau 2}(t) = \varphi_2(t) + \Phi_2(t) \quad \text{mit} \quad \Phi_2(0) = 0 = \dot{\Phi}_2(0)$$

sofort $\Phi_2(t) = O(\lambda_\tau)$. Macht man dagegen den Ansatz

$$\begin{aligned} \psi_{\tau 1}(t) = \varphi_1(t) + 2\lambda_\tau w_1(t) + 3\lambda_\tau^2 w_2(t) + \dots + (n-1)\lambda_\tau^{n-2} w_{n-2}(t) \\ + \Phi_1(t), \quad \Phi_1(0) = 0 = \dot{\Phi}_1(0), \end{aligned}$$

so heben sich bei der Subtraktion von (72) und (75) alle Potenzen λ_τ^ν bis einschließlich $\nu = n - 2$ hin fort, wie man durch Vergleich der mit jedem $f^{(\mu)}(x):\mu!$ multiplizierten Glieder sieht, wenn man die Formel

$$(76)\quad \frac{d}{d\lambda}(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_\varrho \lambda^\varrho)^\mu = \mu\,(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_\varrho\lambda^\varrho)^{\mu-1}\,(a_1 + 2a_2\lambda + \ldots + \varrho a_\varrho \lambda^{\varrho-1})$$

beachtet; man findet also $\Phi_1(t) = O(\lambda_\tau^{n-1})$. Nach (74) ist dabei λ_τ gleich λ_1 bis auf Glieder mindestens zweiter Ordnung, also können wir statt $O(\lambda_\tau^\nu)$ auch $O(\lambda_1^\nu)$ schreiben. — Nun bilden wir mit einer beliebigen Lösung $\psi_\tau(t)$ von (72) die Lagrangesche Identität zwischen (72) und (6) und integrieren sie zwischen 0 und P:

$$(77)\quad [\dot\psi_\tau(P) - \dot\psi_\tau(0)]\,\varphi_1(0) - [\psi_\tau(P) - \psi_\tau(0)]\,\dot\varphi_1(0) + \int_0^P \psi_\tau\,\varphi_1\left[f''(x)\,u_\tau + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}\,u_\tau^{n-1}\right]dt = O(\lambda_\tau^n).$$

Wir wollen jetzt die Existenz einer positiven Zahl p_1 beweisen derart, daß mindestens eine der beiden Zahlen $|\psi_\tau(P) - \psi_\tau(0)|$ oder $|\dot\psi_\tau(P) - \dot\psi_\tau(0)|$ größer ist als $p_1|\lambda_1|^{n-1}$. — Jedenfalls ist $\psi_\tau(t)$ wieder in der Form (30) darstellbar, und unsere Behauptung ist sicher richtig, solange

$$|C_2| > \text{Const.}\,|\lambda_\tau|^{n-\frac{3}{2}}$$

ist. Im andern Fall kann man

$$\psi_\tau(t) = \varphi_1(t) + 2\lambda_\tau w_1(t) + \ldots + (n-1)\,\lambda_\tau^{n-2}\,w_{n-2}(t) + O(|\lambda_\tau|^{n-\frac{3}{2}})$$

setzen. Geht man damit in (77) ein, so kommt vermöge (76)

$$[\dot\psi_\tau(P) - \dot\psi_\tau(0)]\,\varphi_1(0) - [\psi_\tau(P) - \psi_\tau(0)]\,\dot\varphi_1(0) + \int_0^P \varphi_1 \sum_{\nu=2}^{n} \nu\,\lambda_\tau^{\nu-1} F_\nu(x, \varphi_1, w_1, \ldots, w_{\nu-1})\,dt = O(|\lambda_\tau|^{n-\frac{1}{2}});$$

dies läßt sich umschreiben:

$$(78)\quad [\dot\psi_\tau(P) - \dot\psi_\tau(0)]\,\varphi_1(0) - [\psi_\tau(P) - \psi_\tau(0)]\,\dot\varphi_1(0) + \sum_{\nu=2}^{n} \nu L_\nu \lambda_\tau^{\nu-1} = O(|\lambda_\tau|^{n-\frac{1}{2}}),$$

woraus wegen $L_\nu = 0$ für $\nu = 2, \ldots, n-1$ und $L_n \neq 0$ sofort unsere Behauptung folgt. — Wie in § 1 ergibt sich jetzt, daß die in (48) angeschriebene Determinante dem Betrage nach größer ist als $p|\lambda_1|^{n-1}$ mit passender positiver Zahl p, so daß also jede mit P periodische Lösung $u_\tau(t)$ von (71) wirklich einfache Lösung ist im Sinne von Kap. 1. Der Fortsetzungsprozeß läßt sich demnach bis $\tau = 1$ hin durchführen, so daß wir in $u_0(t)$ eine Lösung von (8) erhalten.

Daß es außer dem eben gefundenen $u_0(t)$ nicht noch eine zweite Lösung $u(t)$ geben kann von der Form (61) mit $\lambda \sim \lambda_1$, ist schwerer zu

sehen als in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$, da man bei Bildung der Differentialgleichung für $u(t) - u_0(t)$ hier nicht mehr auf eine Gleichung kommt, deren homogener Teil die Form (72) besitzt. Man kann etwa so schließen: Man betrachte wieder die Gleichungsschar (71), indem man aber diesmal ausgeht von $\tau = 0$; und zwar setze man in diesem Falle für $\tau = 0$ die zweite eben erwähnte Lösung $u(t)$ ein. Jetzt betrachte man die stetige Änderung dieses $u(t)$ bei wachsendem τ. Für $\tau = 1$ gelangt man wie früher zu einer Lösung von (70), wo die rechte Seite eine bekannte Funktion $H(t)$ von t ist; die erreichte Lösung für $\tau = 1$ braucht nun von vornherein nicht das alte $u_1(t)$ zu sein. Sagen wir, wir kämen zu einer anderen Lösung $u_2(t)$. Wäre $u_2(t) \equiv u_1(t)$, so würde an Hand von (71) der jetzt wieder von $\tau = 1$ bis $\tau = 0$ hin geführte Fortsetzungsprozeß zeigen, daß auch $u(t) \equiv u_0(t)$ sein muß. Wir brauchen also nur noch folgendes zu zeigen: Gleichung (70), die wir in der Form

$$\ddot{u} + f'(x)u + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}u^n = H(t) \tag{79}$$

schreiben, kann außer dem in (69) angeschriebenen $u_1(t)$ keine weiteren mit P periodischen Lösungen der Form

$$u_\varkappa(t) = \lambda_\varkappa \varphi_1(t) + \lambda_\varkappa^2 w_1(t) + \ldots + \lambda_\varkappa^{n-1} w_{n-2}(t) + v_\varkappa(t), \quad v_\varkappa(t) = O(|\lambda_1|^n)$$

mit $\lambda_\varkappa \sim \lambda_1$ besitzen. Jede solche Lösung $u_\varkappa(t)$ wäre wie früher einfach. Daher kann es nur endlich viele solcher Lösungen $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_k(t)$ geben; denn andernfalls müßte für die nach dem Arzelaschen Prinzip existierende Häufungslösung die zu (79) gehörige homogene lineare Gleichung eine mit P periodische Lösung besitzen. Wir zeigen jetzt, daß alle $\lambda_\varkappa$ voneinander verschieden sein müssen. Wäre etwa im Gegenteil $\lambda_\nu = \lambda_\mu$, so werden wir jetzt $v_\mu(t) \equiv v_\nu(t)$ zeigen, d. h. $u_\mu(t) \equiv u_\nu(t)$. In der Tat genügt $w(t) = v_\nu(t) - v_\mu(t)$ gemäß (79) einer linearen Gleichung der Form

$$\ddot{w} + \left[f'(x) + f''(x)(u_\nu - v_\nu) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x)(u_\nu - v_\nu)^{n-1} + O(\lambda_1^n)\right] w = 0.$$

Aus den an (72) angeschlossenen Überlegungen folgt, daß $w(t) \equiv 0$ die einzige mit P periodische Lösung hiervon ist. — Nun genügt λ_1 der Gleichung (68) und z. B. λ_2 gemäß (67) einer Gleichung

$$\beta B = L_n \lambda_2^n + C \lambda_2^{n+1}$$

mit endlichem C. Unter Einführung des reellen von 1 nach 2 laufenden Parameters σ lösen wir jetzt die Gleichung

$$\beta B = L_n \lambda_\sigma^n - (1 - \sigma) C \lambda_\sigma^{n+1}.$$

Ersichtlich ändert sich λ_σ monoton von λ_1 nach λ_2. Wir setzen die mit P periodischen Funktionen

$$u_\sigma(t) = \lambda_\sigma \varphi_1(t) + \lambda_\sigma^2 w_1(t) + \ldots + \lambda_\sigma^{n-1} w_{n-2}(t) - (1 - \sigma) v_2(t)$$

in die linke Seite von (79) ein; dann errechnet sich eine mit P periodische rechte Seite $H_\sigma(t)$, so daß also gilt

$$(80) \qquad \ddot{u}_\sigma + f'(x)\,u_\sigma + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,u_\sigma^n = H_\sigma(t).$$

Dabei ist $H_1(t) = H_2(t) = H(t)$ und für jedes σ ist

$$\int_0^P H_\sigma(t)\,\varphi_1(t)\,dt = L_n\,\lambda_\sigma^n + O(\lambda_\sigma^{n+1}) \neq 0.$$

Wir lassen jetzt in (80) σ von 1 nach 2 laufen und verfolgen gleichzeitig alle bei $\sigma = 1$ bestehenden Lösungen $u_\varkappa(t)$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$). Die zu (80) gehörende homogene lineare Gleichung hat nie eine mit P periodische Lösung, wie man analog wie bei (72) beweist. Daher können wir nach Kap. 1 alle k Lösungen bis $\sigma = 2$ hin fortsetzen; dort müssen sie sich abgesehen von der Reihenfolge wegen $H_2(t) \equiv H_1(t)$ reproduziert haben. Die Reihenfolge hat sich aber wirklich geändert, da λ_1 stetig in λ_2 übergegangen ist. Verfolgt man die $\lambda_\varkappa$ bei diesem Fortsetzungsprozeß — wir nennen sie $\lambda_{\varkappa\sigma}$, um die Abhängigkeit von σ auszudrücken —, so muß es also mindestens einen Wert σ^* zwischen 1 und 2 geben, dazu zwei verschiedene Indizes ν und μ derart, daß $\lambda_{\nu\sigma^*} = \lambda_{\mu\sigma^*}$ wird. Dann wäre aber $u_{\nu\sigma^*}(t) \equiv u_{\mu\sigma^*}(t)$, also keine einfache Lösung, was unseren vorhin an die Gleichung (79) angeschlossenen Resultaten widerspricht, die natürlich auch für die Gleichung (80) gelten. Damit ist der Eindeutigkeitsbeweis geliefert.

Man hätte natürlich auch die Eindeutigkeit der Lösung der analytischen Gleichung (79) aus der bekannten Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen übernehmen können; doch wäre dies im Rahmen der hier vorgetragenen Überlegungen äußerst unschön, da die bisher bekannte Theorie die Führung eines Konvergenzbeweises erfordert.

Das Resultat dieses Paragraphen ist folgender Satz: *Ist $B \neq 0$ und L_n die erste von Null verschiedene L-Größe, so besitzt Gleichung* (8) *bei ungeradem n und genügend kleinem β genau eine kleine mit P periodische Lösung, bei geradem n zwei, falls* $\operatorname{sign}\beta B = \operatorname{sign} L_n$ *ist, keine, falls* $\operatorname{sign}\beta B \neq \operatorname{sign} L_n$ *ausfällt.*

§ 4.

$L_2 \neq 0,\ B = 0.$

Wir schließen jetzt wieder an die Untersuchungen des § 1 an. Es verschwinde die in (11) definierte Größe B, während (12) noch Gültigkeit besitzen soll. Nehmen wir zunächst wieder an, wir hätten eine kleine Lösung $u(t)$ von (8). Dann können wir zerlegen

$$(81) \qquad u(t) = z(t) + w(t),$$

wo $z(t)$ die durch $z(0) = z(P) = u(0) = u(P)$ bestimmte mit P periodische Lösung von

(82) $$\ddot{z} + f'(x) z = \beta G(t)$$

sein soll, was wieder bei $\varphi_1(0) \neq 0$ möglich ist. $w(t)$ genügt dann der Gleichung

(83) $$\ddot{w} + f'(x) w = -\tfrac{1}{2} f''(x(t) + \vartheta(t) u(t)) (z + w)^2,$$
$$w(0) = 0 = w(P), \quad \dot{w}(0) = \dot{w}(P),$$

wo $0 \leq \vartheta(t) \leq 1$ gilt. Hieraus folgt zunächst wie früher

(84) $$w = O(z^2).$$

Gleichung (83) hat dann und nur dann eine mit P periodische Lösung, wenn die rechte Seite zu $\varphi_1(t)$ orthogonal ist. Ich setze

(85) $$z(t) = z_0(t) + \varkappa \varphi_1(t),$$

wenn $z_0(t)$ etwa die durch $z_0(0) = 0$ bestimmte mit P periodische Lösung von (82) bezeichnet, für die offenbar

(86) $$z_0 = O(\beta)$$

gilt, und betrachte den Ausdruck

(87) $$\int_0^P f''(x)(z_0 + \varkappa \varphi_1)^2 \varphi_1 \, dt,$$

der eine quadratische Form in $\varkappa$ ist. Mit den Abkürzungen

(88) $$a = \frac{1}{2L_2} \int_0^P f''(x) z_0 \varphi_1^2 \, dt, \qquad b = \frac{1}{2L_2} \int_0^P f''(x) z_0^2 \varphi_1 \, dt$$

schreibt sich (87) in der üblichen Form

(89) $$Q(\varkappa) = \varkappa^2 + 2a\varkappa + b$$

mit den Wurzeln

$$\varkappa_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

und dem für $\varkappa = -a$ angenommenen Extremwert

$$-a^2 + b = O(\beta^2).$$

Wir müssen zunächst noch feststellen, daß jede mit P periodische Lösung $u(t)$ von (8) sicher kleiner ist als Const. $|\beta|$. Im anderen Fall wäre nämlich

$$\operatorname{Max} |u| = \operatorname{Max} |z_0 + \varkappa \varphi_1 + w| \geq K|\beta|$$

mit beliebig großem K, es müßte also wegen (84) und (86) $|\varkappa| \geq R|\beta|$ gelten mit beliebig großem R. Dann wäre aber

(90) $$\varkappa^2 \int_0^P f''(x) \varphi_1^3 \, dt = 2\varkappa^2 L_2 \geq 2R^2 |\beta|^2 L_2$$

und aus der integrierten Lagrangeschen Identität zwischen (8) und (6) würde unter Beachtung von $B = 0$ folgen:

$$0 = \int_0^P f''(x + \vartheta u)(z_0 + w + \varkappa \varphi_1)^2 \varphi_1 \, dt,$$

was infolge (90), (86) und (84) nicht angeht.

Nach dieser Zwischenbemerkung kehren wir zur Betrachtung der quadratischen Form (89) zurück. Da jetzt $z \cdot w = O(\beta^3)$ ist, kann bei genügend kleinem β die rechte Seite von (83) sicher nicht zu $\varphi_1(t)$ orthogonal sein. wenn die Form (89) oder (87) definit ist.

Wir wollen jetzt den anderen Hauptfall weiter untersuchen, daß nämlich $Q(\varkappa) = 0$ zwei verschiedene reelle Wurzeln $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ besitzt. Wir werden zeigen, daß dann bei genügend kleinem β Gleichung (8) genau zwei mit P periodische Lösungen besitzt. Dazu bilden wir mit den Wurzeln $\varkappa_\nu$ $(\nu = 1, 2)$

$$z_\nu = z_0 + \varkappa_\nu \varphi_1$$

und setzen

$$u_\nu = z_\nu + w_\nu,$$

wo sich dann w_ν bestimmt aus der zu (23) analogen Gleichung

$$\ddot{w}_\nu + f'(x + z_\nu) w_\nu = -\tfrac{1}{2} f''(\bar{\bar{x}}) z_\nu^2 - \tfrac{1}{2} f''(\bar{\bar{x}}) w_\nu^2, \tag{91}$$

in der $\bar{\bar{x}}$ von w_ν unabhängig ist. Dazu kommt entsprechend (24) als Randbedingung

$$w_\nu(0) = w_\nu(P) \quad \dot{w}_\nu(0) = \dot{w}_\nu(P). \tag{92}$$

Analog (25) betrachte man die Gleichungsschar

$$\ddot{w}_\tau + (1 - \tau) f'(x + z_\nu) w_\tau + \tau [f(x + z_\nu + w_\tau) - f(x + z_\nu)] = -\tfrac{1}{2} f''(\bar{\bar{x}}) z_\nu^2 \tag{93}$$

unter den gleichen Randbedingungen. Für $\tau = 1$ geht (93) in (91) über. Die zugehörige homogene lineare Gleichung ist

$$\ddot{\psi}_\tau + \{f'(x + z_\nu) + \tau f''(x^*) w_\tau\} \psi_\tau = 0. \tag{94}$$

Um nun zu zeigen, daß die zu (27) analoge Determinante dem Betrage nach größer ist als $p \cdot |\beta|$ mit passendem positivem p, gehen wir genau wie dort vor. An die Stelle der Gleichung (29) tritt dabei die folgende:

$$\begin{aligned} \varphi_1(0)[\dot{\psi}_\tau(P) - \dot{\psi}_\tau(0)] - \dot{\varphi}_1(0)[\psi_\tau(P) - \psi_\tau(0)] \\ = -\int_0^P f''(x^{**}) \psi_\tau(t) z_\nu(t) \varphi_1(t) \, dt + O(\beta^2), \end{aligned} \tag{95}$$

wenn zunächst $w_\tau(t) + O(\beta^2)$ angenommen wird. Wie früher genügt es, $\psi_\tau(t) = \varphi_1(t) + O(\sqrt{|\beta|})$ zu betrachten. Dann wird die rechte Seite von (95)

$$\begin{aligned} -\int_0^P f''(x) \varphi_1^2 [z_0 + \varkappa_\nu \varphi_1] \, dt + O(|\beta|^{3/2}) &= -2 L_2(a + \varkappa_\nu) + O(|\beta|^{3/2}) \\ &= -2 L_2(\pm \sqrt{a^2 - b}) + O(|\beta|^{3/2}). \end{aligned}$$

Da $\sqrt{a^2-b}$ genau von der Ordnung β ist, folgt jetzt wie früher das Bestehen einer Gleichung der Art (27). Daß die Annahme $w_\nu(t) = O(\beta^\nu)$ berechtigt ist, zeigt man auch wieder genau wie früher: Jede mit P periodische kleine Lösung von (93) genügt einer solchen Abschätzung, genau wie dies früher für jede mit P periodische Lösung $v_\nu(t)$ von (25) gezeigt wurde. — Daß es nicht mehr als diese zwei Lösungen gibt (für $\nu = 1$ und 2), folgt gleichfalls wie am Schluß von § 1.

Der Fall einer Doppelwurzel von $Q(\varkappa)$ läßt sich in dieser Näherung so nicht weiter behandeln. Da jedenfalls in der Nachbarschaft von $x(t)$ auch Doppellösungen vorhanden sein müssen, die die Gebiete mit zwei Lösungen von denen mit keiner Lösung trennen, können diese ersichtlich für $\beta \to 0$ höchstens zu den eben jetzt in Rede stehenden rechten Seiten $G(t)$ gehören; und zwar zu jedem solchen $G(t)$, da man ja rechte Seiten $\beta G(t) + \sigma H(t)$ mit $\int\limits_0^P H(t)\,\varphi_1(t)\,dt \neq 0$ betrachten kann, wo man bei um 0 variierendem σ von Gebieten mit zwei Lösungen zu solchen mit keiner Lösung gelangen kann.

In ähnlicher Weise läßt sich auch der Fall $L_n \neq 0$, $B = 0$ noch weiter diskutieren, doch ist dies von geringerem Interesse.

§ 5.

Weitergehende Näherungen.

Kehren wir etwa zu den Überlegungen des § 3 zurück. Im Falle, daß L_n die erste nicht verschwindende L-Größe ist und B nicht Null ist, erhielten wir in (69) mit λ_1 als Wurzel von (68) einen mit P periodischen Ausdruck $u_1(t)$, der als Näherungslösung für die gesuchte Lösung von (8) anzusprechen ist in folgendem Sinn: Bildet man die Lagrangesche Identität zwischen (8), wo $u(t) = u_1(t)$ gesetzt wird, und (6) mit $\varphi(t) = \varphi_1(t)$, subtrahiert und integriert zwischen 0 und P, so heben sich in der erscheinenden Gleichung — der sog. Verzweigungsgleichung — alle Potenzen λ_1^ν identisch heraus bis einschließlich $\nu = n-1$ hin, die n-te vermöge der Gleichung (68). Das Gleiche tritt aber auch ein, wenn man λ_1 ersetzt durch eine Wurzel λ von (67). Es ist also tatsächlich $u(t)$ erst angenähert bis auf einen Fehler von der Größe des Unterschiedes zwischen λ und λ_1, also von der Ordnung λ_1^2. Es fragt sich nun, ob man eine bessere Annäherung an das wirkliche $u(t)$ erzielen kann, wenn man von $f(x)$ weitere Differentialquotienten als existierend und stetig voraussetzt. Das ist in der Tat so.

Wir bestimmen zu diesem Zweck $z_n(t)$ als mit P periodische normierte Lösung von

$$(96)\qquad \ddot{z}_n + f'(x)\,z_n = -F_n(x, \varphi_1, w_1, \ldots, w_{n-1}) + \frac{L_n}{B}\,G(t).$$

Dies ist möglich, da die rechte Seite zu $\varphi_1(t)$ orthogonal ist. Dann setze man statt (61) an

(97) $$u(t) = \lambda\varphi_1(t) + \lambda^2 w_1(t) + \ldots + \lambda^{n-1} w_{n-2}(t) + \lambda^n z_n(t) + v(t);$$

λ bestimmen wir wieder so, daß $v(0) = 0$ ausfällt. Das mit P periodische $v(t)$ genügt dann einer Gleichung der Form

(98) $$\ddot{v} + f'(x)v = \left(\beta - \frac{L_n}{B}\lambda^n\right)G(t) - \lambda^{n+1}F_{n+1}(x, \varphi_1, w_1, \ldots, w_{n-2}, z_n) + O(\lambda^{n+2}, \lambda v, v^2),$$

wo F_{n+1} alle mit λ^{n+1} multiplizierten Glieder der Taylorentwicklung von $f(x+u) - f(x)$ mit dem $(n+2)$-ten Glied als Restglied enthält. Analog (65) definieren wir

(99) $$L_{n+1} = \int_0^P F_{n+1}\varphi_1\, dt.$$

Als notwendige Bedingung für die Existenz einer mit P periodischen Lösung von (8) ergibt sich dann analog (66)

$$\beta B = L_n\lambda^n + L_{n+1}\lambda^{n+1} + O(\lambda^{n+2}, \lambda v, v^2),$$

die wie früher in der Form

(100) $$\beta B = L_n\lambda^n + L_{n+1}\lambda^{n+1} + O(\lambda^{n+2})$$

schreibbar ist; außerdem ist $v(t) = O(\lambda^{n+1})$; dabei hat man zu beachten, daß ja in (98) $\left|\beta - \frac{L_n}{B}\lambda^n\right| = O(\lambda^{n+1}, \lambda v, v^2)$ ist.

Wir lösen nun umgekehrt statt (100) die Gleichung

(101) $$\beta B = L_n\lambda_1^n + L_{n+1}\lambda_1^{n+1}$$

und setzen statt (69)

(102) $$u_1(t) = \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_1^2 w_1(t) + \ldots + \lambda_1^{n-1} w_{n-2}(t) + \lambda_1^n z_n(t).$$

Nun machen wir die gleichen Überlegungen, die sich an (69) anschlossen. Im Gleichungssystem (71) werden wir die Taylorentwicklung ein Glied höher treiben; die eindeutige Fortsetzbarkeit unseres $u_1(t)$ mit stetig sich änderndem τ beweisen wir jedoch genau wie früher, wir brauchen also z. B. in Formel (75) keine neuen Summanden hinzuzunehmen. Auf diese Weise finden wir, daß unser $u_1(t)$ aus (102) mit P periodische Näherungslösung zu $u(t)$ ist in folgendem Sinn: In der Verzweigungsgleichung heben sich alle Potenzen λ_1^ν identisch heraus bis einschließlich $\nu = n-1$, die n-te und $(n+1)$-te vermöge (101) bzw. (100). Da sich aber eine Wurzel von (100) von der entsprechenden Wurzel λ_1 von (101) höchstens um einen Betrag der Ordnung λ_1^2 unterscheidet, ist also unsere Näherung (102) um eine Ordnung genauer als die Näherung (69).

Jetzt ist sofort zu sehen, wie die nächste Näherung zu erreichen ist, die nur einen Fehler der Ordnung λ_1^4 aufweist. Man verstehe unter $z_{n+1}(t)$ die normierte mit P periodische Lösung von

$$\ddot{z}_{n+1} + f'(x) z_{n+1} = -F_{n+1} + \frac{L_{n+1}}{B} G(t) \tag{103}$$

und setze statt (102)

$$u_1(t) = \lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_1^2 w_1(t) + \ldots + \lambda_1^{n-1} w_{n-2}(t) + \lambda_1^n z_n(t) \\ + \lambda_1^{n+1} z_{n+1}(t), \tag{104}$$

wo λ_1 Wurzel der Gleichung

$$\beta B = L_n \lambda^n + L_{n+1} \lambda^{n+1} + L_{n+2} \lambda^{n+2} \tag{105}$$

ist. In gleicher Weise kann man die Näherungen noch weiter treiben.

Wir schließen dieses Kapitel mit folgender Bemerkung: Das geschilderte Verfahren erlaubt die näherungsweise Konstruktion der zu $x(t)$ benachbarten mit P periodischen Lösungen $y(t)$ von (4), sofern $f(y)$ genügend oft differenzierbar ist. Ist z. B. $f(y)$ genau n-mal differenzierbar und verschwinden für eine bekannte Ausgangslösung $x(t)$ die Größen L_2, $L_3, \ldots, L_n$, so kann auf dem eingeschlagenen Wege überhaupt keine Aussage gemacht werden. Die Verhältnisse liegen hier genau so, wie etwa beim Problem der Bestimmung der Extremwerte einer Funktion $f(x)$ unter Heranziehung der sukzessiven Ableitungen.

3. Kapitel.

Der Resonanzfall; zweifacher Eigenwert.

Gleichung (6) habe eine zweiparametrige Schar mit P periodischer Lösungen. $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ seien zwei normierte orthogonale unter diesen. $u(t)$ sei eine mit P periodische kleine Lösung von (8). Integration der aus (8) und (6) gebildeten Lagrangeschen Identität liefert mit der Abkürzung

$$B_\mu = \int_0^P G(t)\,\varphi_\mu(t)\,dt \qquad (\mu = 1, 2) \tag{106}$$

die beiden Gleichungen

$$\beta \cdot B_\mu = \tfrac{1}{2} \int_0^P f''(x(t) + \vartheta(t)\,u(t))\,u^2(t)\,\varphi_\mu(t)\,dt \qquad (\mu = 1, 2). \tag{107}$$

Wir setzen nun

$$u(t) = \lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_2 \varphi_2(t) + v(t), \tag{108}$$

wo über λ_1 und λ_2 später passend verfügt werden wird[11]). Setzt man noch $f(x)$ etwa als dreimal stetig differenzierbar voraus, so schreiben sich die Gleichungen (107) in der Form

$$(109)\qquad \beta B_\mu = Q_\mu(\lambda_1, \lambda_2) + O(\lambda^3, \lambda v, v^2) \qquad (\mu = 1, 2),$$

wo z. B. $O(\lambda^3)$ bedeutet, daß dort ein Ausdruck dritter Ordnung in λ_1 und λ_2 steht, usw.; dabei ist $Q_\mu(\lambda_1, \lambda_2)$ die in λ_1 und λ_2 homogene quadratische Form

$$(110)\qquad Q_\mu(\lambda_1, \lambda_2) = \tfrac{1}{2}\int_0^P f''(x)(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)^2\,\varphi_\mu(t)\,dt.$$

Je nach dem Verhalten dieser quadratischen Formen unterscheidet sich die Diskussion. Wir wollen diese nur unter der zu (11) analogen Bedingung durchführen, das nicht beide Größen B_μ in (106) verschwinden. Durch Wahl von φ_1 und φ_2 können wir dann erreichen:

$$(111)\qquad B_1 \neq 0, \qquad B_2 = 0.$$

I. $Q_2(\lambda_1, \lambda_2)$ sei eine definite Form in λ_1 und λ_2, die also nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ verschwindet. Dann wählen wir λ_1 und λ_2 so, daß mit $\lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) = \lambda_0\varphi_0(t)$ gilt $u(0) = \lambda_0\varphi_0(0)$ und $\dot u(0) = \lambda_0\dot\varphi_0(0)$; $\varphi_0(t)$ sei dabei normiert. Die beiden Gleichungen (109) lauten dann

$$(112)\qquad \begin{aligned} \beta B_1 &= L_2^{(1)}\lambda_0^2 + O_1(\lambda_0^3, \lambda_0 v, v^2),\\ 0 &= L_2^{(2)}\lambda_0^2 + O_2(\lambda_0^3, \lambda_0 v, v^2)\end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$(113)\qquad L_2^{(\mu)} = \tfrac{1}{2}\int_0^P f''(x)\,\varphi_0^2(t)\,\varphi_\mu(t)\,dt \qquad (\mu = 1, 2).$$

Genau wie in Kap. 2, § 1 folgt jetzt $v(t) = O(\lambda_0^2)$; bei der Ableitung dieser Beziehung ändert sich nur Gleichung (18) um in die einfachere Beziehung $v(t) \equiv v_0(t)$, wo $v_0(t)$ die frühere Bedeutung hat. Die Gleichungen (112) erhalten mithin die Form

$$(114)\qquad \begin{aligned} \beta B_1 &= L_2^{(1)}\lambda^2 + O_1(\lambda_0^3),\\ 0 &= L_2^{(2)}\lambda_0^2 + O_2(\lambda_0^3).\end{aligned}$$

Da $L_2^{(2)} \neq 0$ ist, ist die letzte Gleichung widersinnig; es kann also in unserem betrachteten Fall keine mit P periodische Lösung geben.

II. Ist nun $L_2^{(2)}$ eine indefinite quadratische Form (Diskriminante > 0), so gibt es, abgesehen vom Vorzeichen, genau zwei voneinander verschiedene normierte Eigenfunktionen $\varphi_{11}(t)$ und $\varphi_{12}(t)$ von (6), die $L_2^{(2)}$ zum Ver-

[11]) Vgl. hierzu auch: R. Iglisch, Zur Theorie der reellen Verzweigungen von Lösungen nichtlinearer Integralgleichungen, Journ. f. d. reine und angew. Math. 164 (1931), S. 151—172.

schwinden bringen. Ich betrachte nur $\varphi_{11}(t)$ weiter, für $\varphi_{12}(t)$ verläuft die Betrachtung analog.

Wir wollen jetzt annehmen, daß der in (113) definierte Ausdruck $L_2^{(1)}$ nicht verschwindet, wenn an Stelle von $\varphi_0(t)$ unser $\varphi_{11}(t)$ eingesetzt wird. Wir nehmen wieder die Existenz einer mit P periodischen Lösung $u(t)$ von (8) an. Machen wir wieder den Ansatz (108), wo λ_1 und λ_2 durch $\lambda_1\varphi_1(0)+\lambda_2\varphi_2(0)=u(0)$ und $\lambda_1\dot\varphi_1(0)+\lambda_2\dot\varphi_2(0)=\dot u(0)$ bestimmt ist, und setzen wir dies $\lambda_1\varphi_1(t)+\lambda_2\varphi_2(t)=\lambda_0\varphi_0(t)$, so folgt genau wie früher $v(t)=O(\lambda_0^2)$, und die zweite Gleichung (112) kann nur erfüllt sein, wenn $\varphi_0(t)=\varphi_{1\nu}(t)$ ist mit $\nu=1$ oder 2. Wir rechnen, wie schon oben bemerkt, jetzt mit $\varphi_0(t)=\varphi_{11}(t)$ weiter. Gilt für das damit nach (113) gebildete $L_{21}^{(1)}$ sign $L_{21}^{(1)}\neq$ sign βB_1, so kann Gleichung (8) keine Lösung der Form $u(t)=\lambda_0\varphi_{11}(t)+O(\lambda_0^2)$ besitzen.

Jetzt der Fall sign $L_{21}^{(1)}=$ sign βB_1. Wir bestimmen dann λ_0 aus der in Hinblick auf die erste Gleichung (114) gebildeten Gleichung

$$\beta B_1 = L_{21}^{(1)}\lambda_0^2. \tag{115}$$

Diese besitzt zwei reelle Wurzeln λ_{01} und λ_{02}, von denen wir nur die erste weiter betrachten wollen; die Behandlung der anderen verläuft analog. Unter Verwendung dieses λ_{01} ist in dem Ansatz $\lambda_1\varphi_1(t)+\lambda_2\varphi_2(t)=\lambda_{01}\varphi_0(t)$ auch die linke Seite völlig bestimmt, die wir jetzt in (108) verwenden. Damit dieses $u(t)$ der Gleichung (8) genügt, muß $v(t)$ mit P periodische Lösung sein von

$$\ddot u + f(x+u) - f(x+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2) \\ + f(x+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2) - f(x) = \beta G(t), \tag{116}$$

d. h. von

$$\ddot v + f'(x+\lambda_{01}\varphi_0)v = \beta G(t) - \tfrac12 f''(\bar{\bar x})\lambda_{01}^2\varphi_0^2 - \tfrac12 f''(\bar x)v^2, \tag{117}$$

wo $f''(\bar{\bar x})$ von $v(t)$ unabhängig ist.

Unter Einführung des reellen von 0 nach 1 laufenden Parameters τ untersuchen wir statt dessen die Gleichungsschar

$$\ddot v_\tau + (1-\tau)f'(x+\lambda_{01}\varphi_0)v_\tau + \tau[f(x+\lambda_{01}\varphi_0+v_\tau) \\ - f(x+\lambda_{01}\varphi_0)] = \beta G(t) - \tfrac12 f''(\bar{\bar x})\lambda_{01}^2\varphi_0^2 \tag{118}$$

auf mit P periodische kleine Lösungen. Für $\tau=1$ geht (118) in (116) über, so daß $v_1(t)\equiv v(t)$ wird. Die zugehörige homogene lineare Gleichung lautet

$$\ddot\psi_\tau + \{f'(x+\lambda_{01}\varphi_0)+\tau f''(x^*)v_\tau\}\psi_\tau = 0. \tag{119}$$

Wir wollen zunächst annehmen, daß $|v_\tau| <$ Const. λ_{01}^2 ist, was sich später herausstellen wird. Sei $\psi_{\tau1}(t)$ und $\psi_{\tau2}(t)$ das durch $\psi_{\tau\nu}(0)=\varphi_\nu(0)$, $\dot\psi_{\tau\nu}(0)=\dot\varphi_\nu(0)$ $(\nu=1,2)$ bestimmte Fundamentalsystem von Lösungen

von (119). Dann wollen wir wieder die Gültigkeit einer Formel (27) (mit λ_{01} statt λ_1) sicherstellen.

Wie in Kap. 2, § 1 folgt sofort, daß $|\psi_{\tau\nu}(t) - \varphi_\nu(t)| \leq \text{Const.}\,|\lambda_{01}|$ gilt. Sei $\psi_\tau(t)$ irgendeine (annähernd) normierte Lösung von (119). Dann sind wir wie früher fertig, wenn wir die Existenz einer positiven Zahl p_1 sicherstellen derart, daß mindestens eine der beiden Zahlen $|\psi_\tau(P) - \psi_\tau(0)|$ oder $|\dot\psi_\tau(P) - \dot\psi_\tau(0)|$ größer ist als $p_1|\lambda_{01}|$. Dazu bilden wir die Lagrangesche Identität aus (119) und (6) und integrieren:

$$\varphi(0)[\dot\psi_\tau(P) - \dot\psi_\tau(0)] - \dot\varphi(0)[\psi_\tau(P) - \psi_\tau(0)] \tag{120}$$
$$= -\lambda_{01}\int_0^P f''(x^{**})\,\psi_\tau(t)\,\varphi_0(t)\,\varphi(t)\,dt + O(\lambda_{01}^2).$$

Nun gilt wieder die Darstellung (30). Es muß also nur noch gezeigt werden, daß mit einer positiven Konstanten p_2

$$\left|\int_0^P f''(x)\,(C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t))\,(a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t))\,\varphi(t)\,dt\right| > p_2 \tag{121}$$

erreicht werden kann mit passender normierter Lösung $\varphi(t)$ von (6); dabei ist $\varphi_0(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t)$ gesetzt worden und C_1 und C_2 sind nur der Bedingung $C_1^2 + C_2^2 \sim 1$ unterworfen. Wählt man $\varphi(t) = \varphi_0(t)$, so wird die linke Seite von (121) gleich $2|C_1|\,|L_{21}^{(1)}| \neq 0$. Wir brauchen also nur noch den Fall eines kleinen $|C_1|$ zu untersuchen. Wir wollen annehmen, daß für jedes $\varphi(t)$ (121) mit dem Kleinerzeichen gilt bei beliebig kleinem p_2. Für $\varphi(t) = \varphi_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2)$ würden sich dann bei kleinem p_2 und kleinem C_1 zwei Gleichungen der folgenden Art ergeben:

$$\begin{aligned} C_2 a_1\int_0^P f''(x)\,\varphi_2\,\varphi_1^2\,dt + C_2 a_2\int_0^P f''(x)\,\varphi_2^2\,\varphi_1\,dt &= \varepsilon_1,\\ C_2 a_1\int_0^P f''(x)\,\varphi_2^2\,\varphi_1\,dt + C_2 a_2\int_0^P f''(x)\,\varphi_2^3\,dt &= \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{122}$$

wo ε_1 und ε_2 mit p_2 und C_1 beliebig klein ausfallen. Da die Determinante dieses Gleichungssystems die (negative) Diskriminante von $L_2^{(2)}$, mithin von Null verschieden ist, müssen auch $C_2 a_1$ und $C_2 a_2$ beide beliebig klein werden; das liefert einen Widerspruch, da sowohl $C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$ als auch $a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t)$ (annähernd) normiert sein sollten. (121) muß also mit endlichem p_2 zu Recht bestehen.

Wir müssen jetzt noch den Beweis dafür nachtragen, daß jede mit P periodische kleine Lösung v_τ von (118) dem Betrage nach kleiner ist als $\text{Const.}\,\lambda_{01}^2$. Dazu schreiben wir (118) in der Form

$$\ddot v_\tau + f'(x + \lambda_{01}\varphi_0)\,v_\tau = \beta G(t) - \frac{1}{2}f''(\bar{x})\,\lambda_{01}^2\,\varphi_0^2 - \frac{\tau}{2}f''(\hat{x})\,v_\tau^2. \tag{123}$$

Indem wir rechts das als bekannt angenommene v_τ einsetzen, können wir (123) als lineare inhomogene Differentialgleichung für v_τ auffassen. Bezeichnet $v_\tau^*(t)$ die durch $v_\tau^*(0) = 0 = \dot v_\tau^*(0)$ bestimmte Lösung von (123), so ist diese und ihre Ableitung gleich $O(\lambda_{01}^2, v_\tau^2)$. Ferner ist

(124) $\qquad v_\tau(t) = v_\tau^*(t) + c_1[\varphi_1(t) + O(\lambda_{01})] + c_2[\varphi_2(t) + O(\lambda_{01})].$

Die Lagrangesche Identität aus (123) und (6) liefert das Bestehen der beiden Gleichungen

$$\lambda_{01}\int_0^P f''(\tilde x)\, v_\tau \varphi_0 \varphi_\nu\, dt = O(\lambda_{01}^3, v_\tau^2) \qquad (\nu = 1, 2), \tag{125}$$

wobei neben (115) beachtet wurde, daß $L_2^{(2)} = 0 = \int_0^P G(t)\varphi_2(t)\,dt$ ist. Trägt man hier (124) ein, so folgt, indem man in (125) $\varphi_\nu = \varphi_0$ einführt, wie im Anschluß an (121), daß $c_1 = O\left(\lambda_{01}c_2, \lambda_{01}^2, \lambda_{01}v_\tau, \frac{v_\tau^2}{\lambda_{01}}\right)$ sein muß. Darauf liefert die an (122) angeschlossene Überlegung $c_2 = O\left(\lambda_{01}^2, \lambda_{01}v_\tau, \frac{v_\tau^2}{\lambda_{01}}\right)$. Es gilt also schließlich

$$v_\tau(t) = O\left(\lambda_{01}^2, \lambda_{01} v_\tau, \frac{v_\tau^2}{\lambda_{01}}\right).$$

Wie im Anschluß an (33) folgt nun endlich $v_\tau(t) = O(\lambda_{01}^2)$.

Damit können wir wie in Kap. 2, § 1 in (118) unsere für $\tau = 0$ bekannte, allein durch λ_{01} bestimmte Lösung $v_0(t)$ mit wachsendem τ bis $\tau = 1$ hin stetig fortsetzen, so daß wir zu einer Lösung von (117) bzw. (116) gelangen. Daß es nicht mehr als eine mit P periodische Lösung von (8) von der Form $u(t) = \lambda_{01}\varphi_0(t) + O(\lambda_{01}^2)$ geben kann, folgt genau wie am Schluß von Kap. 2, § 1.

Wir notieren folgenden durch vorstehende Untersuchungen gedeckten Satz, wobei wir mit $\varphi_{1\nu}(t)$ $(\nu = 1, 2)$ die beiden normierten Eigenfunktionen von (6) bezeichnen, die $L_2^{(2)}$ zum Verschwinden bringen, und mit $L_{2\nu}^{(1)}$ die nach (113) zu bildenden Größen $L_2^{(1)}$, wenn man $\varphi_0(t) = \varphi_{1\nu}(t)$ einträgt: *Sind $L_{21}^{(1)}$ und $L_{22}^{(1)}$ von Null verschieden, so gibt es im Falle* sign $L_{21}^{(1)}$ = sign $L_{22}^{(1)} = -$ sign βB *keine reelle mit P periodische Lösung von* (8), *bei* sign $L_{21}^{(1)}$ = sign $L_{22}^{(1)}$ = sign βB *vier Lösungen, bei* sign $L_{21}^{(1)} \neq$ sign $L_{22}^{(1)}$ *zwei Lösungen.*

III. Was geschieht nun in dem Fall, daß etwa die unter II mit $L_{21}^{(1)}$ bezeichnete Größe verschwindet, während die Form $L_2^{(2)}$ wieder als indefinit vorausgesetzt wird? Wegen $L_{21}^{(1)} = 0$ ist $f''(x)\varphi_0^2(t)$ zu $\varphi_1(t)$ orthogonal; da aber $\varphi_0(t)$ so gewählt ist, daß $L_2^{(2)} = 0$ (vgl. (113)) ist, ist diese Funktion auch zu $\varphi_2(t)$ orthogonal. Wir können also das Randwertproblem

$$\ddot w_1 + f'(x) w_1 = -\tfrac{1}{2} f''(x)\varphi_0^2(t), \quad w_1(0) = w_1(P), \quad \dot w_1(0) = \dot w_1(P)$$

lösen; $w_1(t)$ sei normierte Lösung davon; $w_1(t)$ ist dann nur bis auf eine Eigenfunktion von (6) bestimmt, enthält also einen Parameter. Dann machen wir statt (108) analog (35) den Ansatz

$$u(t) = \lambda_0 \varphi_0(t) + \lambda_0^2 w_1(t) + v(t), \tag{126}$$

gehen in den Gleichungen (112) bis zu den Gliedern dritter Ordnung in λ_0 und haben nun analoge Untersuchungen mit (inhomogenen) Formen dritten statt zweiten Grades durchzuführen. Da die allgemeine Untersuchung hier zu weitschweifig wird, soll dies nicht weiter durchgeführt werden. In einem konkret vorliegenden Fall wird man natürlich stets die Entscheidung über die Lösungsanzahlen treffen können, wobei man aber eventuell noch höhere Potenzen von λ_0 berücksichtigen muß.

IV. Wenn wir uns in der Diskussion auf Glieder zweiter Ordnung in λ_0 beschränken wollen, bleibt zunächst noch der Fall, daß die Diskriminante von $L_2^{(2)}$ verschwindet, ohne daß diese Form identisch Null ist. Dann gibt es, abgesehen vom Vorzeichen, genau eine normierte Eigenfunktion $\varphi_0(t)$ von (6), die $L_2^{(2)}$ zum Verschwinden bringt. Ist die zugehörige Größe $L_2^{(1)}$ gleich Null, so hat man wie unter III zu Gliedern dritter Ordnung in λ_0 aufzusteigen. Bleibt also nur noch der Fall $L_2^{(1)} \neq 0$ zu erledigen. Ist $\operatorname{sign} L_2^{(1)} \neq \operatorname{sign} \beta B_1$, so gibt es wie unter II keine mit P periodische kleine Lösung $u(t)$ von (8). Bleibt also noch der Fall $\operatorname{sign} L_2^{(1)} = \operatorname{sign} \beta B_1$. In diesem Falle bestimmen wir λ_0 aus der analog (115) zu bildenden Gleichung

$$\beta B_1 = \lambda_0^2 L_2^{(1)}. \tag{127}$$

Diese besitzt zwei Wurzeln λ_{01} und $\lambda_{02} = -\lambda_{01}$. Wieder machen wir zunächst den Ansatz

$$u_\nu(t) = \lambda_{0\nu} \varphi_0(t) + v_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2), \tag{128}$$

wo wie früher $v_\nu(t) = O(\lambda_{0\nu}^2)$ ausfällt. Jetzt bestimmen wir $w_1(t)$ als mit P periodische normierte Lösung von

$$\ddot{w}_1 + f'(x) w_1 = \frac{L_2^{(1)}}{B_1} G(t) - \frac{1}{2} f''(x) \varphi_0^2(t); \tag{129}$$

$w_1(t)$ ist wieder nur bis auf eine Eigenfunktion von (6) bestimmt, enthält also einen Parameter. Nun machen wir statt (128) den zu (126) analogen Ansatz

$$u_\nu(t) = \lambda_{0\nu} \varphi_0(t) + \lambda_{0\nu}^2 w_1(t) + v_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2) \tag{130}$$

und haben genau wie in III zu den Gliedern dritter Ordnung aufzusteigen, was hier nicht weiter durchgeführt sei.

V. Verschwindet endlich $L_2^{(2)}$ identisch, so reduziert sich

$$L_2^{(1)} = \tfrac{1}{2} \int_0^P f''(x) \varphi_1^2(t)\, dt. \tag{131}$$

Verschwindet auch diese Größe, so hat man wie unter III die Glieder dritter Ordnung heranzuziehen. Ist der Ausdruck (131) nicht Null, so hat man zunächst wieder Gleichung (127) zu lösen. Im Falle sign $L_4^{(1)} \neq$ sign βB_1 ist dies nicht möglich; es gibt also keine mit P periodischen Lösungen von (8). Im anderen Fall seien die beiden nur durchs Vorzeichen unterschiedenen Lösungen von (127) wieder mit $\lambda_{0\nu}$ $(\nu = 1, 2)$ bezeichnet. Man mache analog (130) den Ansatz

$$u_\nu(t) = \lambda_{0\nu}\,\varphi(t,\tau) + \lambda_{0\nu}^2\,w_1(t,\tau,\sigma) + v_\nu(t). \tag{132}$$

Dabei bedeutet $\varphi(t,\tau)$ irgendeine normierte Eigenlösung von (6), die also einen willkürlichen Parameter τ enthält; $w_1(t,\tau,\sigma)$ ist dann periodische normierte Lösung von (129), wenn man darin auf der rechten Seite $\varphi_0(t)$ durch $\varphi(t,\tau)$ ersetzt; sie enthält einen neuen Parameter σ. Mit dem Ansatz (132) hat man jetzt bis zu den Gliedern dritter Ordnung in den Gleichungen (112) aufzusteigen.

4. Kapitel.

Schwingungen mit Geschwindigkeitsdämpfung.

Wir betrachten in diesem Kapitel noch kurz die allgemeinere Gleichung (5). Sei also $x(t)$ mit P periodische Lösung von

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = g(t). \tag{133}$$

Dann suchen wir mit P periodische zu $x(t)$ benachbarte Lösungen $y(t)$ von (5). Die zu (133) gehörende homogene lineare Differentialgleichung lautet jetzt mit den Abkürzungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \dot{x}) = a(t), \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) = b(t) \tag{134}$$

$$\ddot{\varphi} + a(t)\,\varphi + b(t)\,\dot{\varphi} = 0. \tag{135}$$

I. Wir wollen einige vorbereitende Betrachtungen voranschicken über die Gleichung

$$\ddot{z} + a(t)\,z + b(t)\,\dot{z} = F(t), \tag{136}$$

wo $F(t)$ mit P periodisch sein möge. Wie üblich folgt auch hier, daß (136) eine eindeutig bestimmte mit P periodische Lösung $z(t)$ besitzt, falls (135) keine nicht identisch verschwindende mit P periodische Lösung $\varphi(t)$ aufweist. Bleibt also noch der Fall zu erledigen, daß (135) eine oder zwei linear unabhängige mit P periodische Lösungen $\varphi_1(t)$, bzw. $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ besitzt. Wir wollen zeigen[12]): (136) hat dann und nur dann eine (bis auf eine additive Eigenfunktion bestimmte) mit P periodische Lösung, wenn

$$\int_0^P p\,\varphi F\,dt = 0 \tag{137}$$

[12]) Vgl. auch § 3 der in Anmerkung [7]) genannten Arbeit.

ist, wobei $\varphi(t)$ eine gleich noch anzugebende Eigenfunktion von (135) ist und

$$p(t) = e^{\int\limits_0^t b(t)\,dt} \tag{138}$$

Sind $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ unabhängige mit P periodische Lösungen von (135), so muß (137) für $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$ gelten. Ist nur $\varphi_1(t)$ mit P periodisch, so hat man zu setzen

$$\begin{aligned}\varphi(t) = \text{Const.}\,\{&\varphi_2(t)[\dot\varphi_1(P)(\varphi_2(P) - \varphi_2(0)) - \varphi_1(P)(\dot\varphi_2(P) - \dot\varphi_2(0))] \\ &- \varphi_1(t)[\dot\varphi_2(P)(\varphi_2(P) - \varphi_2(0)) - \varphi_2(P)(\dot\varphi_2(P) - \dot\varphi_2(0))]\}.\end{aligned} \tag{139}$$

Beide eckigen Klammern können offenbar nicht zugleich verschwinden.

Sei etwa $z_0(t)$ die durch $z_0(0) = 0 = \dot z_0(0)$ bestimmte Lösung von (136). Dann gilt

$$z(t) = z_0(t) + C_1\,\varphi_1(t) + C_2\,\varphi_2(t), \tag{140}$$

wenn unter $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von (135) verstanden wird. Erfüllung der Periodizitätsbedingungen bedeutet

$$\begin{aligned} C_1[\varphi_1(P) - \varphi_1(0)] + C_2[\varphi_2(P) - \varphi_2(0)] &= -z_0(P), \\ C_1[\dot\varphi_1(P) - \dot\varphi_1(0)] + C_2[\dot\varphi_2(P) - \dot\varphi_2(0)] &= -\dot z_0(P). \end{aligned} \tag{141}$$

Diese Gleichungen für C_1 und C_2 sind dann und nur dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der durch die Spalte der rechten Seite erweiterten Matrix ist.

Wir bilden zu dieser Untersuchung die Lagrangesche Identität aus (136) mit $z(t) = z_0(t)$ und (135), multiplizieren sie mit $p(t)$ und integrieren von 0 bis P:

$$\int\limits_0^P p(\ddot z_0\,\varphi - \ddot\varphi\,z_0)\,dt + \int\limits_0^P p\,b(\dot z_0\,\varphi - z_0\,\dot\varphi)\,dt = \int\limits_0^P pF\,\varphi\,dt.$$

Wendet man auf das erste Glied Produktintegration an und beachtet die aus (138) folgende Beziehung

$$\dot p - b\,p = 0,$$

so erscheint

$$p(\dot z_0\,\varphi - \dot\varphi\,z_0)\Big|_0^P = \int\limits_0^P pF\,\varphi\,dt$$

oder schließlich

$$[\dot z_0(P)\,\varphi_\nu(P) - \dot\varphi_\nu(P)\,z_0(P)] = \frac{1}{p(P)}\int\limits_0^P pF\,\varphi_\nu\,dt \equiv A_\nu \quad (\nu = 1, 2). \tag{142}$$

Sind nun $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ mit P periodisch, so ist zur Lösbarkeit von (141) hinreichend und notwendig, daß $z_0(P) = 0 = \dot z_0(P)$ ausfällt. Da $D = -\varphi_1(P)\,\dot\varphi_2(P) + \varphi_2(P)\,\dot\varphi_1(P) \neq 0$ die Koeffizientendeterminante

des Gleichungssystems (142) ist, ist dies aber gerade mit der Gültigkeit von (137) für $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$ gleichbedeutend.

Ist nur $\varphi_1(t)$ mit P periodisch, nicht aber $\varphi_2(t)$, so ist die hinreichende und notwendige Bedingung zur Lösbarkeit von (141)

$$\begin{vmatrix} \varphi_2(P) - \varphi_2(0) & z_0(P) \\ \dot\varphi_2(P) - \dot\varphi_2(0) & \dot z_0(P) \end{vmatrix} = 0. \tag{143}$$

Aus (142) folgt aber

$$z_0(P) = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A_1 & \varphi_1(P) \\ A_2 & \varphi_2(P) \end{vmatrix}, \quad \dot z_0(P) = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A_1 & \dot\varphi_1(P) \\ A_2 & \dot\varphi_2(P) \end{vmatrix}.$$

Die linker Hand in (143) angeschriebene Determinante wird also bis auf den Faktor $-\frac{1}{D}$

$$\begin{vmatrix} \varphi_2(P) - \varphi_2(0) & A_1\varphi_2(P) - A_2\varphi_1(P) \\ \dot\varphi_2(P) - \dot\varphi_2(0) & A_1\dot\varphi_2(P) - A_2\dot\varphi_1(P) \end{vmatrix}.$$

Dies verschwindet für

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\dot\varphi_1(P)[\varphi_2(P) - \varphi_2(0)] - \varphi_1(P)[\dot\varphi_2(P) - \dot\varphi_2(0)]}{\dot\varphi_2(P)[\varphi_2(P) - \varphi_2(0)] - \varphi_2(P)[\dot\varphi_2(P) - \dot\varphi_2(0)]}.$$

Das bedeutet aber gerade das Erfülltsein von (137) mit $\varphi(t)$ aus (139).

II. Im Nichtresonanzfall, wenn also (135) keine mit P periodische Lösung besitzt, folgt Existenz und Eindeutigkeit einer mit P periodischen, zu $x(t)$ benachbarten Lösung $y(t)$ von (5) in gleicher Weise, wie dies früher im 1. Kap. geschah.

III. Besitzt (135) genau eine (bis aufs Vorzeichen bestimmte) normierte mit P periodische Lösung, so übertragen sich die Ausführungen des 2. Kap. mit wenigen kleinen Abänderungen. An Stelle von (11) sei der Ausdruck

$$\int_0^P G(t)\,p(t)\,\varphi(t)\,dt = B \neq 0, \tag{144}$$

wo $\varphi(t)$ die in (139) bestimmte Lösung von (135) sei. Macht man wieder den Ansatz (7), so tritt an die Stelle von (8)

$$\ddot u + f(x + u, \dot x + \dot u) - f(x, \dot x) = \beta G(t) \tag{145}$$

oder

$$\begin{aligned}\ddot u + a u + b \dot u \\ = \beta G(t) - \tfrac{1}{2}[f_{xx}(\bar x, \bar{\dot x})u^2 + 2 f_{x\dot x}(\bar x, \bar{\dot x})u\dot u + f_{\dot x\dot x}(\bar x, \bar{\dot x})\dot u^2].\end{aligned} \tag{146}$$

Definiert man

$$\begin{aligned}L_2 = \tfrac{1}{2}\int_0^P [f_{xx}(x, \dot x)\varphi_1^2 + 2 f_{x\dot x}(x, \dot x)\varphi_1\dot\varphi_1 \\ + f_{\dot x\dot x}(x, \dot x)\dot\varphi_1^2]\,p(t)\,\varphi(t)\,dt\end{aligned} \tag{147}$$

und ist $L_2 \neq 0$, so gelangt man genau wie früher mit dem Ansatz (14), (15) zu der notwendigen Bedingung (19) für das Bestehen einer kleinen mit P periodischen Lösung $u(t)$ von (145), falls etwa für $f(y, \dot{y}) - f(x, \dot{x})$ die Taylorentwicklung mit dem dritten Glied als Restglied möglich ist. Auch der an Gleichung (20) anknüpfende Existenzbeweis verläuft genau wie in Kap. 2, § 1; man muß nur immer darauf achten, daß bei Bildung der Lagrangeschen Identität das schon vorhin erwähnte $\varphi(t)$ als Lösung von (135) herangezogen wird und daß man vor der Integration mit $p(t)$ zu multiplizieren hat. So übertragen sich alle Überlegungen und Ergebnisse von Kap. 2, § 1. — In gleicher Weise verhält es sich nun mit den übrigen Paragraphen des zweiten Kapitels. Ist z. B. die in (147) definierte Größe L_2 gleich Null, so ist die analog (34) aufgestellte Gleichung

$$\text{(148)} \quad \ddot{w}_1 + a w_1 + b \dot{w}_1 = -\tfrac{1}{2}[f_{xx}(x, \dot{x})\, \varphi_1^2 + 2 f_{x\dot{x}}(x, \dot{x})\, \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + f_{\dot{x}\dot{x}}(x, \dot{x})\, \dot{\varphi}_1^2]$$

lösbar durch eine mit P periodische Funktion $w_1(t)$; man macht den Ansatz (35) und gelangt unter Heranziehung der Glieder dritter Ordnung in der Taylorentwicklung von $f(y, \dot{y}) - f(x, \dot{x})$ zu einer Größe L_3 usw.

IV. Die Überlegungen des dritten Kapitels ändern sich prinzipiell überhaupt nicht; nur muß man die Lagrangesche Identität vor der Integration stets mit $p(t)$ multiplizieren. Ausschlaggebend sind wieder quadratische Formen (oder solche höherer Ordnung) wie die Form (110), in denen nur in die Koeffizienten außer φ_1 und φ_2 noch $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2$ eingehen.

(Eingegangen am 21. 10. 1936.)

Über Kreise und Kugeln im Riemannschen Raum.

Von

Ernst Tschech in Graz (Österreich).

Auf die von W. Blaschke aufgeworfene Frage: „Wie muß ein Raum mit Riemannscher Maßbestimmung beschaffen sein, damit sich in ihm sämtliche Raumkurven mit konstanter Krümmung und verschwindender Windung, kurz die ‚Krümmungskreise' schließen?" fand B. Baule [1]) als notwendige Bedingung zunächst das identische Verschwinden der kovarianten Ableitung des Riemannschen Krümmungstensors. Daraus wiederum ließ sich ersehen, daß zwei Möglichkeiten existieren. Entweder der Raum ist in einer Richtung eben, senkrecht dazu aber konstant gekrümmt, er hat also zylindrische Struktur, oder es liegt ein Raum konstanter Krümmung vor, seine Geometrie ist euklidisch oder nichteuklidisch.

Im folgenden soll nun bewiesen werden, daß der zweite Fall eintritt, daß der Raum mit Riemannscher Maßbestimmung, in dem die Krümmungskreise sämtlich geschlossen sind, notwendig ein Raum konstanter Krümmung sein muß.

In einem Riemannschen Raum, dessen Metrik durch eine positiv-definite quadratische Differentialform

$$ds^2 = \Sigma g_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

festgelegt ist, sind die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ und die Windung $\frac{1}{\tau}$ einer Raumkurve

$$x_i = x_i(s)$$

vermittels der Formeln zu berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{\sqrt{D_2}}{D_1}, \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{\sqrt{D_1 D_3}}{D_2}. \end{aligned} \tag{2}$$ [2])

D_1, D_2 und D_3 bedeuten die ein-, zwei- und dreireihige Determinante links oben in der Matrix

$$D \equiv \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

---

[1]) B. Baule, Über Kreise und Kugeln im Riemannschen Raum II, Math. Annalen 84, S. 202.

[2]) W. Blaschke, Frenets Formeln für den Raum von Riemann. Math. Zeitschr. 6.

Darin ist mit (r, s) das skalare Produkt der Vektoren $\xi(r)$ und $\xi(s)$ bezeichnet, also

$$(r, s) = \Sigma g_{ik} \xi^i_{(r)} \xi^k_{(s)}.$$

$\xi(r)$ und $\xi(s)$ sind Vektoren, die durch $(r-1)$- bzw. $(s-1)$-malige kovariante Ableitung aus dem Tangentenvektor

$$\xi^i_{(1)} = \frac{d x_i}{d s} \tag{4}$$

entstehen. Es ist also

$$\left\{\begin{aligned} \xi^i_{(2)} &= \frac{d \xi^i_{(1)}}{d s} + \sum_{r, s} \Gamma^i_{rs} \xi^r_{(1)} \xi^s_{(1)}, \\ \xi^i_{(3)} &= \frac{d \xi^i_{(2)}}{d s} + \sum_{r, s} \Gamma^i_{rs} \xi^r_{(2)} \xi^s_{(1)}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Die Größen Γ sind die „Christoffelschen Dreiindizessymbole":

$$\Gamma^i_{rs} = \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix}.$$

Zur Beantwortung der eingangs gestellten Frage sollen einerseits Riemannsche Normalkoordinaten, andererseits geodätische Polarkoordinaten verwendet werden.

Das Quadrat des Bogenelementes

$$d s^2 = \Sigma g_{ik} d x_i d x_k$$

läßt sich immer so transformieren, daß es für irgendeinen, ins Auge gefaßten Punkt O des Raumes die Form hat

$$d s^2 = \Sigma d x_i^2.$$

Dann ist in einem solchen Punkt O ein orthogonales Dreibein (bzw. n-Bein) festgelegt. Jeder Punkt P des Raumes wird nun in bezug auf dieses orthogonale Dreibein durch seine geodätische Entfernung r von O und durch die Richtung der durch O und P gehenden geodätischen Linie bestimmt. Die Riemannschen Normalkoordinaten y_i, sind dann

$$y_i = r \left(\frac{d x_i}{d s}\right)_0,$$

worin $\left(\frac{d x_i}{d s}\right)_0$ die Richtungskosinus im Punkte 0 bedeuten. Bei Zugrundelegung dieser Riemannschen Normalkoordinaten hat das Quadrat des Bogenelementes die Gestalt:

$$d s^2 = \Sigma d y_i^2 + \Sigma \Sigma \mathfrak{P}_{ik, rs}\, p_{ik}\, p_{rs}.\text{[3]} \tag{6}$$

Darin sind die

$$p_{ik} = y_i\, d y_k - y_k\, d y_i$$

[3]) H. Vermeil, Math. Annalen 79.

und die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ Potenzreihen in den y_i,

$$\mathfrak{P}_{ik,rs} = \alpha_{ik,rs} + \beta^{(1)}_{ik,rs}\, y_1 + \beta^{(2)}_{ik,rs}\, y_2 + \beta^{(3)}_{ik,rs}\, y_3 + \cdots.$$

Die $\alpha_{ik,rs}$ stellen in ihrer Gesamtheit den Riemannschen Krümmungstensor im Nullpunkt dar und die $\beta^{(t)}_{ik,rs}$ sind die Ableitungen der Tensorkomponenten nach y_t im Nullpunkt. Die höheren Koeffizienten setzen sich auch aus den Komponenten des Krümmungstensors und deren Ableitungen im Nullpunkt zusammen[4]).

Durch einmaliges Verjüngen des Krümmungstensors entsteht ein Tensor zweiter Stufe R_{ik}, der den Namen „Richtungsinvariante der Krümmung" führt, als arithmetisches Mittel der Gaußschen Krümmungen der $n-1$ zueinander orthogonalen geodätischen Flächen, die die betreffende Richtung enthalten. Die Richtungsinvariante der Krümmung läßt sich durch eine Fläche 2. Ordnung

$$R_{ik}\, \eta_i\, \eta_k = 1$$

veranschaulichen.

$$R_{ik} = \sum_r \alpha_{ir,kr}.$$

Durch nochmaliges Verjüngen erhält man daraus die skalare Krümmung $\sum \alpha_{ik,ik}$.

Unter einem dreidimensionalen Raum konstanter Krümmung versteht man eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, in der sich die skalare Krümmung von Ort zu Ort nicht ändert und überdies die Richtungsinvariante der Krümmung einen von der Richtung unabhängigen Wert besitzt oder, was das gleiche bedeutet, in der in jedem Punkt des Raumes der Krümmungstensor durch eine Kugel veranschaulicht wird. In diesem Falle sind alle $\alpha_{ik,rs} = 0$ $(ik \neq rs)$ und alle $\alpha_{ik,ik}$ einander gleich. Aus der ersten Eigenschaft folgt, wie Schur[5]) bewiesen hat, die zweite. Hat in jedem Punkt des Raumes die Richtungsinvariante einen von der Richtung unabhängigen Wert, so ändert sich auch die skalare Krümmung von Ort zu Ort nicht.

Transformiert man nun das Bogenelement der Riemannschen Normalkoordinaten (6) mit Hilfe der Transformationsformeln

$$\begin{aligned} y_1 &= r\cos\varphi, \\ y_2 &= r\sin\varphi\cos\psi, \\ y_3 &= r\sin\varphi\sin\psi \end{aligned}$$

auf geodätische Kugelkoordinaten, so erhält es die Form

$$ds^2 = dr^2 + G_{11}\,d\varphi^2 + G_{22}\,d\psi^2 + 2G_{12}\,d\varphi\,d\psi, \tag{7}$$ [6])

[4]) H. Vermeil, Math. Annalen 79, S. 289.

[5]) F. Schur, Math. Annalen 27, S. 563.

[6]) Baule, Über Kreise und Kugeln im Riemannschen Raum I, Math. Annalen 83, S. 298.

worin

$$G_{11} = r^2(1 + A_{11} r^2 + B_{11} r^3 + \ldots)$$
$$G_{22} = \sin^2\varphi\, r^2 (1 + A_{22} r^2 + B_{22} r^3 + \ldots)$$
$$G_{12} = \sin\varphi\, r^4 (A_{12} + B_{12} r + \ldots)$$

ist. Darin bedeutet

$$A_{11} = \alpha_{12,12}\cos^2\psi + \alpha_{31,31}\sin^2\psi - 2\alpha_{12,31}\sin\psi\cos\psi,$$
$$A_{22} = \alpha_{12,12}\cos^2\varphi\sin^2\psi + \alpha_{31,31}\cos^2\varphi\cos^2\psi + \alpha_{23,23}\sin^2\varphi$$
$$- 2\alpha_{23,31}\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi - 2\alpha_{23,12}\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi$$
$$+ 2\alpha_{12,31}\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi,$$
$$A_{12} = 2\cos\varphi\sin\psi\cos\psi(\alpha_{31,31} - \alpha_{12,12}) + \alpha_{12,31}\cos\varphi(\sin^2\psi - \cos^2\psi)$$
$$- \alpha_{23,31}\sin\varphi\sin\psi + \alpha_{23,12}\sin\varphi\cos\psi.$$

Die B_{ik} sind aus den A_{ik} entstanden zu denken, indem in den A_{ik} die $\alpha_{ik,rs}$ durch

$$\beta^{(1)}_{ik,rs}\cos\varphi + \beta^{(2)}_{ik,rs}\sin\varphi\cos\psi + \beta^{(3)}_{ik,rs}\sin\varphi\sin\psi$$

ersetzt werden. Entsprechend die höheren Koeffizienten der G_{ik}.

Da, wie Baule gezeigt hat, das Verschwinden der kovarianten Ableitung des Riemannschen Krümmungstensors für die Geschlossenheit der Krümmungskreise notwendig ist, also alle $\beta^{(i)}_{ik,rs}$ gleich Null sein müssen, werden auch die $B_{ik} = 0$ und können somit im folgenden fortgelassen werden.

Das Quadrat des Bogenelements wurde früher wie folgt angesetzt

$$ds^2 = \Sigma g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

In unserem Falle ist

$$x_1 = r, \qquad x_2 = \varphi, \qquad x_3 = \psi$$

und

$$\|G_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2(1 + A_{11} r^2 + \ldots) & \sin\varphi\, r^4 (A_{12} + \ldots) \\ 0 & \sin\varphi\, r^4 (A_{12} + \ldots) & \sin^2\varphi\, r^2 (1 + A_{22} r^2 + \ldots) \end{Vmatrix}.$$

Die Krümmungskreise, also die Raumkurven mit konstanter Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ und verschwindender Windung $\frac{1}{\tau}$ sollen in der nun folgenden Rechnung in der Form

$$(8) \qquad \begin{aligned} r &= r(\psi), \\ \varphi &= \varphi(\psi) \end{aligned}$$

dargestellt werden. Die beiden Funktionen von ψ müssen dann den beiden Differentialgleichungen

$$(9) \qquad \frac{1}{\varrho} = \text{konst.}, \quad \frac{1}{\tau} = 0$$

genügen, wobei man statt s den Parameter ψ einzuführen hat.

Jede Schar von Krümmungskreisen endet, da ja im Unendlich-Kleinen jeder Riemannsche Raum euklidisch ist, bei Unendlich-Kleinwerden

ihres Parameters ϱ in einer Schar von Entfernungskreisen. Es existiert somit eine Schar von Krümmungskreisen, die die unendlichkleinen Kreise um den Nullpunkt der Fläche $\cos\varphi = 0$ enthält. Diese Schar wollen wir aus der Schar sämtlicher Lösungen der Differentialgleichungen

$$\frac{1}{\varrho} = \text{konst.}, \quad \frac{1}{\tau} = 0$$

herausgreifen. Sie hat die Gleichungen

$$(10) \qquad \begin{cases} r = \varrho\,(1 + a(\psi)\,\varrho^2 + b(\psi)\,\varrho^3 + \ldots), \\ \cos\varphi = \varrho^2\,(\alpha(\psi) + \beta(\psi)\,\varrho + \ldots), \end{cases}$$

wobei die Tatsache berücksichtigt ist, daß die Geometrie des Raumes im Unendlichkleinen nicht nur in erster, sondern auch in zweiter Näherung euklidisch ist[7]).

$a(\psi)$, $b(\psi)$, ..., $\alpha(\psi)$, $\beta(\psi)$, ... sind unbekannte Funktionen von ψ, die nun bestimmt werden sollen, damit man feststellen kann, wie der Raum beschaffen sein muß, damit sie alle periodisch mit der Periode 2π sind.

Mit dem Ansatz (10) werden wir nun in die Differentialgleichungen

$$\frac{1}{\varrho} = \text{konst. und } \frac{1}{\tau} = 0$$

hineingehen. Sie werden dann zu Identitäten, die eine Koeffizientenvergleichung zulassen. Wir bekommen auf diese Art und Weise für die Funktionen $a(\psi)$, $b(\psi)$, ... $\alpha(\psi)$, $\beta(\psi)$, ... Differentialgleichungen, die periodische Lösungen haben müssen, damit von einer Geschlossenheit der Krümmungskreise gesprochen werden kann.

Um die Differentialgleichungen

$$\frac{1}{\varrho} = \text{konst. und } \frac{1}{\tau} = 0$$

aufstellen zu können, hat man sich zunächst die Christoffelschen Symbole Γ^i_{rs} auszurechnen. Es ist

$$\Gamma^i_{rs} = \Sigma\, g^{ik}\, \Gamma_{rs,k}$$

und

$$\Gamma_{rs,k} = \begin{bmatrix} r\,s \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_k}\right),$$

falls das Quadrat des Bogenelements geschrieben wird

$$d\,s^2 = \Sigma\, g_{ik}\, d\,x_i\, d\,x_k.$$

In unserem Falle ist

$$d\,s^2 = d\,r^2 + r^2\,(1 + A_{11}\,r^2 + \ldots)\,d\,\varphi^2 + \sin^2\varphi\, r^2\,(1 + A_{22}\,r^2 + \ldots)\,d\,\psi^2 \\ + 2\sin\varphi\, r^4\,(A_{12} + \ldots)\,d\,\varphi\, d\,\psi,$$

---

[7]) Vgl. Baule, a. a. O. [6]), S. 291.

daher, wie schon früher erwähnt,

$$x_1 = r, \qquad x_2 = \varphi, \qquad x_3 = \psi$$

und es berechnet sich

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11,1} &= 0,\\
\Gamma_{11,2} &= 0,\\
\Gamma_{11,3} &= 0,\\
\Gamma_{22,1} &= -\Gamma_{12,2} = -r - 2r^3(\alpha_{12,12}\cos^2\psi + \alpha_{31,31}\sin^2\psi\\
&\quad - 2\alpha_{12,31}\sin\psi\cos\psi) + \ldots,\\
\Gamma_{22,2} &= r^5(\ldots),\\
\Gamma_{22,3} &= r^4\{2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sin\psi\cos\psi(\alpha_{31,31} - \alpha_{12,12}) + \alpha_{12,31}(\cos^2\varphi\\
&\quad - \sin^2\varphi)\cdot(\sin^2\psi - \cos^2\psi) - 2\alpha_{23,31}\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\} + \ldots,\\
\Gamma_{33,1} &= -\Gamma_{13,3} = -r\sin^2\varphi - 2r^3\sin^2\varphi\{\alpha_{12,12}\cos^2\varphi\sin^2\psi\\
&\quad + \alpha_{31,31}\cos^2\varphi\cos^2\psi + \alpha_{23,23}\sin^2\varphi - 2\alpha_{23,31}\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi\\
&\quad - 2\alpha_{23,12}\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi + 2\alpha_{12,31}\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi\} + \ldots,\\
\Gamma_{33,2} &= -r^2\sin\varphi\cos\varphi + r^4(2\sin\varphi\cos\varphi(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\alpha_{31,31} - \alpha_{12,12})\\
&\quad + 4\alpha_{12,31}\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi - \alpha_{23,31}\sin^2\varphi\cos\psi\\
&\quad - \alpha_{23,12}\sin^2\varphi\sin\psi - \alpha_{12,12}\sin^2\psi(\sin\varphi\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin^3\varphi)\\
&\quad - \alpha_{31,31}\cos^2\psi(\sin\varphi\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin^3\varphi) - 2\alpha_{23,23}\sin^3\varphi\cos\varphi\\
&\quad + \alpha_{23,31}(3\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \sin^4\varphi)\cos\psi + \ldots,\\
\Gamma_{33,3} &= r^4\{\alpha_{12,12}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi - \alpha_{31,31}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi\\
&\quad + \alpha_{23,31}\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\psi - \alpha_{23,12}\sin^3\varphi\cos\varphi\cos\psi\\
&\quad + \alpha_{12,31}\sin^2\varphi\cos^2\varphi(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\} + \ldots,\\
\Gamma_{12,1} &= 0,\\
\Gamma_{12,3} &= \Gamma_{13,2} = -\Gamma_{23,1} = 2r^3\{2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi(\alpha_{31,31} - \alpha_{12,12})\\
&\quad + \alpha_{12,31}\sin\varphi\cos\varphi(\sin^2\psi - \cos^2\psi) - \alpha_{23,31}\sin^2\varphi\sin\psi\\
&\quad + \alpha_{23,12}\sin^2\varphi\cos\psi\} + \ldots,\\
\Gamma_{13,1} &= 0,\\
\Gamma_{23,2} &= r^4\{-\alpha_{12,12}\cos\psi\sin\psi + \alpha_{31,31}\sin\psi\cos\psi\\
&\quad - \alpha_{12,31}(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\} + \ldots,\\
\Gamma_{23,3} &= r_2\sin\varphi\cos\varphi + r^4\{\alpha_{12,12}\sin^2\psi(\sin\varphi\cos^3\varphi - \sin^3\varphi\cos\varphi)\\
&\quad + \alpha_{31,31}(\sin\varphi\cos^3\varphi - \sin^3\varphi\cos\varphi)\cos^2\psi + 2\sin^3\varphi\cos\varphi\,\alpha_{23,23}\\
&\quad - (3\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \sin^4\varphi)\alpha_{23,31}\cos\psi\\
&\quad - \alpha_{23,12}(3\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \sin^4\varphi)\sin\psi\\
&\quad + 2\alpha_{12,31}\sin\psi\cos\psi(\sin\varphi\cos^3\varphi - \sin^3\varphi\cos\varphi)\} + \ldots.
\end{aligned}$$

Nach (10) wird

$$\begin{aligned}
r^2 &= \varrho^2 + 2\alpha\varrho^4 + 2\beta\varrho^5 + \ldots,\\
r^3 &= \varrho^3 + 3\alpha\varrho^5 + \ldots,\\
r^4 &= \varrho^4 + 4\alpha\varrho^6 + \ldots,\\
\cos^2\varphi &= \alpha^2\varrho^4 + 2\alpha\beta\varrho^5 + \ldots,\\
\sin^2\varphi &= 1 - \alpha^2\varrho^4 - 2\alpha\beta\varrho^5 + \ldots,\\
\sin\varphi &= 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\varrho^4 - \alpha\beta\varrho^5 - \ldots,
\end{aligned}$$

und mithin

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{11,1} = 0,\\
&\Gamma_{11,2} = 0,\\
&\Gamma_{11,3} = 0,\\
&\Gamma_{22,1} = -\Gamma_{12,2} = -\varrho\,\{1 + \varrho^2(\ldots) + \ldots\},\\
&\Gamma_{22,2} = \varrho^5(\ldots),\\
&\Gamma_{22,3} = \varrho^4(\ldots),\\
&\Gamma_{33,1} = -\Gamma_{13,3} = -\varrho\,\{1 + \varrho^2(a + 2\,a_{23,23}) + b\,\varrho^3 + \ldots\},\\
&\Gamma_{33,2} = \varrho^4\,\{-(\alpha + 2\,\alpha_{23,31}\cos\psi + 2\,\alpha_{23,12}\sin\psi) - \beta\,\varrho + \ldots\},\\
&\Gamma_{33,3} = \varrho^4(\ldots),\\
&\Gamma_{12,1} = 0,\\
&\Gamma_{12,3} = \Gamma_{13,2} = -\Gamma_{23,1} = \varrho^3(\ldots),\\
&\Gamma_{13,1} = 0,\\
&\Gamma_{23,2} = \varrho^4(\ldots),\\
&\Gamma_{23,3} = \varrho^4(\ldots).
\end{aligned}$$

Um daraus die

$$\Gamma^i_{rs} = \Sigma\, g^{ik}\, \Gamma_{rs,k}$$

rechnen zu können, hat man sich zuerst die Matrix der g^{ik} anzuschreiben:

$$\| g^{ik} \| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2}(1 - r^2 A_{11} - \ldots) & -\frac{1}{\sin\varphi} A_{12} \ldots \\ 0 & -\frac{1}{\sin\varphi} A_{12} - \ldots & \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{1}{r^2}(1 - r^2 A_{22} \ldots) \end{matrix} \right\|,$$

wobei unter Berücksichtigung des Ansatzes (10)

$$\begin{aligned}
g^{22} &= \frac{1}{\varrho^2}\,\{1 + \varrho^2(\ldots) + \ldots\},\\
g^{23} &= -\varrho^0\,\{\ldots\},\\
g^{33} &= \frac{1}{\varrho^2}\,\{1 + \varrho^2(\ldots) + \ldots\}
\end{aligned}$$

wird. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = 0,\\
&\Gamma^1_{22} = -\varrho\,\{1 + \varrho^2(\ldots) + \ldots\},\\
&\Gamma^1_{33} = -\varrho\,\{1 + \varrho^2(a + 2\,\alpha_{23,23}) + b\,\varrho^3 + \ldots\},\\[4pt]
&\Gamma^1_{12} = 0,\\
&\Gamma^1_{13} = 0,\\
&\Gamma^1_{23} = \varrho^3(\ldots),\\[4pt]
&\Gamma^2_{11} = 0,\\
&\Gamma^2_{22} = \varrho^4(\ldots),\\
&\Gamma^2_{33} = \varrho^2\,\{-(\alpha + 2\,\alpha_{23,31}\cos\psi + 2\,\alpha_{23,12}\sin\psi) - \beta\,\varrho \ldots\},
\end{aligned}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{\varrho}\{1 + \varrho^2(\ldots) + \ldots\},$$
$$\Gamma^2_{13} = \varrho(\ldots),$$
$$\Gamma^2_{23} = \varrho^2(\ldots).$$
$$\Gamma^3_{11} = 0,$$
$$\Gamma^3_{22} = \varrho^2(\ldots),$$
$$\Gamma^3_{33} = \varrho^2(\ldots),$$
$$\Gamma^3_{12} = \varrho(\ldots),$$
$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{\varrho}(\ldots),$$
$$\Gamma^3_{23} = \varrho^2(\ldots).$$

Nun können wir mit der Berechnung der Vektoren $\xi(r)$ $(r = 1, 2, 3)$ beginnen, wobei wir statt des Parameters s den Parameter ψ einzuführen haben.

Wenn wir in dem Ausdruck für das Bogenelement (7)

$$\left(\frac{d\,r}{d\,\varphi}\right)^2 = \varrho^6(a'^2 + \ldots),$$

und

$$\left(\frac{d\,\varphi}{d\,\psi}\right)^2 = \varrho^4(\alpha'^4 + \ldots)$$

einführen, so erhalten wir

$$\frac{d\,\psi}{d\,s} = \frac{1}{\varrho}\left\{1 - \varrho^2\left(a + \frac{1}{2}a_{22,22}\right) - b\,\varrho^3 + \ldots\right\}.$$

Wir erhalten mithin nach (4)

$$\xi^1_{(1)} = \frac{d\,x_1}{d\,s} = \frac{d\,r}{d\,\psi}\cdot\frac{d\,\psi}{d\,s} = \varrho^2(a' + b'\varrho + \ldots),$$

$$\xi^2_{(1)} = \frac{d\,x_2}{d\,s} = -\,\varrho(\alpha' + \beta'\varrho + \ldots),$$

$$\xi^3_{(1)} = \frac{d\,x_3}{d\,s} = \frac{d\,\psi}{d\,s} = \frac{1}{\varrho}\left\{1 - \varrho^2\left(a + \frac{1}{2}\alpha_{22,22}\right) - b\,\varrho^3 + \ldots\right\}.$$

Jetzt kommen wir zur Berechnung der $\xi^i_{(2)}$.

$$\xi^1_{(2)} = \frac{d\,\xi^1_{(1)}}{d\,s} + \sum_{rs}\Gamma^1_{rs}\xi^r_{(1)}\xi^s_{(1)},$$

$$\frac{d\,\xi^1_{(1)}}{d\,s} = \frac{d\,\xi^1_{(1)}}{d\,\psi}\cdot\frac{d\,\psi}{d\,s} = \varrho\,(a'' + b''\varrho + \ldots),$$

$$\sum_{rs}\Gamma^1_{rs}\xi^r_{(1)}\xi^s_{(1)} = \frac{1}{\varrho}\{-1 + \varrho^2(a - \alpha_{22,22}) + b\,\varrho^3 + \ldots\}.$$

Somit wird

$$\xi^1_{(2)} = \frac{1}{\varrho}\{-1 + (a'' + a - \alpha_{22,22})\,\varrho^2 + (b'' + b)\,\varrho^3 + \ldots\}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}\xi^2_{(2)} &= -(\alpha'' + \alpha + 2\alpha_{22,21}\cos\psi + 2\alpha_{22,12}\sin\psi) - (\beta'' + \beta)\,\varrho + \ldots\\ &= -(\alpha'' + \alpha + D) - (\beta'' + \beta)\,\varrho + \ldots\end{aligned}$$

und

$$\xi^3_{(3)} = \varrho^2 (\ldots).$$

Für die

$$\xi^i_{(3)} = \frac{d\,\xi^i_{(2)}}{d\,s} + \sum_{rs} \Gamma^i_{rs}\,\xi^r_{(2)}\,\xi^s_{(1)}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\xi^1_{(3)} &= (a''' + a') + (b''' + b' + \ldots)\,\varrho + \ldots,\\
\xi^2_{(3)} &= \frac{1}{\varrho^2}\,\{(\alpha'' + \alpha + D) + \varrho\,(\beta'' + \beta - \alpha''' - \alpha' - D') + \ldots\},\\
\xi^3_{(3)} &= \varrho^0(\ldots).
\end{aligned}$$

Bei Berücksichtigung des Ansatzes (10) hat die Matrix der g_{ik} folgende Form

$$\|g_{ik}\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho^2\{1 + \varrho^2(\ldots) + \ldots\} & \varrho^4(\ldots) \\ 0 & \varrho^4(\ldots) & \varrho^2\{1 + \varrho^2(\ldots) + \ldots\} \end{matrix} \right\|$$

und es ergeben sich die skalaren Produkte

$$(r\,s) = \Sigma\, g_{ik}\,\xi^i_{(r)}\,\xi^k_{(s)}$$

wie folgt

$$\begin{aligned}
(1,1) &= 1,\\
(1,2) &= \varrho\,(-a' - b'\varrho + \ldots),\\
(1,3) &= \varrho\,(\ldots),\\
(2,2) &= \frac{1}{\varrho^2}\,\{1 - 2\varrho^2(a'' + a - \alpha_{23,23}) - 2\varrho^3(b'' + b) + \ldots\},\\
(2,3) &= \frac{1}{\varrho}\,\{-(a''' + a') - (b''' + b' + \ldots)\,\varrho + \ldots\},\\
(3,3) &= \frac{1}{\varrho^4}\,\{(\alpha'' + \alpha + D)^2 + 2\varrho\,(\alpha'' + \alpha + D)(\beta'' + \beta - \alpha''' - \alpha' - D') + \ldots\}\\
&= \frac{1}{\varrho^4}\,\{\Phi^2 + 2\Phi\,\psi\,\varrho + \ldots\},
\end{aligned}$$

worin

$$\Phi = \alpha'' + \alpha + 2\alpha_{32,31}\cos\psi + 2\alpha_{23,12}\sin\psi$$

ist.

Und daher wird die Matrix (3)

$$D \equiv \left| \begin{matrix} 1, & \varrho(\ldots), & \varrho(\ldots) \\ \varrho(\ldots), & \begin{matrix}\frac{1}{\varrho^2}\,\{1 - 2\varrho^2(a'' + a - \alpha_{23,23}) \\ -2\varrho^3(b'' + b) + \ldots\},\end{matrix} & \frac{1}{\varrho}(\ldots) \\ \varrho(\ldots), & \frac{1}{\varrho}(\ldots), & \frac{1}{\varrho^4}\,\{\Phi^2 + 2\Phi\,\psi\,\varrho + \ldots\} \end{matrix} \right|.$$

Mithin bekommt man

$$D_1 = 1,$$
$$D_2 = \frac{1}{\varrho^2}\{1 - 2\varrho^2(a'' + a + \alpha_{23,23}) - 2\varrho^3(b'' + b) + \dots\},$$
$$D_3 = \frac{1}{\varrho^4}\{\Phi^2 + 2\Phi\,\psi\,\varrho + \dots\},$$

und wir erhalten somit nach (2) für die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ und für die Windung $\frac{1}{\tau}$ die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{1}{\varrho} \equiv \frac{1}{\varrho}\{1 - \varrho^2(a'' + a - \alpha_{23,23}) - \varrho^3(b'' + b) + \dots\},$$
$$\frac{1}{\tau} \equiv 0 \equiv \{1 + 2\varrho^2(a'' + a - \alpha_{23,23}) + \varrho^3(b'' + b) + \dots\} \cdot \{\Phi^2 + 2\Phi\,\psi\,\varrho + \dots\}^{1/2},$$

worin

$$\Phi = \alpha'' + \alpha + 2\alpha_{23,31}\cos\psi + 2\alpha_{23,12}\sin\psi$$

ist.

Durch Koeffizientenvergleichung erhalten wir aus diesen beiden Identitäten die Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen $a(\psi)$, $b(\psi), \dots, \alpha(\psi), \beta(\psi), \dots$, und zwar

$$\begin{cases} a'' + a = \alpha_{23,23}; \quad b'' + b = 0; \\ \alpha'' + \alpha = -2\alpha_{23,31}\cos\psi - 2\alpha_{23,12}\sin\psi. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen für a und b haben periodische Lösungen, z. B. $a = \alpha_{23,23}$ und $b = 0$. Die Differentialgleichung für α dagegen hat als Schwingungsgleichung bei vorliegender Resonanz nur dann periodische Lösungen, wenn die rechte Seite verschwindet, d. h. wenn $\alpha_{23,31} = 0$ und $\alpha_{23,12} = 0$ ist.

Hätte man nicht die y_1-Richtung ausgezeichnet, sondern die y_2- oder die y_3-Richtung, so hätte man in gleicher Weise auch $\alpha_{31,12} = 0$ gefunden. Daraus folgt aber weiter, daß $\alpha_{23,23} = \alpha_{31,31} = \alpha_{12,12}$, d. h., daß der Raum ein Raum konstanter Krümmung sein muß. Dreht man nämlich das Koordinatensystem um die y_1-Achse um den Winkel α, so wird beispielsweise im neuen System:

$$\alpha'_{31,12} = \alpha_{31,12}\cos 2\alpha + (\alpha_{12,12} - \alpha_{31,31})\sin 2\alpha.$$ [8]

Da nun aber für jeden Winkel α die Größe $\alpha'_{31,12}$ verschwinden muß, so folgt daraus $\alpha_{12,12} = \alpha_{31,31}$. Bei einer Drehung um die y_2-Achse würde man $\alpha_{12,12} = \alpha_{23,23}$ gefunden haben. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(Aus dem Mathematischen Seminar der Technischen und Montanistischen Hochschule in Graz.)

[8]) Vgl. Baule, l. c. [1]), S. 210.

(Eingegangen am 26. 9. 1936.)

Ein allgemeiner Satz über *W*-Kongruenzen mit Anwendungen auf Laplacesche Zyklen, Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids und schiefe Weingartensche Systeme.

Von

Hans Jonas in Berlin-Steglitz.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Die Kurvennetze (α, β) zweier punktweise aufeinander bezogener Flächen sollen *schmiegungsverwandt* heißen, wenn in entsprechenden Punkten die ungleichnamigen Kurven, d. h. die α-Kurve der einen und die β-Kurve der anderen Fläche[1]), jeweils die gleiche Schmiegungsebene besitzen. Schnitt dieser beiden Schmiegungsebenen ist also immer die Verbindungsgerade des Punktepaares. Damit stehen dann korrespondierende gleichnamige Kurven in der Beziehung der von Bianchi betrachteten asymptotischen *Kurven*transformation[2]): sie sind krumme Asymptotenlinien derselben Regelfläche. Die beiden Schnittpunkte ungleichnamiger Tangenten der schmiegungsverwandten Netze, also der α-Tangente des einen mit der β-Tangente des anderen, beschreiben zwei Flächen, die diese Geraden gleichfalls als Tangentenpaare zulassen. Das ergibt sich

---

[1]) Die im Netz (α, β) bei variablem α beschriebene Kurve β = const werde als α-Kurve bezeichnet, ihre Tangente als α-Tangente. Diese Ausdrucksweise paßt sich dem behandelten Gegenstand am besten an.

[2]) Bianchi, Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie. Palermo Rend. 25 (1908), S. 291.

aus der folgenden Überlegung. In einer Strahlenkongruenz fallen, wie man weiß, die Schmiegungsebenen der auf dem einen Brennmantel von den Strahlen berührten Kurven mit den Tangentialebenen des zweiten Brennmantels zusammen, mit anderen Worten: der zweite Brennmantel ist Enveloppe dieser ∞^2 Schmiegungsebenen. Daraus folgt aber im Falle schmiegungsverwandter Kurvennetze, daß die beiden Enveloppen der gemeinsamen Schmiegungsebenen mit den Flächen der Tangentenschnittpunkte identisch sind. Man gelangt so, worauf ich schon an früherer Stelle hingewiesen habe[3]), zu einer durch ihre Allgemeinheit bemerkenswerten Klasse von *Systemen windschiefer Vierecke, deren Seiten paarweise die vier Ortsflächen der Eckpunkte berühren.* Diese Klasse bedeutet ein Seitenstück zu der ersten, von Bianchi entdeckten, die auf der Zusammensetzung der von W-Kongruenzen vermittelten, asymptotischen Flächentransformationen beruht, also durch die Korrespondenz der Asymptotenlinien auf den vier Flächen ausgezeichnet ist[4]).

Es ist nun interessant, daß auch die neuen Viereckssysteme zu den W-Kongruenzen in engster Beziehung stehen. Wir werden zeigen, daß sich auf den Strahlen einer W-Kongruenz, und zwar auf ∞^1 Weisen, Paare von Punkten derart bestimmen lassen, daß schmiegungsverwandte Netze (α, β) entstehen, die den Asymptotenlinien der Brennmäntel entsprechen. Es gilt aber auch der umgekehrte Satz, der als das Hauptergebnis des allgemeinen Teils der Untersuchung hervorgehoben werde, daß nämlich *stets bei einem Paar schmiegungsverwandter Kurvennetze die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine W-Kongruenz bilden*, deren Brennmäntel reell oder konjugiert-imaginär ausfallen, je nachdem der Windungssinn für die beiden Scharen von Kurven auf der einen und damit auch auf der anderen Fläche der entgegengesetzte oder der gleiche ist.

Bei den Anwendungen war der leitende Gedanke, daß überall da, wo ein bereits bekanntes Paar schmiegungsverwandter Kurvennetze vorliegt, jetzt eine W-Kongruenz aufgedeckt wird. Dahin gehören zunächst die *viergliedrigen Zyklen Laplacescher Transformationen*, also Systeme windschiefer Vierecke, deren Seiten je zwei ungleichnamige Kurven der vier von den Ecken beschriebenen, einander zugeordneten *konjugierten Netze* (α, β) berühren. Hier sind die im Zyklus sich gegenüberliegenden Netze in beiden Paaren schmiegungsverwandt, *beide* Diagonalstrahlen durchlaufen demnach W-Kongruenzen. Damit ist einmal ein neuer Typus von W-Kon-

---

[3]) Jonas, Über neue zweifach-unendliche Systeme windschiefer Vierecke, deren Seiten paarweise die Ortsflächen der Eckpunkte berühren. Berl. Math. Ber. 29 (1930), S. 34.

[4]) Bianchi, Lezioni di Geometria differenziale 2 (1903), §§ 247—248.

gruenzen definiert; daneben aber erhebt sich die Frage nach der Möglichkeit, viergliedrige Laplacesche Zyklen in Gebilde der gleichen Art dadurch überzuführen, daß man die Brennmäntelpaare der beiden Diagonalstrahlensysteme simultanen asymptotischen Transformationen unterwirft. Daß wenigstens in besonderen Fällen die Aufstellung eines solchen Prozesses gelingt, bestätigt sich am Beispiel des seinerzeit aus der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids gewonnenen Laplaceschen Zyklus, bei dem zwei Gegenecken des Vierecks Orthogonalnetze derselben Kugel oder allgemeiner: konjugierte Netze derselben F^2 beschreiben[5]).

Überaus mannigfaltig werden die auf der neuen Grundlage entwickelten Eigenschaften von vorwiegend projektivem Charakter bei den *Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids*. Die Übersicht wird durch Heranziehen der Theorie der R-Netze und R-Kongruenzen erleichtert. Als Ausgangspunkt dienen neben den Achsenspurflächen[6]) gewisse, den Asymptotenlinien entsprechende Paare schmiegungsverwandter Netze, die durch die beiden auf der Biegungsfläche rollenden Hyperboloide erzeugt werden[7]). Auf eine besondere Veröffentlichung verschiebe ich, schon mit Rücksicht auf den Umfang der erforderlichen Entwicklungen, den Nachweis, daß die erhaltenen neuen, mit der Biegungsfläche verknüpften W-Kongruenzen bei Ausübung der Bianchi-Transformation B_k selber asymptotische Transformationen ihrer Brennmäntel erfahren[8]).

Eine letzte Anwendung betrifft die von Bianchi gefundenen und als *schiefe Weingartensche Systeme* bezeichneten Scharen pseudosphärischer Flächen mit korrespondierenden Asymptotenliniennetzen (α, β) und Bertrandschen Kurven als Trajektorien[9]). Mit einem solchen System ver-

---

[5]) Jonas, Untersuchungen über die als Gewebe bezeichneten Kurvennetze und über eine Reihe von Problemen, die mit der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids zusammenhängen. Math. Annalen 87 (1922), S. 157.

[6]) Jonas, Über eine neue geometrische Eigenschaft der Bianchischen Transformation der auf die Mittelpunktsflächen zweiten Grades abwickelbaren Flächen. Math. Annalen 99 (1928), S. 435.

[7]) Jonas, Über die Verallgemeinerung des in der Biegungstheorie der Flächen zweiten Grades auftretenden intrinseken Transformationsprozesses H. Sächs. Ak. Ber. 87 (1935), S. 41; s. daselbst § 2.

[8]) In der gleichen Absicht verzichte ich darauf, in die gegenwärtige Untersuchung den vielleicht interessantesten Fall der *H-Flächen* miteinzubeziehen. Diese Paare von Flächen, die intrinsek, d. h. rein analytisch mit der Verbiegung des orthogonalen Hyperboloids zusammenhängen, gehören nicht nur selber mit ihren Krümmungsliniennetzen einem viergliedrigen Laplaceschen Zyklus an, ein zweiter solcher Zyklus wird von ihren Evolutenmänteln gebildet. Vgl. dazu § 5 der vorstehend genannten Abhandlung.

[9]) Bianchi, Sui sistemi obliqui di Weingarten. Annali di Mat. (3) 19 (1912), S. 251. — Jonas, Flächen mit Bertrandschen Kurven und pseudosphärische Flächen- und Strahlensysteme. Math. Annalen 108 (1930), S. 721.

bindet sich stets ein zweites, ohne Integrationsprozeß zugängliches, dessen von den *konjugierten* Bertrandschen Kurven geschnittene Flächen mit denen des ersten durch eine Schar pseudosphärischer Strahlensysteme zusammenhängen. Werden aus der dreiparametrigen Gesamtheit, also dem Komplex dieser Strahlen die durch β bzw. $\alpha = \text{const}$ definierten herausgehoben, so erhält man, wie gezeigt werden wird, W-Kongruenzen, die bei Anwendung der Bäcklund-Transformation durch asymptotische Transformationen ihrer reellen oder konjugiert-imaginären Brennmäntel in die entsprechenden, zu dem transformierten Weingartenschen System gehörigen W-Kongruenzen übergehen.

§ 1.

Das W-Strahlensystem als Träger von ∞^1 Paaren schmiegungsverwandter Kurvennetze.

1. Wir bedienen uns hier der klassischen, auf die Lelieuvreschen Formeln und die Moutardsche Transformation gegründeten Darstellung der W-Kongruenzen, die trotz gewisser Mängel sich häufig als anderen Methoden überlegen erweist. Es seien $(x^{(1)})$ und $(x^{(2)})$ die beiden hyperbolisch gekrümmten, auf die Asymptotenlinien (α, β) bezogenen Brennmäntel[10]), $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$ die in bekannter Weise normierten[11]) Richtungsvektoren der Flächennormalen. Zwischen den letzteren bestehen die Differentialrelationen des Moutardschen Prozesses:

$$(1) \qquad \xi^{(2)}_\alpha - \xi^{(1)}_\alpha = -\frac{\psi_\alpha}{\psi}(\xi^{(2)} + \xi^{(1)}), \qquad \xi^{(2)}_\beta + \xi^{(1)}_\beta = -\frac{\psi_\beta}{\psi}(\xi^{(2)} - \xi^{(1)}), \;^{12})$$

aus denen sich, wenn $\xi^{(1)}$, $\eta^{(1)}$, $\zeta^{(1)}$ und ψ einer Moutardschen Differentialgleichung $\xi^{(1)}_{\alpha\beta} = M^{(1)}\xi^{(1)}$ genügen, die Größen $\xi^{(2)}$, $\eta^{(2)}$, $\zeta^{(2)}$, Lösungen der von $\frac{1}{\psi}$ erfüllten transformierten Gleichung, durch Quadraturen ergeben:

$$(2) \qquad \xi^{(2)} = \frac{1}{\psi}\int [(\psi\,\xi^{(1)}_\alpha - \psi_\alpha\,\xi^{(1)})\,d\alpha - (\psi\,\xi^{(1)}_\beta - \psi_\beta\,\xi^{(1)})\,d\beta].$$

---

[10]) Ich schreibe Punkt x, wenn x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten sind, entsprechend Fläche (x), ferner Richtungsvektor ξ, wenn ξ, η, ζ den Richtungskosinus proportional sind. Eine in x angegebene Gleichung hat vektorielle Bedeutung, ist also durch Hinzufügen der analogen in y und in z zu ergänzen. Partielle Ableitungen nach den Parametern sind durch Buchstabenindizes bezeichnet.

[11]) $K = -\frac{1}{\varrho^2}$; $\xi = \sqrt{\varrho}\,X$.

[12]) Aus einem mehr äußerlichen Grunde, damit nämlich in § 2 (20) das gleiche Vorzeichen im Zähler und im Nenner steht, wähle ich im Vergleich zu Bianchi (Lezioni 2, § 242) das entgegengesetzte Vorzeichen bei $\xi^{(2)}$.

Für die Brennmäntel gelten, wobei die Torsion der α-Asymptotenlinien positiv vorausgesetzt sei [13]), die Formeln:

$$x^{(1)} = \int [(\eta_\alpha^{(1)} \zeta^{(1)} - \zeta_\alpha^{(1)} \eta^{(1)}) d\alpha - (\eta_\beta^{(1)} \zeta^{(1)} - \zeta_\beta^{(1)} \eta^{(1)}) d\beta], \tag{3}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \eta^{(1)} \zeta^{(2)} - \zeta^{(1)} \eta^{(2)}. \tag{4}$$

Wir betrachten den durch die Konstante k bestimmten Punkt des Strahles:

$$x^{(k)} = \frac{\psi x^{(2)} + k x^{(1)}}{\psi + k} = x^{(1)} + \frac{\psi}{\psi + k} (\eta^{(1)} \zeta^{(2)} - \zeta^{(1)} \eta^{(2)}) \tag{5}$$

und die von ihm für variables α und β beschriebene Fläche $(x^{(k)})$. Die Werte $k = \infty$ und $k = 0$, die für die unmittelbar folgende Rechnung ausgeschlossen seien, entsprechen den Brennmänteln $(x^{(1)})$ und $(x^{(2)})$. Wir führen die beiden zur Strahlrichtung senkrechten Richtungsvektoren

$$\Xi = \psi \xi^{(2)} + k \xi^{(1)}, \qquad \Xi' = \psi \xi^{(2)} - k \xi^{(1)} \tag{6}$$

ein und finden durch Differentiation an Hand von (1):

$$\begin{cases} \Xi_\alpha = (\psi + k)\, \xi_\alpha^{(1)} - \psi_\alpha \xi^{(1)}, & \Xi_\beta = -(\psi - k)\, \xi_\beta^{(1)} + \psi_\beta \xi^{(1)}, \\ \Xi'_\alpha = (\psi - k)\, \xi_\alpha^{(1)} - \psi_\alpha \xi^{(1)}, & \Xi'_\beta = -(\psi + k)\, \xi_\beta^{(1)} + \psi_\beta \xi^{(1)} \end{cases} \tag{7}$$

und weiter mit Benutzung von (3) und (4):

$$x_\alpha^{(k)} = \frac{1}{(\psi + k)^2} (H_\alpha Z - Z_\alpha H), \qquad x_\beta^{(k)} = -\frac{1}{(\psi + k)^2} (H'_\beta Z' - Z'_\beta H'). \tag{8}$$

Da hiernach

$$\Sigma x_\alpha^{(k)} \Xi = 0, \quad \Sigma x_\alpha^{(k)} \Xi_\alpha = 0, \qquad \Sigma x_\beta^{(k)} \Xi' = 0, \quad \Sigma x_\beta^{(k)} \Xi'_\beta = 0$$

wird, sind Ξ und Ξ' für die von $x^{(k)}$ beschriebene α- und β-Kurve die Richtungen der Binormalen. Die Schmiegungsebenen gehen also durch den Strahl. Zugleich ist ersichtlich, daß diese Kurven krumme Asymptotenlinien der in der W-Kongruenz enthaltenen Regelflächen β bzw. $\alpha = \text{const}$ sind.

2. Die Substitution $k \mid -k$ vertauscht die Richtungsvektoren Ξ und Ξ' und damit die Schmiegungsebenen. Es wird:

$$x^{(-k)} = x^{(1)} + \frac{\psi}{\psi - k} (\eta^{(1)} \zeta^{(2)} - \zeta^{(1)} \eta^{(2)}) = x^{(k)} + \frac{1}{\psi^2 - k^2} (H Z' - Z H'), \tag{9}$$

$$x_\alpha^{(-k)} = \frac{1}{(\psi - k)^2} (H'_\alpha Z' - Z'_\alpha H'), \qquad x_\beta^{(-k)} = -\frac{1}{(\psi - k)^2} (H_\beta Z - Z_\beta H). \tag{10}$$

Man erhält so zunächst den Satz: *Für einen gegebenen Wert von k beschreiben die durch die Brennpunkte harmonisch getrennten Punkte $x^{(k)}$ und $x^{(-k)}$ des W-Strahls den Asymptotenlinien der Brennmäntel entsprechende* ***schmiegungsverwandte*** *Kurvennetze (α, β), denen also jeweils die Schmiegungsebenen, aber in umgekehrter Zuordnung zu den Parametern, gemeinsam*

[13]) S. dazu § 2 (25).

sind. Die Schnittpunkte ihrer ungleichnamigen Tangenten durchlaufen dann, wie schon im Anfang der Einleitung festgestellt wurde, die Enveloppen der beiden Systeme von Schmiegungsebenen. Das besagt: *Die Strahlen einer W-Kongruenz sind, und zwar auf ∞^1 Weisen, Diagonalen in einem System windschiefer Vierecke, deren Seiten die Ortsflächen der Eckpunkte berühren.*

Die etwas umständliche Darstellung der Tangentenschnittpunkte ist für das Weitere entbehrlich. Einige geometrische Tatsachen lassen sich aus der Theorie der kubischen Raumkurven gewinnen. Betrachtet man auf dem W-Strahl für variables k die Gesamtheit der Punkte $x^{(k)}$, so bilden die von ihnen ausgehenden α- und β-Tangenten, darunter die asymptotischen Tangenten der Brennmäntel, für die Regelflächen $\beta = \text{const}$ und $\alpha = \text{const}$ die beiden zum Strahl als gemeinschaftlicher Erzeugender gehörigen Schmiegungshyperboloide. Man schließt: *Mit dem einzelnen Strahl der W-Kongruenz verbindet sich als Ort der Schnittpunkte der in den Punkten $x^{(k)}$, $x^{(-k)}$ konstruierten Tangentenpaare*[14]) *eine kubische Raumkurve C^3.* Über diese kann man noch folgendes aussagen: *Die C^3 geht durch die beiden Brennpunkte und berührt dort die zur Strahlrichtung konjugierte Flächentangente des Brennmantels. Die Verbindungslinien zusammengehöriger Tangentenschnittpunkte, Bisekanten der C^3, bilden eine Regelschar zweiter Ordnung, welche die in den Brennpunkten an die C^3 gelegten Tangenten als Geraden enthält und daselbst die Schmiegungsebenen der C^3 berührt*[15]).

---

[14]) Es ist klar, daß, wenn die Koordinaten des einen Tangentenschnittpunktes durch k ausgedrückt sind, sich die des anderen für den Parameterwert $-k$ ergeben.

[15]) Die Herleitung sei kurz angegeben. Sind $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ lineare Ausdrücke in den rechtwinkligen Koordinaten, also $\omega_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$, oder solchen Ausdrücken proportional (projektive Punktkoordinaten), so kann die allgemeinste kubische Raumkurve C^3 (Parameter λ) durch die Gleichungen

$$\omega_1 = \lambda\,\omega_0, \qquad \omega_2 = \lambda\,\omega_1, \qquad \omega_3 = \lambda\,\omega_2$$

dargestellt werden. Sie erscheint zunächst als Schnitt der beiden Kegel

$$\omega_1^2 - \omega_0\,\omega_2 = 0, \qquad \omega_2^2 - \omega_1\,\omega_3 = 0$$

mit den Scheiteln in den Kurvenpunkten $A\,(\lambda = \infty)$ und $B\,(\lambda = 0)$; $\omega_1 = 0$ und $\omega_2 = 0$ sind die Tangentialebenen der Kegel längs der gemeinsamen Erzeugenden AB, ferner ist $\omega_0 = 0$ die Schmiegungsebene der C^3 in A, $\omega_3 = 0$ diejenige in B, $\omega_0 = \omega_1 = 0$ die Tangente in A und $\omega_2 = \omega_3 = 0$ die Tangente in B. Irgend eine Regelfläche zweiter Ordnung, die mit den beiden Kegeln den vollständigen Durchschnitt gemein hat, ist ($m = \text{const}$) durch

$$\omega_2^2 - \omega_1\,\omega_3 + m\,(\omega_1^2 - \omega_0\,\omega_2) = 0$$

gegeben; sie berührt in A die Ebene $\omega_1 = 0$, in B die Ebene $\omega_2 = 0$. Entsteht demnach die C^3 als Schnitt zweier F^2 — sie mögen F_m^2 und $F_{m'}^2$ heißen — mit einer gemeinsamen Geraden, so trifft diese letztere die C^3 in den Punkten A und

3. Bianchis Kompositionstheorem (Vertauschbarkeitssatz) für die Moutardschen Transformationen [16]) gestattet, die beiden Brennmäntel einer gegebenen W-Kongruenz simultanen asymptotischen, also durch berührende W-Kongruenzen vermittelten Transformationen zu unterwerfen, durch die sie in die Brennmäntel einer neuen W-Kongruenz übergehen. Wir untersuchen das Verhalten der schmiegungsverwandten Kurvennetze bei einer derartigen Transformation der W-Kongruenz. Indem wir wieder den Brennmantel $(x^{(1)})$ bevorzugen, führen wir neben ψ die Größe $R^{(1)}$ als zweite transformierende Lösung der von $\xi^{(1)}$ erfüllten Moutardschen Gleichung ein und bilden analog zu (2):

$$(11)\quad \xi_1^{(1)} = \frac{1}{R^{(1)}} \int [(R^{(1)} \xi_\alpha^{(1)} - R_\alpha^{(1)} \xi^{(1)})\, d\alpha - (R^{(1)} \xi_\beta^{(1)} - R_\beta^{(1)} \xi^{(1)})\, d\beta].$$

Damit wird aus Tangenten von $(x^{(1)})$ eine zweite W-Kongruenz konstruiert, für die der andere Brennmantel $(x_1^{(1)})$ nach (4) durch

$$(12)\qquad x_1^{(1)} = x^{(1)} + \eta^{(1)} \zeta_1^{(1)} - \zeta^{(1)} \eta_1^{(1)}$$

dargestellt ist. Der simultane Prozeß, der entsprechend $(x^{(2)})$ in $(x_1^{(2)})$ überführt, knüpft sich an die Quadratur

$$(13)\qquad J = \int [(R_\alpha^{(1)} \psi - \psi_\alpha R^{(1)})\, d\alpha - (R_\beta^{(1)} \psi - \psi_\beta R^{(1)})\, d\beta]$$

B, in denen die Tangentialebenen von F_m^2 und $F_{m'}^2$ zusammenfallen. Für den W-Strahl sind F_m^2 und $F_{m'}^2$ die Schmiegungshyperboloide, mithin werden A und B die Brennpunkte, $\omega_1 = 0$ und $\omega_2 = 0$ die Brennebenen, Tangentialebenen der Brennmäntel in A und B. Aus (6) ist ersichtlich, daß λ mit k identifiziert werden kann. Nun sollen sich aber von den Schmiegungsregelscharen F_m^2 und $F_{m'}^2$ die durch den Kurvenpunkt $\lambda = k$ gehende Gerade der einen und die durch den Punkt $\lambda = -k$ gehende der anderen auf dem Strahl AB treffen. Die erste Gerade ist Schnitt von F_m^2 mit der Ebene $\omega_2 = k\omega_1$, sie trifft AB in dem durch $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 + mk\,\omega_0 = 0$ besimmten Punkte; die zweite schneidet AB im Punkte $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 - m' k\,\omega_0 = 0$; es muß also $m' = -m$ sein. Im Brennpunkt A $(k = \infty)$ sind jetzt aber die Erzeugenden der beiden Regelscharen F_m^2 und F_{-m}^2, also die asymptotischen Tangenten des Brennmantels, die Schnitte der Tangentialebene $\omega_1 = 0$ mit den Ebenen $\omega_2 + m\,\omega_0 = 0$ und $\omega_2 - m\,\omega_0 = 0$. Sie liegen harmonisch zur Tangente $\omega_0 = \omega_1 = 0$ der C^3 und zum Strahl $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Tangente der C^3 und W-Strahl sind demnach, wie behauptet, konjugierte Tangenten des Brennmantels.

Man weiß, daß die Bisekante der durch λ und λ' bestimmten Punkte der C^3 die Gleichungen $\omega_2 - (\lambda + \lambda')\omega_1 + \lambda\lambda'\omega_0 = 0$, $\omega_3 - (\lambda + \lambda')\omega_2 + \lambda\lambda'\omega_1 = 0$ hat; für $\lambda = k$, $\lambda' = -k$ gibt das:

$$\omega_2 - k^2\omega_0 = 0, \qquad \omega_3 - k^2\omega_1 = 0, \quad \text{d. h.} \quad \omega_1\omega_2 - \omega_0\omega_3 = 0.$$

Das ist eine Regelschar zweiter Ordnung, der die Gerade $\omega_0 = \omega_1 = 0$, nämlich die Tangente der C^3 im Brennpunkt A, angehört; die Schmiegungsebene $\omega_0 = 0$ der C^3 ist in A Tangentialebene dieser F^2.

[16]) S. dazu die Anm. [4]).

mit verfügbarer additiver Konstanten. Es gelten dann die Formeln:

(14) $$\xi_1^{(2)} = \xi^{(1)} + \frac{R^{(1)}\psi}{J}(\xi_1^{(1)} - \xi^{(2)}), \qquad R^{(2)} = \frac{J}{\psi},$$

(15) $$x_1^{(2)} = x^{(2)} + \eta^{(2)}\zeta_1^{(2)} - \zeta^{(2)}\eta_1^{(2)}.$$

Die beiden erhaltenen Flächen $(x_1^{(1)})$, $(x_1^{(2)})$ sind ihrerseits Brennmäntel einer vierten, den Zyklus schließenden W-Kongruenz, vom gegenwärtigen Standpunkt gesehen: der *transformierten*. In der Tat folgt aus (12), (14), (15):

(16) $$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + \eta_1^{(1)}\zeta_1^{(2)} - \zeta_1^{(1)}\eta_1^{(2)}.$$

Gleichzeitig bestehen die Differentialrelationen (1) für den Index 1 mit

(17) $$\psi_1 = \frac{J}{R^{(1)}} = \frac{R^{(2)}\psi}{R^{(1)}}.$$

Wir betrachten nun im transformierten W-System das vom Punkte

(18) $$x_1^{(k)} = x_1^{(1)} + \frac{\psi_1}{\psi_1 + k}(\eta_1^{(1)}\zeta_1^{(2)} - \zeta_1^{(1)}\eta_1^{(2)})$$

beschriebene Netz (α, β) und das schmiegungsverwandte des Punktes $x_1^{(-k)}$, ordnen diese bei gleichem Wert der Konstanten k den Netzen $(x^{(k)})$, $(x^{(-k)})$ des ursprünglichen Systems zu. Die Schmiegungsebenen des Paares $(x_1^{(k)})$, $(x_1^{(-k)})$ sind nach (6) normal zu den Richtungsvektoren:

(19) $$\Xi_1 = \psi_1\xi_1^{(2)} + k\xi_1^{(1)}, \qquad \Xi_1' = \psi_1\xi_1^{(2)} - k\xi_1^{(1)}.$$

Man findet, indem man berücksichtigt, daß infolge von (14) sich eine der vier Größen $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\xi_1^{(1)}$, $\xi_1^{(2)}$ linear durch die drei übrigen ausdrücken läßt:

$$\sum(x_1^{(k)} - x^{(k)})\,\Xi = 0, \qquad \sum(x_1^{(k)} - x^{(k)})\,\Xi_1 = 0.$$

Das besagt: *Die zu gleichem k gehörigen Netze $(x^{(k)})$ und $(x_1^{(k)})$ des gegebenen und des transformierten Systems haben die Eigenschaft, daß immer der Punkt des einen in der Schmiegungsebene der α-Kurve des anderen liegt; die Netze $(x^{(k)})$, $(x_1^{(k)})$, ebenso $(x^{(-k)})$, $(x_1^{(-k)})$ hängen demnach durch asymptotische Kurventransformation ihrer α-Kurven zusammen.* Man bestätigt ferner: *Für entgegengesetzte Werte von k, also für die Netze $(x^{(k)})$, $(x_1^{(-k)})$ einerseits, $(x^{(-k)})$ und $(x_1^{(k)})$ andererseits, gilt dasselbe von den β-Kurven*[17]). Korrespondierende Punkte der vier betrachteten Netze sind, wie man sieht, die Ecken des Vierflachs, das die beiden Paare von Schmiegungsebenen bilden. Die asymptotischen Transformationen der α-Kurven und ebenso die der β-Kurven fügen sich zu viergliedrigen Zyklen zusammen, die ersteren den Seiten des windschiefen Vierecks $x^{(k)}x_1^{(k)}x_1^{(-k)}x^{(-k)}$ entsprechend, die letzteren in der Folge $x^{(k)}x_1^{(-k)}x_1^{(k)}x^{(-k)}$.

---

[17]) Diese Formulierung des Ergebnisses setzt das Vorzeichen von ψ_1 so, wie in (17) gewählt, voraus.

§ 2.

Der Umkehrungssatz.

1. Zwei für die Aufstellung unseres allgemeinen Satzes wichtige Bemerkungen schicken wir vorauf.

Aus der Gesamtheit der Paare schmiegungsverwandter Netze, die sich mit einer W-Kongruenz verbinden, werde ein beliebiges — es heiße jetzt (x), (x') statt $(x^{(k)})$, $(x^{-(k)})$ — herausgehoben, für das sich, da ψ einen konstanten Faktor aufnehmen kann, $k = 1$ setzen läßt. Unter dieser Annahme führen wir an Stelle von Ξ und Ξ', davon durch die Nenner unterschieden,

$$(20)\qquad \xi = \frac{\psi\,\xi^{(2)} + \xi^{(1)}}{\psi + 1}, \quad \xi' = \frac{\psi\,\xi^{(2)} - \xi^{(1)}}{\psi - 1}$$

als Richtungsvektoren der Binormalen ein, setzen

$$(21)\qquad \nu = \frac{\psi - 1}{\psi + 1}$$

und erhalten aus (8) bis (10) die Formeln:

$$(22)\qquad \begin{cases} x_\alpha = \eta_\alpha\,\zeta - \zeta_\alpha\,\eta, & x_\beta = -\,\nu^2\,(\eta'_\beta\,\zeta' - \zeta'_\beta\,\eta'),\\ x'_\alpha = \eta'_\alpha\,\zeta' - \zeta'_\alpha\,\eta', & x'_\beta = -\,\dfrac{1}{\nu^2}\,(\eta_\beta\,\zeta - \zeta_\beta\,\eta),\\ x' = x + \eta\,\zeta' - \zeta\,\eta'. \end{cases}$$

Die Differentialrelationen (1) der Moutardschen Transformation gehen in

$$(23)\qquad (\nu\xi')_\alpha = \nu^2\left(\frac{\xi}{\nu}\right)_\alpha, \quad \xi'_\beta = \frac{1}{\nu^2}\,\xi_\beta$$

über. Für das folgende wesentlich ist die Tatsache, daß auch umgekehrt, wenn ein Lösungspaar ξ, ξ' von (23) vorliegt, durch

$$(24)\qquad \xi^{(1)} = \frac{\xi - \nu\,\xi'}{1 - \nu}, \quad \xi^{(2)} = \frac{\xi + \nu\,\xi'}{1 + \nu}, \quad \psi = \frac{1 + \nu}{1 - \nu}$$

die Relationen (1) erfüllt sind.

Die zweite Bemerkung betrifft die bekannte, auch den Lelieuvreschen Formeln zugrundeliegende Darstellung einer Raumkurve mit vorgeschriebener Richtung der Binormalen (Leitkegel bzw. sphärisches Bild). Sollen die Richtungskosinus den Funktionen ξ, η, ζ des Parameters proportional sein, so ist, wenn m eine willkürlich zu wählende Funktion desselben bedeutet:

$$(25)\qquad x = \int m\,(d\,\eta\cdot\zeta - d\,\zeta\cdot\eta).$$

Der Torsionsradius ist:

$$(26)\qquad T = m\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Gegebenenfalls wird man $\sqrt{|m|}$ in ξ, η, ζ hineinziehen, damit reduziert sich dann in (25), (26) der Faktor m auf ± 1, d. h. auf das Vorzeichen der Torsion.

2. Nach diesen Vorbereitungen lösen wir die Aufgabe: *auf allgemeinste Weise ein von den Punkten x und x' beschriebenes Paar schmiegungsverwandter Netze (α, β) zu konstruieren.* Es sei ξ Richtungsvektor der Binormalen für die α-Kurve von (x) und die β-Kurve von (x'), ξ' für die β-Kurve von (x) und die α-Kurve von (x'). Um das Mitführen eines doppelten Vorzeichens zu vermeiden, nehmen wir die Torsion der α-Kurven von (x) positiv an. Wir können dann mit Unterdrückung eines Faktors m in der ersten Formel

$$(27)\qquad \begin{cases} x_\alpha = \eta_\alpha \zeta - \zeta_\alpha \eta, & x_\beta = -n(\eta'_\beta \zeta' - \zeta'_\beta \eta'), \\ x'_\alpha = m'(\eta'_\alpha \zeta' - \zeta'_\alpha \eta'), & x'_\beta = -n'(\eta_\beta \zeta - \zeta_\beta \eta) \end{cases}$$

setzen; die Minuszeichen bei den Ableitungen nach β dienen lediglich einem formalen Zweck. Hinzu tritt die Bedingung dafür, daß die Verbindungslinie der Punkte x, x' Schnitt der Schmiegungsebenen, also Lot zu ξ und ξ' wird:

$$(28)\qquad x' - x = \eta \zeta' - \zeta \eta';$$

dabei konnte ein Proportionalitätsfaktor in ξ', η', ζ' hineingezogen werden.

Wir differentiieren (28) mit Benutzung von (27) nach α:

$$(29)\qquad m'(\eta'_\alpha \zeta' - \zeta'_\alpha \eta') - (\eta_\alpha \zeta - \zeta_\alpha \eta) = \eta_\alpha \zeta' - \zeta_\alpha \eta' - (\eta'_\alpha \zeta - \zeta'_\alpha \eta).$$

Multiplizieren wir einmal mit ξ, ein zweites Mal mit ξ' und summieren dann über das Gleichungstripel, so folgt, wobei die Klammern dreireihige Determinanten in den Buchstaben ξ, η, ζ vorstellen:

$$m'(\xi'_\alpha, \xi, \xi') = (\xi_\alpha, \xi, \xi'), \quad (\xi_\alpha, \xi, \xi') = (\xi'_\alpha, \xi, \xi'),$$

mithin: $m' = 1$, da die Determinanten von Null verschieden sein müssen [18]). Wir erhalten dann aus (29):

$$(\eta'_\alpha - \eta_\alpha)(\zeta' + \zeta) - (\zeta'_\alpha - \zeta_\alpha)(\eta' + \eta) = 0,$$

also, wenn σ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet:

$$(30)\qquad \xi'_\alpha - \xi_\alpha = \sigma(\xi' + \xi).$$

Differentiation von (28) nach β liefert entsprechend $n' = \frac{1}{n}$ und:

$$(31)\qquad n\xi'_\beta - \xi_\beta = \tau(n\xi' + \xi).$$

Werden die Torsionsradien der α- und der β-Kurve von (x) mit T und $\overline{T}$, für (x') mit T' und $\overline{T'}$ bezeichnet, so ist nach (26):

$$(32)\qquad T = \Sigma \xi^2, \quad \overline{T} = -n \Sigma \xi'^2, \quad T' = \Sigma \xi'^2, \quad \overline{T'} = -\frac{1}{n} \Sigma \xi^2.$$

---

[18]) Das Verschwinden der Determinanten hätte zur Folge, daß die Verbindungslinie der Punkte x, x' gleichzeitig Tangente der von ihnen beschriebenen α-Kurven wird. Die Punkte müßten dann zusammenfallen.

Daraus ist zu entnehmen, daß *gleichnamige Kurven der Netze* (x), (x') *gleichen Windungssinn besitzen.* Ist ferner d der Abstand der Punkte x und x', Ω der Winkel der Schmiegungsebenen, so folgt aus (28) und (32):

$$T\,T' = \overline{T}\,\overline{T}' = \frac{d^2}{\sin^2 \Omega}. \tag{33}$$ [19])

Man hat nun noch dafür zu sorgen, daß in dem Ansatz (27) die Ausdrücke für x_α und x_β den Integrabilitätsbedingungen genügen. Dabei lassen sich mittels (30), (31) die Ableitungen von ξ' beseitigen. Wir schreiben zunächst:

$$x_\beta = -\left[(\eta_\beta + \tau\,\eta)\,\zeta' - (\zeta_\beta + \tau\,\zeta)\,\eta'\right]$$

und finden dann:

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &(\eta_{\alpha\beta} + \sigma\,\eta_\beta)\,(\zeta' + \zeta) - (\zeta_{\alpha\beta} + \sigma\,\zeta_\beta)\,(\eta' + \eta) + (\tau_\alpha + \sigma\,\tau)\,(\eta\,\zeta' - \zeta\,\eta') \\ &\qquad\qquad + \tau\,[\eta_\alpha(\zeta' - \zeta) - \zeta_\alpha(\eta' - \eta)] = 0. \end{aligned}\right.$$

Wird mit $\xi' + \xi$ multipliziert und über die drei Gleichungen summiert, so ergibt sich: $\tau = 0$. Damit verwandelt sich (31) in:

$$\xi'_\beta = \frac{1}{n}\,\xi_\beta, \tag{35}$$

während aus (34) unter Einführung eines Faktors h

$$\xi_{\alpha\beta} + \sigma\,\xi_\beta + h\,(\xi' + \xi) = 0 \tag{36}$$

folgt. Eine Relation von derselben Form erhält man aber, wenn man die beiden aus (30) und (35) gewonnenen Ausdrücke für $\xi'_{\alpha\beta}$ einander gleich setzt:

$$\xi_{\alpha\beta} + \left[\frac{n_\alpha}{n(n-1)} + \frac{\sigma(n+1)}{n-1}\right]\xi_\beta + \frac{\sigma_\beta\, n}{n-1}\,(\xi' + \xi) = 0, \tag{37}$$

wobei $n = 1$ wegen $(\xi_\beta, \xi, \xi') \neq 0$ auszuschließen war. Aus dem gleichen Grunde muß (36) mit (37) identisch werden; mithin: $\sigma = -\frac{n_\alpha}{2n}\cdot$ Die schmiegungsverwandten Netze sind demnach durch die folgenden Formeln bestimmt:

$$\xi'_\alpha - \xi_\alpha = -\frac{n_\alpha}{2n}\,(\xi' + \xi), \qquad \xi'_\beta = \frac{1}{n}\,\xi_\beta, \tag{38}$$

$$x = \int \left[(\eta_\alpha\,\zeta - \zeta_\alpha\,\eta)\,d\alpha - n\,(\eta'_\beta\,\zeta' - \zeta'_\beta\,\eta')\,d\beta\right], \quad x' = x + \eta\,\zeta' - \zeta\,\eta'. \tag{39}$$

3. Wird $n = \nu^2$ gesetzt, (ν reell, wenn die Torsionen der α- und der β-Kurven verschiedenes Vorzeichen haben), so gehen die Differentialgleichungen (38) in (22) über, die Darstellung (39) fällt mit (23) zusammen. Die Punktepaare x, x' liegen also genau so wie die in § 1 betrachteten

---

[19]) Für die asymptotische Kurventransformation findet sich die Beziehung bei Bianchi in § 2 der unter [8]) angeführten Arbeit.

auf den Strahlen einer W-Kongruenz. Die Brennmäntel erhält man aus (24) und (5):

$$(40)\qquad x^{(1)} = x - \frac{\nu}{1-\nu}(\eta\zeta' - \zeta\eta'),\qquad x^{(2)} = x + \frac{\nu}{1+\nu}(\eta\zeta' - \zeta\eta').$$

Damit haben wir als das Hauptergebnis der allgemeinen Untersuchung den Satz: *Liegt ein Flächenpaar mit schmiegungsverwandten Kurvennetzen vor, so bilden die Verbindungsgeraden korrespondierender Punkte, gleichzeitig also Schnitte der gemeinsamen Schmiegungsebenen, eine W-Kongruenz, auf deren Brennmänteln die Asymptotenlinien den Netzen entsprechen. Die Brennmäntel sind reell, wenn in dem einen und damit auch in dem anderen Netz die beiden Kurvenscharen entgegengesetzten Windungssinn haben.* Ohne Rücksicht auf die Realität der Brennmäntel gilt der Zusatz: *Die den gegebenen Netzen entsprechenden, aus den Verbindungsgeraden bestehenden Regelscharen schneiden aus ∞^1 Flächenpaaren schmiegungsverwandte Kurvennetze aus.* Diese sind, wenn jetzt $n = \varepsilon|n| = \varepsilon\nu^2$ gesetzt wird und c Konstante ist, dargestellt durch:

$$x + \frac{\nu}{\nu + c_i}(\eta\zeta' - \zeta\eta')\qquad (i = 1, 2;\ c_1 c_2 = \varepsilon).$$

Nur erwähnt sei, daß sich für die schmiegungsverwandten Netze die Transformation mit den in § 1, 3 gefundenen Eigenschaften unmittelbar im Anschluß an (38), (39) gewinnen läßt; das Verfahren setzt dann die Kenntnis eines weiteren Lösungspaares von (38) voraus. Andererseits kann auf diesem Wege auch die Transformation der W-Kongruenzen mit imaginären Brennmänteln aus geometrischen Beziehungen entwickelt werden, die dem reellen Gebiet angehören. Ohne Rechnung überzeugt man sich von der Tatsache, daß die schmiegungsverwandten Netze ebenso wie die W-Kongruenzen bei projektiven Raumtransformationen, Kollineationen und Korrelationen, in gleichartige Gebilde übergehen.

4. Es folgen noch einige Bemerkungen über den Fall der W-Normalensysteme. Nach (24) und (32) ist die Beziehung $T + \overline{T} = 0$ bzw. $T' + \overline{T}' = 0$ gleichwertig mit $\sum \xi^{(1)}\xi^{(2)} = 0$. Das besagt: *Schmiegungsverwandte Netze von Kurven mit entgegengesetzt gleichen Torsionen sind dadurch ausgezeichnet, daß die Verbindungsgeraden ihrer Punkte die Normalen einer Schar paralleler W-Flächen bilden.* Zwei hierher gehörige spezielle Fragen mögen unter Fortlassung der Rechnung, die beidemal auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung hinausläuft, beantwortet werden. Die Eigenschaft konstanter Winkel zwischen den Schmiegungsebenen kommt den mit den Normalen der pseudosphärischen Flächen verbundenen Paaren schmiegungsverwandter Netze zu. Wir fragen ferner, ob eine W-Fläche (x) selber Trägerin eines Netzes (α, β) sein kann, zu dem ein Punkt x' der Normalen, dessen Abszisse nach § 1, 2 das harmo-

nische Mittel der Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 wird, ein schmiegungsverwandtes beschreibt. Es ist klar, daß dann auf (x) die Kurven (α, β) — sie entsprechen also den Asymptotenlinien der Evolutenmäntel — geodätische Linien sein müssen; ihre Tangenten, Seiten des variablen windschiefen Vierecks, durchlaufen zwei Normalensysteme. Man findet als Quadrat des Linienelements, bezogen auf die Krümmungslinien (u, v), den für ein Netz sog. geodätischer Ellipsen und Hyperbeln typischen Ausdruck:

$$\Sigma\, d x^2 = \frac{d u^2}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} + \frac{d v^2}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}$$

Die Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 sind gegeben durch:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{2}(\omega + \sin \omega), \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{2}(\omega - \sin \omega).$$

Zwischen ihnen besteht also die für die W-Flächenklasse charakteristische, an den bekannten Weingartenschen Fall erinnernde Relation:

$$\sin\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}.$$

Allerdings läßt die komplizierte Form der Gaußschen Differentialgleichung:

$$\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \cdot \omega_u\right)_u - \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\omega}{2} \cdot \omega_v\right)_v + \frac{\omega^2 - \sin^2 \omega}{\sin \omega} = 0$$

weitere Bemühungen um diese W-Flächen und das zugehörige Biegungsproblem, etwa hinsichtlich einer Transformation, als aussichtslos erscheinen.

§ 3.

Viergliedrige Zyklen Laplacescher Transformationen.

1. Wir ziehen zunächst eine Folgerung aus der Annahme, daß von zwei schmiegungsverwandten Netzen (x) und (x') (Parameter α, β) das erstere ein konjugiertes System sei. Die Tangentenschnittpunkte $\widehat{x}, \check{x}$, in unmittelbar verständlicher Bezeichnung:

$$(41) \qquad \widehat{x} \equiv (x_\alpha \times x'_\beta), \qquad \check{x} \equiv (x_\beta \times x'_\alpha),$$

sind die zweiten Brennpunkte der α- und der β-Tangente von (x); sie beschreiben die beiden Laplaceschen Transformierten, also gleichfalls konjugierte Systeme (α, β). Da allgemein den Developpablen einer Kongruenz auf den Brennmänteln konjugierte Systeme entsprechen, schließt man, daß die gemeinschaftliche Tangente $\widehat{x}\, x'$ der Flächen $(\widehat{x})$ und (x'), wie man weiß, β-Tangente von (x'), zugleich α-Tangente von $(\widehat{x})$ wird. Danach geht das von x' beschriebene, ebenfalls konjugierte Netz (α, β) aus (x) mittels zweier sukzessiver, durch die α-Tangenten, auf dem Wege über $(\check{x})$ durch die β-Tangenten bewirkter Laplacescher Transformationen hervor. Wir können sagen: *Ist von zwei schmiegungsverwandten Kurven-*

netzen das eine ein konjugiertes System, so gilt dies auch von dem anderen; sie bilden mit den eingeschalteten, von den Tangentenschnittpunkten durchlaufenen Netzen einen viergliedrigen Zyklus Laplacescher Transformationen. Aus § 2 entnehmen wir, da im vorliegenden Falle auch die Netze $(\widehat{x})$ und $(\check{x})$ schmiegungsverwandt sind, den wichtigen Satz: *Im viergliedrigen Laplaceschen Zyklus durchlaufen die beiden Diagonalstrahlen, d. h. die Verbindungslinien korrespondierender Punkte der gegenüberliegenden Netze, zwei W-Kongruenzen, in denen die Asymptotenlinien der (reellen oder konjugiert-imaginären) Brennmäntel den vier konjugierten Netzen des Zyklus entsprechen.*

2. Es scheint von Interesse, daß sich ein einfacher Beweis dieses Satzes auch aus der folgenden, von Darboux ausgesprochenen charakteristischen Eigenschaft der W-Kongruenzen gewinnen läßt, auf die sich eine bekannte projektive Behandlung derselben gründet: Im Falle einer W-Kongruenz genügen die sechs Strahlenkoordinaten, Richtungskosinus X, Y, Z und Momente $yZ - zY, \ldots$ bzw. sechs Größen, die sich von den genannten durch einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden, einundderselben Laplaceschen Differentialgleichung von der Form:

$$\theta_{\alpha\beta} = \mathfrak{A}\,\theta_\alpha + \mathfrak{B}\,\theta_\beta + \mathfrak{C}\,\theta, \tag{42}$$

wobei α, β die asymptotischen Parameter der Brennmäntel sind.

Es seien nämlich (x) und (x') zwei Flächen mit konjugierten Systemen (α, β) und den zugehörigen Laplaceschen Gleichungen der Punktkoordinaten:

$$x_{\alpha\beta} = a\,x_\alpha + b\,x_\beta, \qquad x'_{\alpha\beta} = a'\,x'_\alpha + b'\,x'_\beta, \tag{43}$$

von denen wir voraussetzen, daß ihre mittels ungleichnamiger Tangenten erhaltenen Laplaceschen Transformierten zusammenfallen, im Hinblick auf (41) also:

$$\widehat{x} = x - \frac{x_\alpha}{b} = x' - \frac{x'_\beta}{a'}, \quad \check{x} = x - \frac{x_\beta}{a} = x' - \frac{x'_\alpha}{b'}. \tag{44}$$

Macht man den, für den dreidimensionalen Raum zweifellos zulässigen Ansatz:

$$(x' - x)_{\alpha\beta} = \mathfrak{A}\,(x' - x)_\alpha + \mathfrak{B}\,(x' - x)_\beta + \mathfrak{C}\,(x' - x), \tag{45}$$

wobei die Komponenten des Vektors $x' - x$ als das erste Tripel der Strahlenkoordinaten erscheinen, so kann man die Gleichung (45) mit Hilfe von (43) und (44) so umformen, daß nur noch Glieder mit x_α, x_β $x' - x$ darin vorkommen. Da offenbar die Determinante $(x_\alpha, x_\beta, x' - x) \neq 0$ sein muß, findet man:

$$\mathfrak{A} = a + a', \quad \mathfrak{B} = b + b', \quad \mathfrak{C} = -(ab' + ab'). \tag{46}$$

Man bestätigt leicht, daß auch das zweite Tripel der Strahlenkoordinaten:

$$y(z' - z) - z(y' - y) = yz' - zy' \quad \text{usw.}$$

derselben Differentialgleichung (45) genügt. Mithin: *Sind* (x) *und* (x') *zwei gegenüberliegende Flächen eines viergliedrigen Laplaceschen Zyklus mit den Differentialgleichungen* (43) *ihrer laufenden Koordinaten, so genügen in der Kongruenz der Verbindungsgeraden* $x\,x'$ *die sechs Strahlenkoordinaten* $x' - x, \ldots, y\,z' - z\,y', \ldots$ *der gleichen Laplaceschen Differentialgleichung*:

$$\theta_{\alpha\beta} = (a + a')\,\theta_\alpha + (b + b')\,\theta_\beta - (a\,b' + b\,a')\,\theta. \tag{47}$$

Damit ist aber der am Schluß von Art. **1.** formulierte Satz von neuem bewiesen.

3. Von viergliedrigen Laplaceschen Zyklen sind bislang nur einige wenige, mit der Verbiegung der Flächen zweiten Grades zusammenhängende Typen bekannt geworden[20]. Auf die Anwendbarkeit beliebiger Projektivitäten sei hingewiesen. Unser neuer Satz legt den Versuch nahe, eine allgemeine Theorie dieser geometrischen Gebilde von den W-Kongruenzen aus zu entwickeln. Damit ein W-System Diagonalkongruenz eines viergliedrigen Laplaceschen Zyklus wird, genügt es den vorstehenden Ausführungen zufolge, daß auf einer der Hilfsflächen $(x^{(k)})$ von § 1 das Netz (α, β) aus konjugierten Kurven besteht. Die Relation, die dieser Bedingung entspringt, ist aber kompliziert und für die weitere Behandlung des Problems wenig geeignet. Stattdessen soll hier eine Methode auseinandergesetzt werden, die zum mindesten den Vorzug besitzt, eine Grundlage für die bei späterer Gelegenheit zu erörternden harmonischen Transformationen zu liefern, deren die viergliedrigen Laplaceschen Zyklen auch im allgemeinen Falle fähig sind.

Bildet man $x'_{\alpha\beta}$ aus jeder der beiden nach (44) geforderten Relationen:

$$x'_\alpha = \frac{b'}{a}\,x_\beta + b'(x' - x), \quad x'_\beta = \frac{a'}{b}\,x_\alpha + a'(x' - x) \tag{48}$$

und setzt die Ausdrücke in die zweite Gleichung (43) ein, so erhält man unter Berücksichtigung der ersten und nach Beseitigung der Ableitungen x'_α, x'_β:

$$\left\{\begin{aligned} x_{\alpha\alpha} &= \left(b + b' + \frac{b_\alpha}{b} - \frac{a'_\alpha}{a'}\right) x_\alpha + b\left(b' - \frac{a'_\alpha}{a'}\right)(x' - x),\\ x_{\alpha\beta} &= a\,x_\alpha + b\,x_\beta,\\ x_{\beta\beta} &= \left(a + a' + \frac{a_\beta}{a} - \frac{b'_\beta}{b'}\right) x_\beta + a\left(a' - \frac{b'_\beta}{b'}\right)(x' - x). \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Bringt man zum Ausdruck, daß $(x_{\alpha\alpha})_\beta = (x_{\alpha\beta})_\alpha$, $(x_{\beta\beta})_\alpha = (x_{\alpha\beta})_\beta$ sein muß, so findet man, indem man abermals die Ableitungen von x' beseitigt, die Integrabilitätsbedingungen, die den vier Koeffizienten a, b, a', b' der beiden Laplaceschen Gleichungen auferlegt werden. Setzt man abkürzend:

$$a - \frac{b_\beta}{b} = A, \quad b - \frac{a_\alpha}{a} = B, \quad a' - \frac{b'_\beta}{b'} = A', \quad b' - \frac{a'_\alpha}{a'} = B', \tag{50}$$

---

[20]) S. die unter [3]), [5]) und [7]) angeführten Arbeiten.

so lauten diese:

(51) $A_\alpha + bA = B'_\beta + a'B' = AB', \quad B_\beta + aB = A'_\alpha + b'A' = BA'.$

Liegt ein Lösungssystem a, b, a', b' von (50), (51) vor, so lassen sich die Relationen (48), (49) als ein unbeschränkt integrables, lineares und homogenes System partieller Differentialgleichungen für die drei gesuchten Funktionen $u_1 = x_\alpha$, $u_2 = x_\beta$, $u_3 = x' - x$ auffassen, das dann drei linear unabhängige Lösungstripel zuläßt. Da x sich durch Quadratur ergibt, so ist ersichtlich, daß *durch das System* (50), (51) *ein viergliedriger Laplacescher Zyklus konjugierter Netze eindeutig bis auf Affinitäten definiert ist.*

Angemerkt seien drei aus (50), (51) folgende Relationen:

$$(aa'AA')_\alpha = 0, \quad (bb'BB')_\beta = 0,$$
$$(a + a' + A + A')_\alpha = (b + b' + B + B')_\beta.\text{[21]}$$

Die Laplaceschen Gleichungen für die Netze $(\hat{x})$ und $(\check{x})$ werden:

(52) $$\hat{x}_{\alpha\beta} = A\hat{x}_\alpha + B'\hat{x}_\beta, \qquad \check{x}_{\alpha\beta} = A'\check{x}_\alpha + B\check{x}_\beta.$$

Unterwirft man irgend eine Laplacesche Gleichung von der Form:

$$x_{\alpha\beta} = a x_\alpha + b x_\beta$$

in vier aufeinander folgenden Schritten der durch $\hat{x} = x - \frac{x_\alpha}{b}$ definierten α-Transformation, wie wir sie nennen wollen — das entsprechende Ergebnis für die β-Transformation ist leicht zu übersehen —, so erhält man die folgenden, der Reihe nach an die Stelle von a, b tretenden Koeffizientenpaare, wobei für den Augenblick auch a', b' nur als Abkürzungen dienen:

$$a - \frac{b_\beta}{b} = A, \quad b + \frac{A_\alpha}{A} = B'; \qquad A - \frac{B'_\beta}{B'} = a', \quad B' + \frac{a'_\alpha}{a'} = b';$$
$$a' - \frac{b'_\beta}{b'} = A', \quad b' + \frac{A'_\alpha}{A'} = B; \qquad A' - \frac{B_\beta}{B} = \bar{a}, \quad B + \frac{\bar{a}_\alpha}{\bar{a}} = \bar{b}.$$

Wird nun verlangt, daß das letzte Koeffizientenpaar $\bar{a}, \bar{b}$ wieder mit a, b übereinstimmt, so hat man genau die 8 Differentialrelationen (50), (51), welche die Integrabilitätsbedingungen für (48), (49) bilden. Daraus ist zu entnehmen: *Führt eine Laplacesche Kette nach vier Operationen auf die ursprüngliche Gleichung zurück, so läßt diese letztere drei linear unabhängige Integrale zu, die dabei in sich selber übergehen, gehört also zu einem konjugierten System, das in einem viergliedrigen Laplaceschen Zyklus enthalten ist.*

---

[21]) Setzt man: $\omega = \int [(b + b' + B + B')\,d\alpha + (a + a' + A + A')\,d\beta]$, so wird: $(x_\alpha, x_\beta, x' - x) = \text{const} \cdot ab\,e^{\omega}$.

4. Wir bestimmen noch in der Kongruenz der Diagonalstrahlen $x x'$ die Brennmäntel $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$. Für $\hat{x}\check{x}$ hätte man a, b, a', b' bezüglich durch A, B', A', B zu ersetzen. Differentiiert man den Ansatz

$$(53)\qquad x^{(1,2)} = \frac{x + \lambda x'}{1+\lambda} = x + \frac{\lambda}{1+\lambda}(x' - x),$$

wobei man wieder x'_α und x'_β mittels (48) beseitigt, so ergibt sich:

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned} x^{(1,2)}_\alpha &= \frac{1}{1+\lambda}\left(x_\alpha + \lambda \frac{b'}{a} x_\beta\right) + \left[\frac{b'\lambda}{1+\lambda} + \frac{\lambda_\alpha}{(1+\lambda)^2}\right](x' - x),\\ x^{(1,2)}_\beta &= \frac{1}{1+\lambda}\left(\lambda \frac{a'}{b} x_\alpha + x_\beta\right) + \left[\frac{a'\lambda}{1+\lambda} + \frac{\lambda_\beta}{(1+\lambda)^2}\right](x' - x). \end{aligned}\right.$$

Soll nun $d x^{(1,2)}$ mit der Richtung $x' - x$ zusammenfallen, so folgt:

$$d\alpha + \lambda \frac{a'}{b} d\beta = 0, \qquad \lambda \frac{b'}{a} d\alpha + d\beta = 0,$$

hieraus das Verhältnis λ, nach dem $x x'$ durch die Brennpunkte harmonisch geteilt wird, sowie das Paar der Differentialgleichungen für die Developpablen:

$$(55)\qquad \lambda = \pm \sqrt{\frac{a b}{a' b'}}, \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = \mp \sqrt{\frac{b b'}{a a'}}.$$

Die Realität der Brennflächen setzt $a b a' b' > 0$ voraus; nach § 2, 3 haben dann die α- und die β-Kurven auf (x) und ebenso auf (x') entgegengesetzten Windungssinn. Um zu bestätigen, daß auf den Brennmänteln (α, β) das Netz der Asymptotenlinien ist, hat man (bei Beschränkung auf die α-Kurven) zu zeigen, daß $x^{(1,2)}_{\alpha\alpha}$, durch x_α, x_β, $x' - x$ ausgedrückt, nur die in den beiden Formeln (54) auftretende lineare Verbindung von x_α und x_β enthält. Wir setzen:

$$x^{(1,2)}_{\alpha\alpha} = P x_\alpha + Q x_\beta + R(x' - x)$$

und finden, indem wir die erste Relation (54) nach α differentiieren:

$$P = -\frac{2\lambda_\alpha}{(1+\lambda)^2} + \frac{1}{1+\lambda}\left(b + b' + \frac{b_\alpha}{b} - \frac{a'_\alpha}{a'}\right),$$

$$Q = \frac{b'}{a}\left[\frac{2\lambda_\alpha}{(1+\lambda)^2} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(b + b' + \frac{b'_\alpha}{b'} - \frac{a_\alpha}{a}\right)\right],$$

mit Berücksichtigung von (55) also in der Tat: $\lambda \frac{b'}{a} P - Q = 0$.

§ 4.

Ein spezieller, mit der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids zusammenhängender Laplacescher Zyklus.

1. Es sei h ein Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$(56)\qquad (\log h)_{\alpha\beta} = h - \frac{1}{h}.$$

Dann ist das zuerst von Darboux[22]) betrachtete System:

$$(57)\qquad \begin{cases} \xi_{\alpha\alpha} = \dfrac{h_\alpha}{h}\xi_\alpha + \xi', \qquad \xi_{\alpha\beta} = h\,\xi, \qquad \xi_{\beta\beta} = \dfrac{h_\beta}{h}\xi_\beta + \xi', \\[2ex] \qquad\qquad \xi'_\alpha = \dfrac{1}{h}\,\xi_\beta, \qquad \xi'_\beta = \dfrac{1}{h}\,\xi_\alpha, \end{cases}$$

das analoge Relationen:

$$(58)\qquad \xi'_{\alpha\alpha} = -\frac{h_\alpha}{h}\xi'_\alpha + \xi, \quad \xi'_{\alpha\beta} = \frac{1}{h}\xi', \quad \xi'_{\beta\beta} = -\frac{h_\beta}{h}\xi'_\beta + \xi$$

nach sich zieht, unbeschränkt integrabel und läßt vier linear unabhängige Lösungspaare zu, die wir mit $\xi, \xi', \eta, \eta', \zeta, \zeta', \vartheta, \vartheta'$ bezeichnen[23]). Die konjugierten Netze (α, β), die von den beiden Punkten x und x':

$$(59)\qquad x = \frac{\xi}{\vartheta}\ \left(\text{d. h.: } x = \frac{\xi}{\vartheta},\ y = \frac{\eta}{\vartheta},\ z = \frac{\zeta}{\vartheta}\right), \quad x' = \frac{\xi'}{\vartheta'}$$

beschrieben werden, bilden mit den dazwischengeschalteten Netzen $(\widehat{x})$ und $(\check{x})$:

$$(60)\qquad \widehat{x} = \frac{\xi_\alpha}{\vartheta_\alpha} = \frac{\xi'_\beta}{\vartheta'_\beta}, \qquad \check{x} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta_\beta} = \frac{\xi'_\alpha}{\vartheta'_\alpha}$$

einen viergliedrigen Laplaceschen Zyklus. Das erkennt man mittels (43), (44) auf Grund der von x und x' erfüllten Laplaceschen Gleichungen:

$$(61)\qquad x_{\alpha\beta} = -\frac{\vartheta_\beta}{\vartheta}x_\alpha - \frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta}x_\beta, \qquad x'_{\alpha\beta} = -\frac{\vartheta'_\beta}{\vartheta'}x'_\alpha - \frac{\vartheta'_\alpha}{\vartheta'}x'_\beta.$$

Aus der durch Differentiieren erweisbaren Eigenschaft des Systems (57), daß für ein Lösungspaar ϑ, ϑ' bzw. für zwei Lösungspaare $\vartheta, \vartheta', \overline{\vartheta}, \overline{\vartheta'}$:

$$(62)\qquad \begin{cases} \text{a)}\ \dfrac{2}{h}\vartheta_\alpha\vartheta_\beta - \vartheta^2 - \vartheta'^2 = \text{const}, \\[2ex] \text{b)}\ \dfrac{1}{h}(\vartheta_\alpha\overline{\vartheta}_\beta + \vartheta_\beta\overline{\vartheta}_\alpha) - \vartheta\overline{\vartheta} - \vartheta'\overline{\vartheta}' = \text{const} \end{cases}$$

wird, kann gefolgert werden, daß die Netze $(\widehat{x})$ und $(\check{x})$ die gleiche (elliptisch gekrümmte) F^2 bedecken, in bezug auf die dann die Flächen (x)

---

[22]) Darboux behandelt (Leçons sur la Théorie gén. des Surf. 3, S. 471) das Problem, diejenigen Flächen zu bestimmen, die in jedem Punkte zwei konjugierte, gleichzeitig eine feste F^2 berührende Tangenten zulassen. Der viergliedrige Laplacesche Zyklus und der Zusammenhang mit der Verbiegung des Paraboloids $z = xy$ finden sich bei Darboux noch nicht. Hierzu vgl. die unter [5]) genannte Arbeit, ferner betreffs der Transformation der Biegungsflächen: Jonas, Ricerche sulle trasformazioni delle superficie applicabili sul paraboloide iperbolico equilatero. Annali di Mat. (4) 2 (1924–25), S. 161.

[23]) Durch Differentiation erkennt man, daß die daraus gebildete vierreihige Determinante $(\xi_\alpha, \xi_\beta, \xi, \xi') = \text{const} \cdot h$ wird.

und (x') polarreziprok werden[24]). Man gelangt zu diesem Ergebnis am einfachsten, indem man für ein erstes Lösungspaar ϑ, ϑ' die Anfangswerte von ϑ_α, ϑ_β, ϑ, ϑ' (für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$) so wählt, daß in (62a) die Konstante $+1$, also:

(63) $$2\,\vartheta_\alpha \vartheta'_\alpha = 2\,\vartheta_\beta \vartheta'_\beta = \vartheta^2 + \vartheta'^2 + 1$$ [25])

wird. Dann ist durch ϑ, ϑ' intrinsek ein Orthogonalnetz (α, β) auf der Einheitskugel $\sum \widehat{X}^2 = 1$ durch das Quadrat des Linienelements:

(64) $$\sum d\widehat{X}^2 = \frac{d\alpha^2}{(\vartheta_\alpha)^2} + \frac{d\beta^2}{(\vartheta'_\beta)^2} \qquad \left(\sqrt{e} = \frac{1}{\vartheta_\alpha},\ \sqrt{g} = \frac{1}{\vartheta'_\beta}\right)$$

definiert; in der Tat erweist sich die Gaußsche Relation als erfüllt. Drei weitere Lösungspaare ξ, ξ', η, η', ζ, ζ' von (57) sind gegeben durch:

(65) $$\xi = \vartheta \widehat{X} + \vartheta'_\beta \widehat{X}_\beta, \quad \xi' = \vartheta' \widehat{X} + \vartheta_\alpha \widehat{X}_\alpha.$$

Andererseits wird (es steht jetzt $\widehat{X}$, $\breve{X}$ an Stelle von $\widehat{x}$, $\breve{x}$):

(66) $$\widehat{X} = \frac{\xi_\alpha}{\vartheta_\alpha} = \frac{\xi'_\beta}{\vartheta'_\beta}, \quad \breve{X} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta_\beta} = \frac{\xi'_\alpha}{\vartheta'_\alpha},$$

wobei $\breve{X}$ ein zweites Orthogonalnetz (α, β) derselben Einheitskugel durchläuft, das zu $(\widehat{X})$ schmiegungsverwandt ist. Wird die Summe $\sum$ über die drei Buchstaben ξ, η, ζ erstreckt, so bestehen für das Lösungssystem die Relationen:

(67) $$\begin{cases} \sum \xi^2 = \vartheta^2 + 1, & \sum \xi'^2 = \vartheta'^2 + 1, & \sum \xi\xi' = \vartheta\vartheta', \\ \sum \xi' d\xi = \vartheta' d\vartheta, & \sum (\xi_\alpha)^2 = (\vartheta_\alpha)^2, & \sum (\xi_\beta)^2 = (\vartheta_\beta)^2 \end{cases}$$

[gleichzeitig:

$$\sum \xi\, d\xi' = \vartheta\, d\vartheta', \qquad \sum (\xi'_\alpha)^2 = (\vartheta'_\alpha)^2, \qquad \sum (\xi'_\beta)^2 = (\vartheta'_\beta)^2].$$

Der zugehörige Laplacesche Zyklus (x), $(\widehat{X})$, (x'), $(\breve{X})$ ist also dadurch ausgezeichnet, daß die beiden Netze $(\widehat{X})$ und $(\breve{X})$ auf der Einheitskugel um O liegen. Auf den allgemeinen Fall einer nicht-geradlinigen F^2 führt eine Raumkollineation. Mit einem, entsprechend (67) normierten Lösungssystem verbindet sich eine Biegungsfläche $(\mathbf{x})$ des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids:

(68) $$\mathbf{x} = \int (\xi' d\vartheta + \xi\, d\vartheta').$$

---

[24]) Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Tatsache, daß, wenn für eine (vierreihige) quadratische Matrix die Orthogonalitätsbedingungen bezüglich der Zeilen erfüllt sind, das Gleiche von den Spalten gilt.

[25]) (63), d. h. das Tschebyschefsche Problem für die Differentialform

$$\frac{2\, d\vartheta\, d\vartheta'}{\vartheta^2 + \vartheta'^2 + 1},$$

kann auch als Ausgangspunkt dienen und hat dann das System (57) für ϑ, ϑ', sowie (56) im Gefolge.

Es wird nämlich auf Grund von (67):

(69) $$\sum d\mathfrak{x}^2 = (1+\vartheta'^2)d\vartheta^2 + 2\vartheta\vartheta' d\vartheta d\vartheta' + (1+\vartheta^2)d\vartheta'^2;$$

das ist aber das Quadrat des Linienelements für das Paraboloid:

(70) $$\mathfrak{x} = \vartheta, \qquad \mathfrak{y} = \vartheta', \qquad \mathfrak{z} = \vartheta\vartheta',$$

d. h.

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Auf $(\mathfrak{x})$ ist (α, β) das Netz der Asymptotenlinien; durch $\alpha \pm \beta = \text{const}$ ist das permanente, d. i. der Biegungsfläche und dem Paraboloid gemeinsame, konjugierte System dargestellt, das mithin reell ist (Beschränkung auf sogenannte Verbiegungen erster Art). Die Richtungen der Kugelradien $\hat{X}$ und $\check{X}$ sind die der $\mathfrak{z}$-Achsen der zu beiden Seiten der Biegungsfläche rollenden Paraboloide.

Neu ist in erster Linie im Anschluß an § 3 die Feststellung, daß *in dem betrachteten Laplaceschen Zyklus die zueinander rechtwinkligen Geraden* $x x'$ *und* $\hat{X}\check{X}$, *reziproke Polaren bezüglich der Einheitskugel um* O, *zwei W-Kongruenzen bilden.* In beiden sind (siehe § 3, 4) die Developpablen durch $\alpha \pm \beta = \text{const}$ gegeben, entsprechen also dem permanenten konjugierten System der Biegungsfläche $(\mathfrak{x})$[26]). Die Brennpunkte $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ von $x x'$ und $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}$ von $\hat{X}\check{X}$ werden:

(71) $$\text{a)}\ x^{(1,2)} = \frac{\xi \pm h\,\xi'}{\vartheta \pm h\,\vartheta'}, \qquad \text{b)}\ \bar{x}^{(1,2)} = \frac{\xi_\alpha \pm \xi_\beta}{\vartheta_\alpha \pm \vartheta_\beta}.$$

Wir bemerken, daß *die Tangenten der auf den Brennmänteln* $(x^{(1)})$ *und* $(x^{(2)})$ *konstruierten Kurven* $h = \text{const}$ *bezüglich durch* $\bar{x}^{(1)}$ *und* $\bar{x}^{(2)}$ *gehen.* Das folgt, am einfachsten bei Verwendung homogener Koordinaten, aus den Beziehungen:

(72) $$(\xi + h\,\xi')_\alpha = \xi_\alpha + \xi_\beta + h_\alpha \xi', \qquad (\xi + h\,\xi')_\beta = \xi_\alpha + \xi_\beta + h_\beta \xi'.$$

2. Das Verhalten des Laplaceschen Zyklus bei Anwendung der *Bianchi-Transformation* B_k auf die Biegungsfläche habe ich in den erwähnten früheren Arbeiten noch nicht untersucht. Die Tatsache, daß die Diagonalen W-Systeme bilden, läßt nun die folgende bemerkenswerte Eigenschaft der Transformation vermuten, die wir beweisen werden: *Wird eine Biegungsfläche des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids durch die Operation* B_k *in eine neue solche Fläche übergeführt, so hängen die beiden zugehörigen Laplaceschen Zyklen in der Weise zusammen, daß zwischen den vier Brennmänteln der Diagonalstrahlensysteme des einen und den entsprechenden Brennmänteln des anderen Zyklus asymptotische Flächentransformationen, also berührende W-Kongruenzen vermitteln.*

---

[26]) Der Kürze halber verzichte ich darauf, schon in diesem Zusammenhang die Theorie der R-Systeme (siehe § 5) heranzuziehen.

Wir stellen zunächst, an § 4 der unter [22]) genannten Arbeit anknüpfend, die Formeln für die Transformation B_k auf. Es seien a, b zwei durch die Relation:

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{73}$$

verbundene Konstanten[27]). Wird, und zwar gleicherweise in η, ζ, ϑ:

$$\xi_1 = t\,\xi_\alpha - a\,\xi - b\,\xi', \qquad \xi_1' = \frac{2\,a\,b}{t}\,\xi_\alpha' - a\,\xi' - b\,\xi \tag{74}$$

gesetzt, so überzeugt man sich durch einfache Rechnungen davon, daß $\xi_1, \xi_1', \ldots, \vartheta_1, \vartheta_1'$ ein dem System (57) völlig analoges, einschließlich der Bedingungen (67), erfüllen, wofern t Integral der totalen Riccatischen Gleichung:

$$t_\alpha = -\frac{1}{2\,b}\,t^2 - \frac{h_\alpha}{h}\,t + a, \qquad t_\beta = -\frac{h}{2\,a}\,t^2 + \frac{b}{h} \tag{75}$$

ist; die neue Lösung der Differentialgleichung (56) wird dabei:

$$h_1 = \frac{h\,t^2}{2\,a\,b}. \tag{76}$$

Beiläufig sei die Darstellung der transformierten Biegungsfläche $(\mathfrak{x}_1)$ erwähnt, deren doppelte Gestalt erkennen läßt, daß $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ die beiden Flächen berührt:

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x} = -(\vartheta' + a\,\vartheta_1' + b\,\vartheta_1)\,\xi - (\vartheta + a\,\vartheta_1 + b\,\vartheta_1')\,\xi' \\ \phantom{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}} = (\vartheta_1' + a\,\vartheta' + b\,\vartheta)\,\xi_1 + (\vartheta_1 + a\,\vartheta + b\,\vartheta')\,\xi_1'. \end{cases} \tag{77}$$

Der transformierte Laplacesche Zyklus, in dem die Netze $(\hat{X}_1)$, $(\check{X}_1)$ wieder die Einheitskugel um O bedecken, ist, entsprechend (59), (66), gegeben durch:

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\vartheta_1}, \quad \hat{X}_1 = \frac{(\xi_1)_\alpha}{(\vartheta_1)_\alpha} = \frac{(\xi_1')_\beta}{(\vartheta_1')_\beta}, \quad x_1' = \frac{\xi_1'}{\vartheta_1'}, \quad \check{X}_1 = \frac{(\xi_1)_\beta}{(\vartheta_1)_\beta} = \frac{(\xi_1')_\alpha}{(\vartheta_1')_\alpha}. \tag{78}$$

Die Brennpunkte des Strahls $x_1\,x_1'$ erhält man nach (71a):

$$x_1^{(1,2)} = \frac{\xi_1 \pm h_1\,\xi_1'}{\vartheta_1 \pm h_1\,\vartheta_1'}. \tag{79}$$

Wir zeigen jetzt also, daß die Gerade $x^{(1)}\,x_1^{(1)}$ Tangente an die Fläche $(x^{(1)})$ ist. Dazu muß in ξ, η, ζ, ϑ eine Relation von der Form:

$$\xi_1 + h_1\,\xi_1' = \lambda_0\,(\xi + h\,\xi') + \lambda_1\,(\xi + h\,\xi')_\alpha + \lambda_2\,(\xi + h\,\xi')_\beta$$

bestehen. Daß dies der Fall ist, ergibt sich aus (72) und aus dem Umstand, daß auch die linke Seite ξ_α und ξ_β nur in der Verbindung $\xi_\alpha + \xi_\beta$ enthält:

$$\xi_1 + h_1\,\xi_1' = t\,(\xi_\alpha + \xi_\beta) - \left(a + \frac{h}{2\,a}\,t^2\right)\xi - \left(b + \frac{h}{2\,b}\,t^2\right)\xi'.$$

---

[27]) Die Bianchische Konstante k hat den Wert: $k = -2\,a\,b$. Gleichzeitiger Wechsel des Vorzeichens bei a und b ist für die Transformation belanglos. Vertauschung von a und b läßt zwar k ungeändert, ändert aber die *Klasse* der Transformation: $B(a,b) \equiv B_k$, $B(b,a) \equiv B_k'$.

Aus der im Anschluß an (72) leicht zu bestätigenden Umkehrbarkeit des Transformationsprozesses folgt dann, daß $x^{(1)} x_1^{(1)}$ auch die Fläche $(x_1^{(1)})$ berührt. Ohne Rechnung schließt man aus der Polarverwandtschaft auf den analogen Zusammenhang zwischen den Brennmänteln der von den Diagonalen $\hat{X}\check{X}$ und $\hat{X}_1\check{X}_1$ gebildeten W Kongruenzen. Ich erwähne noch kurz unter Hinweis auf § 1, 3 eine *wechselseitige Lagenbeziehung zwischen den Vierflachen* $x\hat{X}x'\check{X}$ *und* $x_1\hat{X}_1x_1'\check{X}_1$: *jede der vier Ecken des einen liegt in einer der vier Ebenen des anderen.*

§ 5.

Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids.

1. Als Einleitung zu diesem, die Verbiegung der Mittelpunktsflächen zweiten Grades behandelnden Abschnitt stellen wir weiterhin benutzte Grundtatsachen aus der Theorie der *R-Flächen* und *R-Kongruenzen* [28]) zusammen. Sie sind wesentlich für die Erfassung der vielseitigen projektiven Beziehungen, die sich in eigenartiger Weise mit dem metrischen Problem verbinden.

I. *Bilden die Tangenten an die Kurven eines konjugierten Systems einer Fläche zwei W-Kongruenzen, so heißt dieselbe R-Fläche, die W-Systeme R-Kongruenzen, das ausgezeichnete konjugierte System R-Netz. Das letztere ist stets isotherm-konjugiert, also bei geeigneter Wahl der asymptotischen Parameter* α, β *(es sei* $K < 0$ *vorausgesetzt) durch* $\alpha \pm \beta = \text{const}$ *gegeben.*

II. *Bilden in einem isotherm-konjugierten System die Tangenten der einen Kurvenschar eine W-Kongruenz, so gilt das auch von den Tangenten der anderen; die Fläche ist eine R-Fläche, die Tangentensysteme sind R-Kongruenzen. Daraus folgt dann, daß die zweiten Brennmäntel der R-Kongruenzen wieder R-Flächen, die Laplaceschen Transformierten der R-Netze also wieder R-Netze sind.*

Zur Erläuterung sei folgendes bemerkt. Ist (x) eine auf die Asymptotenlinien (α, β) bezogene Fläche, so hat man für den zweiten Brennmantel (x_1) der allgemeinsten, aus Tangenten von (x) bestehenden W-Kongruenz die Darstellung:

$$x_1 = x + \frac{2}{A_\beta - B_\alpha}(B x_\alpha - A x_\beta); \tag{80}$$

A und B sind die Lösungen der simultanen Differentialgleichungen:

$$A_\alpha = \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} A + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} B, \qquad B_\beta = \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} A + \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} B; \tag{81}$$

[28]) Die Anfänge verdankt man Demoulin und Tzitzeica (verschiedene Mitteilungen in Bd. 158 und 154 der C. R. de l'Ac. des Sc.). Vgl. Jonas, Über die Konstruktion der W-Kongruenzen zu einem gegebenen Brennflächenmantel und über die Transformation der R-Flächen. Jahresber. der Dtsch. Math.-Vereinig. 29 (1920), S. 40.

die Christoffelschen Symbole beziehen sich auf das Quadrat des Linienelements von (x). Die auf (x) von den Strahlen berührten Kurven sind definiert durch:

(82) $$A\,d\alpha + B\,d\beta = 0, \qquad \text{d. i.: } \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{A}{B} = \lambda.$$

Aus (81) folgt, damit gleichwertig, die Differentialgleichung für λ:

(83) $$(\log\lambda)_{\alpha\beta} = \left(\lambda \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)_\alpha - \left(\frac{1}{\lambda}\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}\right)_\beta.$$

Sollen nun für ein konjugiertes Netz $\frac{d\beta}{d\alpha} = \pm\lambda$ beide Tangentenscharen W-Kongruenzen vorstellen, so zerfällt (83), da von λ und $-\lambda$ erfüllt, in:

$$(\log\lambda)_{\alpha\beta} = 0, \qquad \left(\lambda \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)_\alpha = \left(\frac{1}{\lambda}\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}\right)_\beta;$$

mithin: $\lambda = \frac{f_1(\alpha)}{f_2(\beta)}$, bei geeigneter Wahl von α, β also: $\lambda = 1$ und als *charakteristische Bedingung für das Asymptotenliniennetz einer R-Fläche:*

(84) $$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}_\beta = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}_\alpha, \quad \text{kürzer: } p_\beta = q_\alpha \text{ für } p = -\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \; q = -\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Das R-Netz der Fläche (x), gleichzeitig die Doppelschar der Developpablen in jeder der beiden R-Kongruenzen ist durch $\alpha \pm \beta = \text{const}$ gegeben.

Liegt andererseits auf (x) ein isotherm-konjugiertes Netz $\alpha \pm \beta = \text{const}$ vor, in dem die Tangenten der Kurvenschar $\alpha - \beta = \text{const}$ eine W-Kongruenz bilden, so genügt $\lambda = 1$ der Differentialgleichung (83), wie ersichtlich, aber auch $\lambda = -1$, so daß auch die Kurven $\alpha + \beta = \text{const}$ eine W-Kongruenz liefern.

Wichtig ist ferner ein *Reziprozitätstheorem*[29]) für R-Flächen (bzw. R-Netze) und R-Kongruenzen, dem wir für unseren Zweck die folgende Fassung geben:

III. *Läßt sich zu einer Fläche ein W-System derart konstruieren, daß seine Strahlen den Normalen der Fläche parallel werden und daß Korrespondenz zwischen den Asymptotenlinien seiner Brennmäntel und denjenigen der Fläche besteht, so ist die Fläche eine R-Fläche und das W-System eine R-Kongruenz. Dem R-Netz der R-Fläche entsprechen die Developpablen der reziproken R-Kongruenz und damit auch die R-Netze ihrer Brennmäntel. Die Normalen der letzteren sind parallel zu den Tangenten des R-Netzes der R-Fläche. Allgemein besteht danach zwischen den beiden aus der R-Fläche und aus der reziproken R-Kongruenz hervorgehenden Laplaceschen Ketten die Beziehung, daß jeweils die Strahlen in der einen Kette den Flächennormalen in der anderen parallel sind und umgekehrt. Zugleich ist*

[29]) Siehe § 6 meiner unter [28]) angeführten Abhandlung.

klar, daß eine R-Kongruenz ein W-System ist, bei dem die Darboux-Laplacesche Differentialgleichung für die sechs Strahlenkoordinaten gleiche Invarianten besitzt.

Wir gehen zum Beweise von einer auf die Asymptotenlinien (α, β) bezogenen Fläche (x) aus und bezeichnen mit ξ den normierten Richtungsvektor der Flächennormalen $\left(\xi = \sqrt{\varrho}\, X,\ K = -\frac{1}{\varrho^2}\right)$. Es ist dann wie in § 1 (3):

$$x_\alpha = \eta_\alpha \zeta - \zeta_\alpha \eta, \qquad x_\beta = -(\eta_\beta \zeta - \zeta_\beta \eta).$$

Die von ξ, η, ζ zu erfüllende Moutardsche Differentialgleichung ergänzen wir in bekannter Weise zu einem vollständigen System:

$$(85) \qquad \xi_{\alpha\alpha} = \theta_\alpha \xi_\alpha + p\,\xi_\beta - P\,\xi, \quad \xi_{\alpha\beta} = M\,\xi, \quad \xi_{\beta\beta} = q\,\xi_\alpha + \theta_\beta \xi_\beta - Q\,\xi;$$

dabei haben p, q dieselbe Bedeutung wie in (84), ferner ist:

$$(86) \qquad M = \theta_{\alpha\beta} + p\,q, \quad P = p_\beta + \theta_\beta\, p, \quad Q = q_\alpha + \theta_\alpha\, q.$$

Die Größen θ, p, q müssen den Integrabilitätsbedingungen für (85) genügen:

$$(87) \qquad M_\alpha = \theta_\alpha M - p\,Q - P_\beta, \quad M_\beta = \theta_\beta M - q\,P - Q_\alpha.$$

Es sei jetzt $(\bar{x})$ die Mittelfläche der nach Voraussetzung existierenden W-Kongruenz, deren Strahlen die Richtung ξ der Flächennormalen von (x) haben. Für die beiden Brennmäntel $(\bar{x}_1)$, $(\bar{x}_2)$ sei der Ansatz gemacht:

$$(88) \qquad \bar{x}_1 = \bar{x} + t\,\xi, \quad \bar{x}_2 = \bar{x} - t\,\xi.$$

Wir differentiieren und bringen zum Ausdruck, daß für die den Developpablen entsprechenden, in Anbetracht der geforderten Korrespondenz der Asymptotenlinien auch auf (x) konjugierten Fortschreitungen $\frac{d\beta}{d\alpha} = \pm \lambda$ sich

$$(\bar{x}_1)_\alpha + \lambda(\bar{x}_1)_\beta = \bar{x}_\alpha + \lambda\,\bar{x}_\beta + t\,(\xi_\alpha + \lambda\,\xi_\beta) + (t_\alpha + \lambda\,t_\beta)\,\xi,$$
$$(\bar{x}_2)_\alpha - \lambda(\bar{x}_2)_\beta = \bar{x}_\alpha - \lambda\,\bar{x}_\beta - t\,(\xi_\alpha - \lambda\,\xi_\beta) - (t_\alpha - \lambda\,t_\beta)\,\xi$$

von ξ nur durch einen Faktor unterscheiden. Wir erhalten so, indem wir zwei Koeffizienten μ, ν neben λ als unbekannte Funktionen einführen:

$$(89) \qquad \bar{x}_\alpha = -t\,\lambda\,\xi_\beta + \mu\,\xi, \qquad \bar{x}_\beta = -\frac{t}{\lambda}\,\xi_\alpha + \nu\,\xi,$$

$$(90) \qquad \begin{cases} (\bar{x}_1)_\alpha = t\,(\xi_\alpha - \lambda\,\xi_\beta) + (\mu + t_\alpha)\,\xi, \\ (\bar{x}_1)_\beta = -\frac{t}{\lambda}\,(\xi_\alpha - \lambda\,\xi_\beta) + (\nu + t_\beta)\,\xi. \end{cases}$$

Sollen auf $(\bar{x}_1)$ die Kurven (α, β) die Asymptotenlinien sein, so müssen sich $(\bar{x}_1)_{\alpha\alpha}$ und $(\bar{x}_1)_{\beta\beta}$ linear durch $(\bar{x}_1)_\alpha$ und $(\bar{x}_1)_\beta$ ausdrücken lassen, also, wie aus (90) ersichtlich ist, ξ_α und ξ_β nur in der Verbindung $\xi_\alpha - \lambda\,\xi_\beta$ enthalten. Das ergibt mit Benutzung von (85) die Gleichungen:

$$t_\alpha + \left(\theta_\alpha - \frac{\lambda_\alpha}{\lambda}\right) t + \frac{p\,t}{\lambda} + \mu = 0, \quad t_\beta + \left(\theta_\beta + \frac{\lambda_\beta}{\lambda}\right) t + \lambda\,q\,t + \nu = 0,$$

die mit Rücksicht auf das Bestehen analoger Beziehungen für $(\bar{x}_2)$ — dabei ändern t und λ gleichzeitig das Vorzeichen — zerfallen:

$$\frac{t_\alpha}{t} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda} - \theta_\alpha, \quad \frac{t_\beta}{t} = -\frac{\lambda_\beta}{\lambda} - \theta_\beta, \quad \lambda\mu + p\,t = 0, \quad \frac{\nu}{\lambda} + q\,t = 0.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt: $(\log \lambda)_{\alpha\beta} = 0$, so daß bei geeigneter Wahl von α und β sich $\lambda = 1$ setzen läßt. Dann wird (mit Unterdrückung einer verfügbaren multiplikativen Konstanten):

$$(91) \qquad t = -e^{-\theta}, \quad \mu = e^{-\theta} p, \quad \nu = e^{-\theta} q.$$

Stellt man nach Eintragung dieser Werte für (89) die Integrabilitätsbedingung auf, so findet man: $p_\beta = q_\alpha$, d. h. die gegebene Fläche (x) muß eine R-Fläche sein. Für die reziproke R-Kongruenz gilt jetzt die Darstellung:

$$(92) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \int e^{-\theta}\,[(\xi_\beta + p\,\xi)\,d\alpha + (\xi_\alpha + q\,\xi)\,d\beta], \\ \bar{x}_1 = \bar{x} - e^{-\theta}\xi, \quad \bar{x}_2 = \bar{x} + e^{-\theta}\xi. \end{cases}$$

Die weiteren unter III aufgeführten Tatsachen bestätigt man mühelos.

2. Wir fügen noch eine für das folgende in geometrischer Hinsicht wichtige Bemerkung hinzu, die zugleich den analytischen Teil erheblich vereinfacht. Es handelt sich um die *harmonische Beziehung zwischen konjugiertem System und Strahlenkongruenz*. Für den Augenblick, d. h. nur für den vorliegenden Art. 2, sei (α, β) ein konjugiertes Netz auf einer beliebigen Fläche (x) und

$$(93) \qquad x_{\alpha\beta} = a\,x_\alpha + b\,x_\beta \qquad \left(a = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}\right)$$

die von x, y, z erfüllte Laplacesche Gleichung. Eine weitere Lösung ϑ von (93) bestimmt eine zu (x) *harmonische* Kongruenz mit den Brennmänteln:

$$(94) \qquad x' = x - \frac{\vartheta}{\vartheta_\alpha} x_\alpha, \qquad x'' = x - \frac{\vartheta}{\vartheta_\beta} x_\beta,$$

gleichfalls Trägern konjugierter Netze (α, β). Der Strahl liegt also in der Tangentialebene von (x), die Brennpunkte x', x'' auf den konjugierten Tangenten; die Developpablen entsprechen dem konjugierten Netz (α, β).

Der in der Tangentialebene von (x) gelegene Schnittpunkt der Strahlen zweier zu (x) harmonischer Kongruenzen, die durch die Lösungen φ, ψ von (93) definiert sein mögen, beschreibt ein *abgeleitetes* konjugiertes System (α, β):

$$(95) \qquad \tilde{x} = \{x;\, \varphi, \psi\} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi_\beta \\ \psi_\alpha & \psi_\beta \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} x & x_\alpha & x_\beta \\ \varphi & \varphi_\alpha & \varphi_\beta \\ \psi & \psi_\alpha & \psi_\beta \end{vmatrix}.$$

Zu beachten ist einmal, daß die Transformationsprozesse (94), (95) nicht auf ein konjugiertes Netz des dreidimensionalen Raumes, d. h. auf

ein Koordinatentripel x, y, z beschränkt sind, sondern, auf irgendein weiteres Integral der Laplaceschen Gleichung angewendet, ein Integral der betreffenden transformierten Gleichung liefern; ferner, daß die Formel (95) ihre Gestalt nicht ändert, wenn darin die Ableitungen nach α und β durch diejenigen nach zwei beliebig gewählten Bezugsparametern ersetzt werden.

3. Zur Darstellung einer Biegungsfläche $(\mathbf{x})$ des einschaligen Hyperboloids:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{b^2} - \frac{\mathfrak{z}^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b), \tag{96}$$

das in der üblichen Weise auf die Parameter u, v der Erzeugenden bezogen sei:

$$\mathfrak{x} = a\,\frac{1+uv}{u+v}, \quad \mathfrak{y} = b\,\frac{u-v}{u+v}, \quad \mathfrak{z} = c\,\frac{1-uv}{u+v}, \tag{97}$$

bediene ich mich einer in mehreren meiner Arbeiten[30]) benutzten Methode, die sich auf das bewegte Hauptachsendreikant $\triangle\,(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ des auf der Biegungsfläche rollenden Hyperboloids gründet. Dazu müssen u, v als Funktionen der Variablen α, β, denen auf der Biegungsfläche $(\mathbf{x})$ die Asymptotenlinien entsprechen sollen, ein Lösungspaar der simultanen Differentialgleichungen:

$$u_\alpha v_\alpha = \varepsilon_1 H, \quad u_\beta v_\beta = \varepsilon_2 H \qquad (\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1) \tag{98}$$

bilden, in denen

$$H = \frac{1}{a^2}(1+uv)^2 + \frac{1}{b^2}(u-v)^2 + \frac{1}{c^2}(1-uv)^2 \tag{99}$$

ist. Wir beschränken uns auf *Biegungen erster Art*, für die $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ vorausgesetzt ist und damit das *permanente*, d. i. der Biegungsfläche und dem Hyperboloid gemeinsame konjugierte System, gegeben durch: $\alpha \pm \beta = \text{const}$, *reell* wird. Die sechs *Rotationen* von $\triangle$ in bezug auf die Parameter α, β sind dann:

$$\begin{cases} p = -\dfrac{2\,v_\alpha}{\varrho}\,\mathfrak{x}_v, & q = -\dfrac{2\,v_\alpha}{\varrho}\,\mathfrak{y}_v, & r = -\dfrac{2\,v_\alpha}{\varrho}\,\mathfrak{z}_v, \\ p' = \dfrac{2\,u_\beta}{\varrho}\,\mathfrak{x}_u, & q' = \dfrac{2\,u_\beta}{\varrho}\,\mathfrak{y}_u, & r' = \dfrac{2\,u_\beta}{\varrho}\,\mathfrak{z}_u; \quad \varrho = \dfrac{abcH}{(u+v)^2} \end{cases} \tag{100}$$

$\left(K = -\dfrac{1}{\varrho^2}\right.$ ist das gemeinsame Krümmungsmaß von Hyperboloid und Biegungsfläche$\Big)$. Für die Drehungen des Dreikants bestehen die Differentialrelationen:

$$\begin{cases} X_\alpha^{(1)} = rX^{(2)} - qX^{(3)}, & X_\beta^{(1)} = r'X^{(2)} - q'X^{(3)}, \\ X_\alpha^{(2)} = pX^{(3)} - rX^{(1)}, & X_\beta^{(2)} = p'X^{(3)} - r'X^{(1)}, \\ X_\alpha^{(3)} = qX^{(1)} - pX^{(2)}, & X_\beta^{(3)} = q'X^{(1)} - p'X^{(2)}. \end{cases} \tag{101}$$

---

[30]) Siehe besonders § 1 der unter [7]) genannten Abhandlung.

Die *Ortsfläche* $(M; x)$ *für den Mittelpunkt* M *des rollenden Hyperboloids* wird:

$$(102)\quad x = \int \frac{2(u+v)^2}{H}\left[\left(\frac{\mathfrak{x}_v}{a^2}X^{(1)} + \frac{\mathfrak{y}_v}{b^2}X^{(2)} - \frac{\mathfrak{z}_v}{c^2}X^{(3)}\right)v_\alpha\, d\alpha + \left(\frac{\mathfrak{x}_u}{a^2}X^{(1)} + \frac{\mathfrak{y}_u}{b^2}X^{(2)} - \frac{\mathfrak{z}_u}{c^2}X^{(3)}\right)u_\beta\, d\beta\right],$$

die *Biegungsfläche* $(\mathbf{x})$ selber:

$$(103)\qquad \mathbf{x} = x + \mathfrak{x}X^{(1)} + \mathfrak{y}X^{(2)} + \mathfrak{z}X^{(3)}.$$

Differentiation von (103) mit Hilfe von (100) bis (102) ergibt die Relationen:

$$(104)\quad \mathbf{x}_\alpha = \mathfrak{x}_\alpha X^{(1)} + \mathfrak{y}_\alpha X^{(2)} + \mathfrak{z}_\alpha X^{(3)}, \qquad \mathbf{x}_\beta = \mathfrak{x}_\beta X^{(1)} + \mathfrak{y}_\beta X^{(2)} + \mathfrak{z}_\beta X^{(3)},$$

aus denen die Isometrie zu ersehen ist. In (102) ist das Vorzeichen so gewählt, daß die α-Asymptotenlinien auf $(\mathbf{x})$ positive Torsion haben. Der Gegenpunkt M_0 von M in bezug auf die Tangentialebene ist Mittelpunkt eines zweiten, auf der anderen Seite der Biegungsfläche rollenden Hyperboloids.

Achsenspurfläche nenne ich, wie bereits früher[31]), den Ort des Spurpunkts einer jeden der drei Hauptachsen des rollenden Hyperboloids in der Tangentialebene von $(\mathbf{x})$. Die Schnittlinien der Hauptebenen mit der Tangentialebene bilden die drei *Seiten des Achsenspurdreiecks.* Es gilt der folgende a. a. O. aufgestellte Satz, für den hier zunächst ein neuer Beweis gegeben werden soll: *Zwischen der Biegungsfläche des Hyperboloids und den drei Achsenspurflächen, deren Normalen parallel zu den gegenüberliegenden Seiten des Achsenspurdreiecks sind, besteht Korrespondenz ihrer Asymptotenlinien* (α, β)[32]).

Wir betrachten die vom Spurpunkt $\hat{x}^{(3)}$ der $\mathfrak{z}$-Achse (Richtung $X^{(3)}$) beschriebene Fläche. Da die Achsenabschnitte der Tangentialebene $\frac{a^2}{\mathfrak{x}}$, $\frac{b^2}{\mathfrak{y}}$, $-\frac{c^2}{\mathfrak{z}}$ sind, wird:

$$(105)\qquad \hat{x}^{(3)} = x - \frac{c^2}{\mathfrak{z}}X^{(3)}.$$

Wir differentiieren und erhalten nach einigen Umformungen:

$$(106)\quad \begin{cases} \hat{x}^{(3)}_\alpha = \dfrac{2(u+v)^2 v_\alpha}{H}\dfrac{\mathfrak{z}_v}{\mathfrak{z}}\,\Xi - c^2\left(\dfrac{1}{\mathfrak{z}}\right)_\alpha X^{(3)}, \\[2ex] \hat{x}^{(3)}_\beta = \dfrac{2(u+v)^2 u_\beta}{H}\dfrac{\mathfrak{z}_u}{\mathfrak{z}}\,\Xi - c^2\left(\dfrac{1}{\mathfrak{z}}\right)_\beta X^{(3)}, \end{cases}$$

wobei der Vektor

$$(107)\qquad \Xi = \frac{\mathfrak{x}}{a^2}X^{(1)} + \frac{\mathfrak{y}}{b^2}X^{(2)} - \frac{\mathfrak{z}}{c^2}X^{(3)}$$

---

[31]) Siehe § 1, 5 der unter [6]) genannten Abhandlung.

[32]) Die Hauptachse ist also Tangente an die betreffende Achsenspurfläche; sie beschreibt übrigens keine W-Kongruenz.

normal zur Tangentialebene des rollenden Hyperboloids, also Flächennormale von $(\mathbf{x})$ ist. Für die Normale der Achsenspurfläche $(\widehat{\mathfrak{x}}^{(3)})$ erhält man auf Grund von (106) und (107) den Richtungsvektor:

$$\widehat{\xi}^{(3)} = \frac{\mathfrak{y}}{b^2} X^{(1)} - \frac{\mathfrak{x}}{a^2} X^{(2)}; \tag{108}$$

sie ist also parallel zur Gegenseite $\widehat{\mathfrak{x}}^{(1)} \widehat{\mathfrak{x}}^{(2)}$ des Achsenspurdreiecks. Es wird:

$$\begin{cases} \widehat{\xi}^{(3)}_\alpha = -\dfrac{2(u+v)^2 v_\alpha}{a\,b\,c\,H} \mathfrak{z}_v \Xi + \dfrac{\mathfrak{y}_\alpha}{b^2} X^{(1)} - \dfrac{\mathfrak{x}_\alpha}{a^2} X^{(2)}, \\ \widehat{\xi}^{(3)}_\beta = \dfrac{2(u+v)^2 u_\beta}{a\,b\,c\,H} \mathfrak{z}_u \Xi + \dfrac{\mathfrak{y}_\beta}{b^2} X^{(1)} - \dfrac{\mathfrak{x}_\beta}{a^2} X^{(2)}. \end{cases} \tag{109}$$

Die Rechnung ergibt dann: $\sum \widehat{\mathfrak{x}}^{(3)}_\alpha \widehat{\xi}^{(3)}_\alpha = 0$, $\sum \widehat{\mathfrak{x}}^{(3)}_\beta \widehat{\xi}^{(3)}_\beta = 0$. Das besagt aber, daß auf $(\widehat{\mathfrak{x}}^{(3)})$ das Kurvennetz (α, β) aus den Asymptotenlinien besteht.

4. Die etwas versteckt liegenden, wie mir scheint, sehr beachtenswerten Eigenschaften der verbogenen Flächen zweiten Grades, die wir jetzt herleiten werden, knüpfen sich an zwei Sätze der voraufgegangenen Arbeiten[33]), deren Beweis im Anschluß an die Formeln von Art. **3** unschwer zu führen ist, hier aber nicht von neuem vorgetragen werden soll. Bei der Formulierung mache ich Gebrauch von dem Begriff der schmiegungsverwandten Kurvennetze.

A. *Der Mittelpunkt M des auf der Biegungsfläche rollenden Hyperboloids und sein Gegenpunkt M_0 in bezug auf die Tangentialebene beschreiben den Asymptotenlinien der Biegungsfläche entsprechende schmiegungsverwandte Netze (α, β); die durch $M M_0$ gehenden gemeinschaftlichen Schmiegungsebenen sind normal zu den beiden Erzeugenden $g^{(u)}$ und $g^{(v)}$ des Hyperboloids.*

B. *Sind $N_i^{(u)}$, $N_i^{(v)}$ $(i = 1, 2, 3)$ die drei Paare von Schnittpunkten der durch den Punkt der Biegungsfläche gehenden Erzeugenden $g^{(u)}$ und $g^{(v)}$ mit den drei Hauptebenen des rollenden Hyperboloids, also mit den Seiten des Achsenspurdreiecks, so beschreiben je zwei Punkte $N_i^{(u)}$, $N_i^{(v)}$ schmiegungsverwandte Netze (α, β), die den Asymptotenlinien der Biegungsfläche entsprechen; die gemeinsamen Schmiegungsebenen werden von der betreffenden Hauptebene und der symmetrisch zur Tangentialebene orientierten Ebene, Hauptebene des auf der anderen Seite rollenden Hyperboloids, gebildet.*

Im Hinblick auf das in § 2, **3** ausgesprochene Hauptergebnis der allgemeinen Untersuchung können wir den folgenden neuen Satz unmittelbar hinzufügen:

Das Lot $M M_0$, das vom Mittelpunkt des rollenden Hyperboloids auf die ihm mit der Biegungsfläche gemeinsame Tangentialebene gefällt ist, durch-

[33]) S. besonders § 2 der unter [7]) genannten Abhandlung.

läuft eine W-Kongruenz, in der die Asymptotenlinien der Brennmäntel denen der Biegungsfläche entsprechen. Das Gleiche gilt von den Seiten des Achsenspurdreiecks.

Da die Strahlen dieser vier W-Kongruenzen den Normalen der Biegungsfläche und der Achsenspurflächen parallel sind und außerdem Korrespondenz der Asymptotenlinien besteht, so schließen wir weiter vermöge des Satzes III von Art. 1: *Die Biegungsfläche und die drei Achsenspurflächen sind R-Flächen; die von dem Lot* MM_0 *und den drei Seiten des Achsenspurdreiecks durchlaufenen W-Systeme sind die ihnen durch das Reziprozitätstheorem zugeordneten R-Kongruenzen, deren Developpablen den R-Netzen entsprechen.* Diese Developpablen sind nun aber durch $\alpha \pm \beta = \text{const}$ gegeben — den Nachweis bringt der folgende Art. 5 —, so daß wir ergänzend feststellen können: *Auf der Biegungsfläche des Hyperboloids ist das permanente konjugierte System* $\alpha \pm \beta = \text{const}$ *ein R-Netz; ihm entspricht ein R-Netz auch auf jeder der drei Achsenspurflächen.* Für die Biegungsfläche selber ist diese Eigenschaft bekannt; sie wurde von Bianchi[34]) gefunden. Neu ist sie für die Achsenspurflächen.

5. Der noch erforderliche Nachweis gelingt fast ohne Rechnung mit Hilfe der jetzt zu erörternden, auch an und für sich interessanten *harmonischen Beziehungen*, zu denen das permanente konjugierte System der Biegungsfläche Anlaß gibt. Sie lassen sich übrigens, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, auf das Rollen beliebiger isometrischer Flächenpaare übertragen. Man weiß, daß die Koordinatentripel $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ zweier aufeinander abwickelbarer Flächen, im gegenwärtigen Falle der Biegungsfläche und des Hyperboloids, in bezug auf die Parameter des permanenten konjugierten Systems, hier also $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$, ein und derselben Laplaceschen Differentialgleichung genügen. Wir bestimmen nach (94) die beiden Brennpunkte (gemeinsame Bezeichnung $\overline{x}'$) auf dem Strahl einer zu dem permanenten konjugierten System der Biegungsfläche *harmonischen* Kongruenz, die durch die Lösung $\mathfrak{z}$ der gedachten Laplaceschen Gleichung definiert sei:

$$\overline{x}' = \mathbf{x} - \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}_\alpha \pm \mathfrak{z}_\beta}(\mathbf{x}_\alpha \pm \mathbf{x}_\beta), \tag{110}$$

ersetzen $\mathbf{x}, \mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta$ durch die Ausdrücke (103), (104) und erhalten:

$$\overline{x}' = x + \sigma X^{(1)} + \tau X^{(2)}, \quad \sigma = \mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{z}(\mathfrak{x}_\alpha \pm \mathfrak{x}_\beta)}{\mathfrak{z}_\alpha \pm \mathfrak{z}_\beta}, \quad \tau = \mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{z}(\mathfrak{y} \pm \mathfrak{y}_\beta)}{\mathfrak{z}_\alpha \pm \mathfrak{z}_\beta}. \tag{111}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß

$$\frac{\mathfrak{x}}{a^2}\sigma + \frac{\mathfrak{y}}{b^2}\tau = 1$$

[34]) Bianchi, Sui sistemi coniugati permanenti nelle deformate delle quadriche. Rom Acc. Linc. Rend. 22_2 (1913), S. 3.

ist. Danach liegt jeder der beiden Punkte $\bar{\mathfrak{x}}'$ (σ, τ, 0 sind die relativen Koordinaten in bezug auf das bewegte Hauptachsendreikant $\triangle$) auf der Schnittlinie der Tangentialebene mit der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene, also auf der Seite $\hat{\mathfrak{x}}^{(1)}\hat{\mathfrak{x}}^{(2)}$ des Achsenspurdreiecks. Mithin: *Die drei von den Seiten des Achsenspurdreiecks beschriebenen Kongruenzen sind harmonisch zu dem permanenten konjugierten System der Biegungsfläche* ($\mathbf{x}$), *d. h. aber: ihre Brennpunkte liegen auf den Tangenten desselben, ihre Developpablen sind durch* $\alpha \pm \beta = \text{const}$ *gegeben.*

Nach Art. 2 beschreibt nun der Achsenspurpunkt $\hat{\mathfrak{x}}^{(3)}$, Schnittpunkt der Strahlen zweier zu dem permanenten konjugierten System harmonischer Kongruenzen, ein *abgeleitetes* konjugiertes Netz $\alpha \pm \beta = \text{const}$, dargestellt durch:

$$(112) \qquad \hat{\mathfrak{x}}^{(3)} = \{x; \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_\alpha & \mathfrak{x}_\beta \\ \mathfrak{y}_\alpha & \mathfrak{y}_\beta \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x}_\alpha & \mathbf{x}_\beta \\ \mathfrak{x} & \mathfrak{x}_\alpha & \mathfrak{x}_\beta \\ \mathfrak{y} & \mathfrak{y}_\alpha & \mathfrak{y}_\beta \end{vmatrix}.$$

Die Übereinstimmung mit der Formel (105) bestätigt man, indem man wieder von (103), (104) Gebrauch macht und berücksichtigt, daß

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{y}_\alpha & \mathfrak{y}_\beta \\ \mathfrak{z}_\alpha & \mathfrak{z}_\beta \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mathfrak{z}_\alpha & \mathfrak{z}_\beta \\ \mathfrak{x}_\alpha & \mathfrak{x}_\beta \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_\alpha & \mathfrak{x}_\beta \\ \mathfrak{y}_\alpha & \mathfrak{y}_\beta \end{vmatrix} = \frac{\mathfrak{x}}{a^2} : \frac{\mathfrak{y}}{b^2} : -\frac{\mathfrak{z}}{c^2}$$

ist. Zugleich ist klar, daß der analog zu (112) gebildete Ausdruck:

$$(113) \qquad \vartheta = \{\mathfrak{z}; \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_\alpha & \mathfrak{x}_\beta \\ \mathfrak{y}_\alpha & \mathfrak{y}_\beta \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \mathfrak{z} & \mathfrak{z}_\alpha & \mathfrak{z}_\beta \\ \mathfrak{x} & \mathfrak{x}_\alpha & \mathfrak{x}_\beta \\ \mathfrak{y} & \mathfrak{y}_\alpha & \mathfrak{y}_\beta \end{vmatrix} = -\frac{c^2}{\mathfrak{z}}$$

Integral der von $\hat{\mathfrak{x}}^{(3)}$ in bezug auf die Variablen $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ erfüllten Laplaceschen Gleichung ist. Wir konstruieren mittels ϑ eine zu dem Netz $\alpha \pm \beta = \text{const}$ von ($\hat{\mathfrak{x}}^{(3)}$) *harmonische* Kongruenz. Ihre Brennpunkte (gemeinsame Bezeichnung $\dot{x}'$) sind:

$$(114) \qquad \dot{x}' = \hat{\mathfrak{x}}^{(3)} + \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}_\alpha \pm \mathfrak{z}_\beta} (\hat{\mathfrak{x}}^{(3)}_\alpha \pm \hat{\mathfrak{x}}^{(3)}_\beta).$$

Mit Benutzung von (105), (106) läßt sich dafür schreiben:

$$(115) \qquad \dot{x}' = x + \frac{2(u+v)^2}{H(1 \pm \delta)} \Xi, \qquad \delta = \frac{u_\alpha}{u_\beta} = \frac{v_\beta}{v_\alpha},$$

wobei an (98) (mit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) erinnert sei. Der Strahl ist also das Lot MM_0[35]). Daraus folgt dann: *Die Kongruenz der Lote MM_0 ist harmonisch zu den drei von den Achsenspurpunkten beschriebenen Netzen* $\alpha \pm \beta = \text{const}$; *das bedeutet: die Tangenten der letzteren treffen zu je dreien*

[35]) M und M_0 werden durch die Brennpunkte harmonisch getrennt; vgl. dazu den Satz am Anfang von § 1, 2.

in den Brennpunkten des Strahls zusammen, die Developpablen sind gleichfalls durch $\alpha \pm \beta =$ const *gegeben.*

6. Die Realität der Brennmäntel in den vier betrachteten R-Kongruenzen, die von dem Lot MM_0 und den drei Seiten des Achsenspurdreiecks durchlaufen werden, ist an die des permanenten konjugierten Systems der Biegungsfläche gebunden. Im Anschluß an den Hauptsatz von § 2, 3 bemerken wir: *Charakteristisch für die Biegungen erster Art mit reellem permanenten konjugierten System ist, daß auf der Ortsfläche des Mittelpunkts M des rollenden Hyperboloids die den Asymptotenlinien entsprechenden Kurven entgegengesetzten Windungssinn haben.*

Wird die Biegungsfläche der *Bianchi-Transformation* B_k unterworfen, so erfahren nicht nur die Laplaceschen Transformierten des permanenten konjugierten Systems[36]), sondern auch die drei Achsenspurflächen[37]) simultane asymptotische Transformationen. Es gilt ferner, wie ich gezeigt habe[38]), der allgemeine Satz, daß zugleich mit einer asymptotischen Transformation, die ein R-Netz in ein ebensolches verwandelt, auch die ihm nach dem Reziprozitätstheorem zugeordnete R-Kongruenz durch asymptotische Transformation ihrer beiden Brennmäntel in eine zu dem transformierten R-Netz reziproke R-Kongruenz übergeführt wird. Danach erscheint es von vornherein nicht zweifelhaft, daß bei Anwendung der Operation B_k auch die Brennmäntel unserer vier R-Kongruenzen mittels asymptotischer Transformationen in die entsprechenden, mit der neuen Biegungsfläche verbundenen Flächen übergehen. Allerdings ist dieser Schluß nicht zwingend, da die reziproke R-Kongruenz im allgemeinen Falle durch (92) nur bis auf einen Maßstabsfaktor und auf eine Translation definiert ist. Der Beweis erfordert die Heranziehung des immerhin ziemlich ausgedehnten Formelapparats der Bianchi-Transformation. Er soll zusammen mit einem Beweis des erwähnten Satzes über die Achsenspurflächen in einer nachfolgenden Arbeit mitgeteilt werden.

§ 6.

Schiefe Weingartensche Systeme pseudosphärischer Flächen.

1. Als Sonderfall behandeln wir hier noch die von Bianchi entdeckten, als *schiefe Weingartensche Systeme* bezeichneten Scharen pseudosphärischer Flächen[39]), bei denen abermals aus dem Auftreten schmiegungsverwandter

---

[36]) S. das Zitat [34]). Betreffs der Ausdehnung des Satzes auf allgemeine R-Netze vgl. § 6 meiner unter [28]) genannten Abhandlung.

[37]) § 5 meiner Abhandlung [6]).

[38]) § 6 der Abhandlung [28]).

[39]) S. unter [9]). Als Ausgangspunkt der nachstehenden Entwicklungen dienen §§ 2 und 3 meiner daselbst angeführten Abhandlung.

Kurvennetze auf bislang nicht bemerkte W-Kongruenzen geschlossen werden kann. An diese knüpft sich dann eine neue geometrische Eigenschaft der auf ein derartiges System, wie Bianchi gezeigt hat, anwendbaren Bäcklund-Transformation.

Das Funktionenpaar θ, ω der drei variablen Parameter α, β, v, Lösung des Systems simultaner Differentialgleichungen:

$$\theta_\alpha + \omega_\alpha = \sin(\theta - \omega), \quad \theta_\beta - \omega_\beta = \sin(\theta + \omega), \quad \theta_v \omega_v = 1, \tag{116}$$

aus dem insbesondere noch die Relationen:

$$2\,\theta_{\alpha\beta} = \sin 2\,\theta, \quad 2\,\omega_{\alpha\beta} = \sin 2\,\omega \tag{117}$$

folgen, definiert, und zwar zunächst intrinsek, eine von einer verfügbaren Konstanten $\varkappa$ abhängige Schar pseudosphärischer Flächen $v = \text{const}$ vom Krümmungsmaß $K = -1$, die durch die Trajektorien (v-Kurven) so aufeinander bezogen werden, daß sich ihre Asymptotenlinien (α, β) mit Gleichheit der Bogenlängen entsprechen. Führt man neben $\varkappa$ zur Abkürzung noch

$$\sqrt{1 + \varkappa^2} - \varkappa = c \tag{118}$$

ein, so gelten die Differentialrelationen:

$$\left\{\begin{aligned}
&X_\alpha^{(1)} = \theta_\alpha X^{(2)} + c \sin\theta\, X^{(3)}, \qquad X_\beta^{(1)} = -\,\theta_\beta X^{(2)} + \frac{1}{c}\sin\theta\, X^{(3)},\\
&X_\alpha^{(2)} = -\,c\cos\theta\, X^{(3)} - \theta_\alpha X^{(1)}, \qquad X_\beta^{(2)} = \frac{1}{c}\cos\theta\, X^{(3)} + \theta_\beta X^{(1)},\\
&X_\alpha^{(3)} = -\,c\sin\theta\, X^{(1)} + c\cos\theta\, X^{(2)}, \quad X_\beta^{(3)} = -\frac{1}{c}\sin\theta X^{(1)} - \frac{1}{c}\cos\theta\, X^{(2)},\\
&\qquad X_v^{(1)} = \frac{\theta_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(\varkappa X^{(2)} + \cos\omega\, X^{(3)}),\\
&\qquad X_v^{(2)} = \frac{\theta_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(\sin\omega\, X^{(3)} - \varkappa X^{(1)}),\\
&\qquad X_v^{(3)} = \frac{\theta_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(-\cos\omega\, X^{(1)} - \sin\omega\, X^{(2)}),
\end{aligned}\right. \tag{119}$$

auf Grund deren das rechtwinklige Dreikant $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ zu bestimmen ist. Der die Flächenschar durchlaufende Punkt x ergibt sich durch Quadraturen:

$$\left\{\begin{aligned}
&x_\alpha = c(\cos\theta\, X^{(1)} + \sin\theta\, X^{(2)}), \quad x_\beta = \frac{1}{c}(\cos\theta\, X^{(1)} - \sin\theta\, X^{(2)}),\\
&\quad x_v = \frac{\varkappa\,\theta_v}{1+\varkappa^2}(-\sin\omega\, X^{(1)} + \cos\omega\, X^{(2)}) + \frac{\theta_v}{1+\varkappa^2} X^{(3)}.
\end{aligned}\right. \tag{120}$$

Für die pseudosphärische Fläche $(x;\, v = \text{const})$ wird danach:

$$\Sigma\, dx^2 = c^2\, d\alpha^2 + 2\cos 2\,\theta\, d\alpha\, d\beta + \frac{1}{c^2}\, d\beta^2. \tag{121}$$

Wie aus (119), (120) zu ersehen, ist $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ das Hauptdreikant des Flächenpunktes x, gebildet von den Hauptkrümmungsrichtungen $X^{(1)}, X^{(2)}$ und der Normalenrichtung $X^{(3)}$. Daneben führen wir das zum Punkte x gehörige begleitende Dreikant (X, X', X'') der Trajektorie ein (Tangente X, Hauptnormale X', Binormale X''), das mit $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ durch die orthogonale Substitution:

$$(122)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(-\sin\omega\, X^{(1)} + \cos\omega\, X^{(2)}) + \dfrac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}} X^{(3)}, \\ X' = \cos\omega\, X^{(1)} + \sin\omega\, X^{(2)}, \\ X'' = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(-\sin\omega\, X^{(1)} + \cos\omega\, X^{(2)}) - \dfrac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}} X^{(3)} \end{cases}$$

verbunden ist. Es bestehen dann die Relationen:

$$(123)\qquad x_v = \frac{\theta_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}} X,$$

$$(124)\quad \begin{cases} X_v = -\left(\theta_v + \dfrac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}\omega_v\right)X', \quad X'_v = \dfrac{\omega_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}} X'' + \left(\theta_v + \dfrac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}\omega_v\right)X, \\ X''_v = -\dfrac{\omega_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}} X', \end{cases}$$

denen man für Flexion und Torsion die folgenden Ausdrücke entnimmt:

$$(125)\qquad \frac{1}{R} = -\varkappa\frac{\omega_v}{\theta_v} - \sqrt{1+\varkappa^2}, \qquad \frac{1}{T} = -\frac{\omega_v}{\theta_v}.$$

Die Trajektorien sind also *Bertrandsche Kurven* mit der gemeinsamen Gleichung:

$$(126)\qquad \frac{1}{R} - \frac{\varkappa}{T} + \sqrt{1+\varkappa^2} = 0.$$

Für $\varkappa = 0$ (damit $c = 1$) liegt eine Laméssche Schar pseudosphärischer Flächen vor, bei der $|R| = 1$ wird, nach Bianchi: ein *Weingartensches System mit konstanter Flexion*. Der Übergang von diesem zu einem *schiefen Weingartenschen System*, das durch die gleichen Lösungen θ, ω von (116) und ein beliebiges $\varkappa \neq 0$ definiert ist, läßt sich, wie man bereits aus der Gestalt des Linienelements (121) erkennt, als eine Liesche Transformation auffassen, der die ∞^1 Flächen der Laméschen Schar simultan unterworfen werden.

Der Punkt

$$(127)\qquad \bar{x} = x - \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(\cos\omega\, X^{(1)} + \sin\omega\, X^{(2)}) = x - \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}} X'$$

beschreibt ebenfalls ein schiefes Weingartensches System, das *assoziierte*, dessen Flächen ($\bar{x}$; $v = \text{const}$) mit dem Quadrat des Linienelements:

$$(128)\qquad \Sigma\, d\bar{x}^2 = c^2\, d\alpha^2 + 2\cos 2\omega\, d\alpha\, d\beta + \frac{1}{c^2} d\beta^2$$

mit den Flächen (x; $v = \text{const}$) des ursprünglichen Systems durch eine spezielle, einen Integrationsprozeß nicht mehr erfordernde Bäcklund-Transformation zusammenhängen. Die ∞^3, also einen Strahlenkomplex vorstellenden Geraden $x\bar{x}$ erscheinen somit angeordnet als eine Schar pseudosphärischer Kongruenzen, definiert durch $v = \text{const}$. In etwas weiterer Fassung bedeutet das: zu konstantem v gehört je eine von den Geraden $x\bar{x}$ gebildete W-Kongruenz, in der die Asymptotenlinien der Brennmäntel durch $\alpha = \text{const}$ und $\beta = \text{const}$ gegeben sind. Wir werden die neue und eigenartige Tatsache beweisen, daß der Satz in dieser Form die Vertauschung der Parameter α, β, v gestattet. Zunächst sei noch bemerkt, daß die Trajektorien des assoziierten schiefen Weingartenschen Systems die zu den Trajektorien des ursprünglichen Systems *konjugierten Bertrandschen Kurven* sind, die also mit jenen die Hauptnormalen, nämlich die Geraden $x\bar{x}$, gemeinsam haben. Für das folgende wichtig ist ferner die von Bianchi erkannte Eigenschaft, die, auch in meiner unter [9]) genannten Arbeit bewiesen, hier nicht noch einmal hergeleitet werden soll: *In den beiden zueinander assoziierten schiefen Weingartenschen Systemen ist immer die Tangentialebene der pseudosphärischen Fläche des einen zugleich die Schmiegungsebene der durch den korrespondierenden Punkt des anderen gehenden Bertrandschen Kurve.*

2. Wir betrachten jetzt in den beiden assoziierten Systemen die von den korrespondierenden Punkten x und $\bar{x}$ beschriebenen, durch $\beta = \text{const}$ definierten Scharen von Flächen, die wie a. a. O. *asymptotische Trajektorienflächen* heißen mögen. Sie sind von Netzen (α, v) bedeckt, in denen die α-Kurven als Asymptotenlinien der pseudosphärischen Flächen Kurven von konstanter Torsion (mit dem Werte $+1$) und die v-Kurven Bertrandsche Kurven sind. Die ersteren haben die jeweils durch den Punkt x bzw. $\bar{x}$ gelegte Tangentialebene der pseudosphärischen Fläche zur Schmiegungsebene, die letzteren lassen dem eben angeführten Bianchischen Satze zufolge das gleiche Ebenenpaar, aber in umgekehrter Zuordnung als Schmiegungsebenen zu. Daraus ergibt sich: *Für* $\beta = \text{const}$ *durchlaufen die Punkte* x *und* $\bar{x}$ *der assoziierten schiefen Weingartenschen Systeme schmiegungsverwandte Kurvennetze* (α, v) *auf den asymptotischen Trajektorienflächen; die Geraden* $x\bar{x}$ *bilden also für* $\beta = \text{const}$ *W-Kongruenzen, deren Brennmäntel die Kurven* $\alpha = \text{const}$ *und* $v = \text{const}$ *zu Asymptotenlinien haben.*

Der Satz gilt natürlich (unter Vertauschung von α und β) auch für die Schar der innerhalb des Komplexes der Geraden $x\bar{x}$ durch $\alpha = \text{const}$ definierten Kongruenzen. Wir bevorzugen die Kongruenzen $\beta = \text{const}$, die im Gegensatz zu jenen *reelle* Brennmäntel besitzen. Dies folgt im Hinblick auf unseren Hauptsatz von § 2, 3 aus dem Umstande, daß die

vom Punkte x beschriebene α-Kurve die Torsion $+1$, die β-Kurve die Torsion -1 und die v-Kurve nach (125) und (116) negative Torsion $-1/(\theta_v)^2$ hat; entgegengesetzt ist also der Windungssinn für v-Kurve und α-Kurve[40]). Wir bestimmen die Brennmäntel der Kongruenz $\beta = \text{const}$ (x^* als gemeinsame Bezeichnung) an Hand des Ansatzes:

$$x^* = x + t X' = x + t(\cos\omega X^{(1)} + \sin\omega X^{(2)}). \tag{129}$$

Differentiation nach α und v mit Benutzung von (119), (120) und (116) liefert:

$$\left\{\begin{aligned} x_\alpha^* &= c(\cos\theta X^{(1)} + \sin\theta X^{(2)}) \\ &\qquad + t\sin(\theta-\omega)[-\sin\omega X^{(1)} + \cos\omega X^{(2)} + cX^{(3)}] + t_\alpha X', \\ x_v^* &= \left[\frac{\varkappa\theta_v}{1+\varkappa^2}(1 + t\sqrt{1+\varkappa^2}) + t\omega_v\right](-\sin\omega X^{(1)} + \cos\omega X^{(2)}) \\ &\qquad + \frac{\theta_v}{1+\varkappa^2}(1 + t\sqrt{1+\varkappa^2})X^{(3)} + t_v X'. \end{aligned}\right. \tag{130}$$

Da die Flächennormale zur Strahlrichtung senkrecht sein muß, setzen wir:

$$\xi^* = -\sin\omega X^{(1)} + \cos\omega X^{(2)} + \lambda X^{(3)} \tag{131}$$

und erhalten aus $\sum x_\alpha^* \xi^* = 0$, $\sum x_v^* \xi^* = 0$ die beiden Wertepaare:

$$t = -\frac{\theta_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}(\theta_v \pm 1)}, \quad \lambda = -\varkappa \pm \frac{\sqrt{1+\varkappa^2}}{\theta_v} \tag{132}$$

wobei die oberen bzw. unteren Vorzeichen zusammengehören.

3. Es ist bekannt, daß ein schiefes Weingartensches System durch eine die sämtlichen pseudosphärischen Flächen simultan erfassende *Bäcklund-Transformation* B_σ in ein neues derartiges System übergeführt werden kann. Als Ergänzung hierzu ergibt sich auf Grund des Bianchischen Vertauschbarkeitssatzes: durch den gleichen geometrischen Prozeß geht auch das zu dem gegebenen assoziierte System in das assoziierte des transformierten Systems über. Die Operation B_σ setzt die Kenntnis eines Integrals θ_1 der folgenden, auf den Riccatischen Typus zurückführbaren totalen Differentialgleichung voraus:

$$\left\{\begin{aligned} (\theta_1)_\alpha &= -\theta_\alpha + \frac{1-\sin\sigma_0}{\cos\sigma_0}\sin(\theta_1 - \theta), \\ (\theta_1)_\beta &= \theta_\beta + \frac{1+\sin\sigma_0}{\cos\sigma_0}\sin(\theta_1 + \theta), \\ (\theta_1)_v &= -\frac{\theta_v}{\sin\sigma_0}[1 + \cos\sigma_0\cos(\theta_1 - \omega)]. \end{aligned}\right. \tag{133}$$

---

[40]) Maßgebend für diese Verhältnisse ist, daß wir die dritte der Differentialgleichungen (116) in der Form $\theta_v \omega_v = +1$ angenommen haben.

Darin kommt die für die Transformation B_σ charakteristische Konstante σ nicht selber vor, aber auch $\varkappa$ nicht. Durch θ_1 ist für beliebiges $\varkappa$ eine Transformation B_σ bestimmt, deren Konstante σ sich durch σ_0 und $\varkappa$ ausdrückt:

$$(134)\qquad \cos\sigma = \frac{\cos\sigma_0}{\sqrt{1+\varkappa^2} - \varkappa\sin\sigma_0}, \quad \sin\sigma = \frac{\sqrt{1+\varkappa^2}\sin\sigma_0 - \varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2} - \varkappa\sin\sigma_0}.$$

Die Laméсhe Schar ($\varkappa = 0$) erfährt eine Transformation B_{σ_0}.

Das transformierte schiefe Weingartensche System wird von dem Punkte

$$(135)\qquad x_1 = x + \cos\sigma(\cos\theta_1 X^{(1)} + \sin\theta_1 X^{(2)})$$

beschrieben. Das ihm assoziierte, mit dem sich der viergliedrige Zyklus der Bäcklund-Transformationen schließt, ist dargestellt durch:

$$(136)\qquad \bar{x}_1 = x_1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(\cos\omega_1 X_1^{(1)} + \sin\omega_1 X_1^{(2)}).$$

Dabei ergibt sich ω_1 aus der Fundamentalrelation des Vertauschbarkeitssatzes, die weiterhin in doppelter Gestalt Verwendung finden wird:

$$(137)\qquad \begin{cases} \cos(\omega_1 - \theta) = \dfrac{\cos(\theta_1 - \omega) + \cos\sigma_0}{1 + \cos\sigma_0\cos(\theta_1 - \omega)}, \\ \sin(\omega_1 - \theta) = \dfrac{\sin\sigma_0\sin(\theta_1 - \omega)}{1 + \cos\sigma_0\cos(\theta_1 - \omega)}. \end{cases}$$

Das in (136) eingeführte rechtwinklige Dreikant ($X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)}$), Hauptdreikant im Punkte x_1 der pseudosphärischen Fläche $v = \text{const}$, geht aus ($X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$) durch die folgende orthogonale Substitution hervor:

$$(138)\qquad \begin{cases} X_1^{(1)} = \alpha_{11}X^{(1)} + \alpha_{12}X^{(2)} + \alpha_{13}X^{(3)}, \\ X_1^{(2)} = \alpha_{21}X^{(1)} + \alpha_{22}X^{(2)} + \alpha_{23}X^{(3)}, \\ X_1^{(3)} = \alpha_{31}X^{(1)} + \alpha_{32}X^{(2)} + \alpha_{33}X^{(3)}, \end{cases}$$

$$(139)\qquad \begin{cases} \alpha_{11} = \cos\theta\cos\theta_1 - \sin\sigma\sin\theta\sin\theta_1, \\ \alpha_{12} = \cos\theta\sin\theta_1 + \sin\sigma\sin\theta\cos\theta_1, \quad \alpha_{13} = \cos\sigma\sin\theta, \\ \alpha_{21} = \sin\theta\cos\theta_1 + \sin\sigma\cos\theta\sin\theta_1, \\ \alpha_{22} = \sin\theta\sin\theta_1 - \sin\sigma\cos\theta\cos\theta_1, \quad \alpha_{23} = -\cos\sigma\cos\theta, \\ \alpha_{31} = -\cos\sigma\sin\theta_1, \quad \alpha_{32} = \cos\sigma\cos\theta_1, \quad \alpha_{33} = -\sin\sigma. \end{cases}$$

Zu bemerken ist noch, daß jetzt die sämtlichen Formeln (116) bis (132) bei gleichem Werte von $\varkappa$ auch für den Index 1 gültig sind und daß die inverse Operation, die zu dem ursprünglichen System zurückführt, wieder eine B_σ ist.

4. Wir beschließen die Untersuchung mit dem Beweis des folgenden Satzes, durch den das in Art. 2 ausgesprochene Ergebnis vervollständigt wird: *Unterwirft man ein schiefes Weingartensches System zusammen mit dem assoziierten einer Bäcklund-Transformation B_σ, so gehen die sämtlichen*

innerhalb des Komplexes der Verbindungsgeraden $x\bar{x}$ *durch* $\beta = \text{const}$ *bzw.* $\alpha = \text{const}$ *definierten* W*-Kongruenzen durch asymptotische Transformationen ihrer Brennmäntel (die nur für die eine der beiden Annahmen reell sind) in die entsprechenden, den transformierten Systemen angehörenden* W*-Kongruenzen über.*

Die Brennmäntel der für $\beta = \text{const}$ von dem Strahl $x_1 \bar{x}_1$ durchlaufenen W-Kongruenz sind durch die zu (129), (132) analogen Formeln gegeben:

$$(140)\qquad x_1^* = x_1 + t_1 (\cos\omega_1 X_1^{(1)} + \sin\omega_1 X_1^{(2)}),\quad t_1 = -\frac{(\theta_1)_v}{\sqrt{1+\varkappa^2}\,[(\theta_1)_v \pm 1]}.$$

Wir beschränken uns auf den Nachweis, daß die Verbindungslinie der Punkte x^* und x_1^* Tangente der Fläche (x^*; $\beta = \text{const}$) ist, wobei in den Formeln für t und t_1 gleichzeitig das obere bzw. untere Vorzeichen gelten soll. Daß auch die vom Punkte x_1^* beschriebene Fläche von $x^* x_1^*$ berührt wird, folgt dann aus der Umkehrbarkeit des Transformationsprozesses; die Korrespondenz der Asymptotenlinien (α, v) beider Flächen steht bereits fest. Wir setzen [siehe dazu (131)]:

$$(141)\qquad \Sigma (x_1^* - x^*)\xi^* = \Omega;$$

behauptet wird: $\Omega = 0$. Mit Hilfe von (129), (140) und (138) ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_1^* - x^* = {} & [\cos\sigma\cos\theta_1 - t\cos\omega + t_1(\alpha_{11}\cos\omega_1 + \alpha_{21}\sin\omega_1)]\,X^{(1)} \\ & + [\cos\sigma\sin\theta_1 - t\sin\omega + t_1(\alpha_{12}\cos\omega_1 + \alpha_{22}\sin\omega_1)]\,X^{(2)} \\ & + t_1(\alpha_{13}\cos\omega_1 + \alpha_{23}\sin\omega_1)\,X^{(3)}, \end{aligned}$$

$$(142)\qquad \left\{\begin{aligned} \Omega = {} & \cos\sigma\sin(\theta_1 - \omega) + t_1[\cos\omega_1(-\alpha_{11}\sin\omega + \alpha_{12}\cos\omega) \\ & + \sin\omega_1(-\alpha_{21}\sin\omega + \alpha_{22}\cos\omega) \\ & + \lambda(\alpha_{13}\cos\omega_1 + \alpha_{23}\sin\omega_1)]. \end{aligned}\right.$$

Aus (139) entnimmt man aber:

$$\begin{aligned} -\alpha_{11}\sin\omega + \alpha_{12}\cos\omega &= \cos\theta\sin(\theta_1 - \omega) + \sin\sigma\sin\theta\cos(\theta_1 - \omega), \\ -\alpha_{21}\sin\omega + \alpha_{22}\cos\omega &= \sin\theta\sin(\theta_1 - \omega) - \sin\sigma\cos\theta\cos(\theta_1 - \omega), \\ \alpha_{13}\cos\omega_1 + \alpha_{23}\sin\omega_1 &= -\cos\sigma\sin(\omega_1 - \theta) \end{aligned}$$

und erhält so zunächst:

$$\begin{aligned} \Omega = {} & \cos\sigma\sin(\theta_1 - \omega) + t_1\{\cos(\omega_1 - \theta)\sin(\theta_1 - \omega) \\ & - \sin(\omega_1 - \theta)[\sin\sigma\cos(\theta_1 - \omega) + \lambda\cos\sigma]\}. \end{aligned}$$

Nach Eintragung der Ausdrücke (137) kann man schreiben:

$$(143)\qquad \Omega = t_1\cos\sigma\sin(\theta_1 - \omega)\left[\frac{1}{t_1} + \frac{\frac{1 - \sin\sigma\sin\sigma_0}{\cos\sigma}\cos(\theta_1 - \omega) + \frac{\cos\sigma_0}{\cos\sigma} - \lambda\sin\sigma_0}{1 + \cos\sigma_0\cos(\theta_1 - \omega)}\right].$$

Mit Benutzung der aus (134) folgenden Hilfsformeln:

$$\frac{1-\sin\sigma\sin\sigma_0}{\cos\sigma} = \sqrt{1+\varkappa^2}\cos\sigma_0, \qquad \frac{\cos\sigma_0}{\cos\sigma} = \sqrt{1+\varkappa^2} - \varkappa\sin\sigma_0$$

geht (143) über in:

$$\Omega = t_1\cos\sigma\sin(\theta_1-\omega)\left[\frac{1}{t_1} + \sqrt{1+\varkappa^2} - \frac{\sin\sigma_0}{1+\cos\sigma_0\cos(\theta_1-\omega)}(\lambda+\varkappa)\right].$$

Der Inhalt der Klammer verschwindet aber, wie man jetzt leicht mittels der aus (132) und (140) folgenden Beziehungen:

$$\frac{1}{t_1} + \sqrt{1+\varkappa^2} = \mp\frac{\sqrt{1+\varkappa^2}}{(\theta_1)_v}, \qquad \lambda+\varkappa = \pm\frac{\sqrt{1+\varkappa^2}}{\theta_v}$$

und der dritten Gleichung (133) bestätigt. Mithin ist $\Omega = 0$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 2. 10. 1936.)

Über die Krümmung der Niveaukurven der beschränkten Funktionen.

Von

Penelope Cacridis-Theodorakopulos in Athen.

Wir nehmen eine Funktion $f(z)$ mit den Eigenschaften:

1. $f(z)$ analytisch regulär im Innern des Einheitskreises;
2. $f(0) = 0$;
3. $|f(z)| < 1$;
4. $|f'(0)| > 0$

und betrachten die Kurven γ der f-Ebene, welche den Kreisen $|z| = \varrho$ der z-Ebene $(0 < \varrho < 1)$ entsprechen.

Sieht man von den Fällen

$$f(z) = e^{i\vartheta} z \qquad (\vartheta \text{ reell})$$

ab, so gilt nach dem Schwarzschen Lemma, daß jede Kurve γ ganz innerhalb des Kreises $|f| = \varrho$ liegt. Außerdem sind diese Kurven γ für genügend kleine ϱ wegen der Konformität der Abbildung konvex und beinahe kreisförmig.

Es liegt also die Vermutung nahe, daß die Krümmung der Kurven γ für genügend kleine ϱ in allen Punkten größer als $\frac{1}{\varrho}$, d. h. größer als die Krümmung des ursprünglichen Kreises ist. In den Fällen

$$f(z) = e^{i\vartheta} z$$

bleibt natürlich die Krümmung der abgebildeten Kreise $|z| = \varrho$ unverändert.

Diese Vermutung wird hier vollständig bewiesen. Wir werden die Funktionenfamilie $\{f(z)\}$ betrachten, deren Funktionen $f(z)$ durch folgende Eigenschaften charakterisiert sind:

1. $f(z)$ analytisch regulär im Innern des Einheitskreises;
2. $f(0) = 0$;
3. $|f(z)| < 1$;
4. $|f'(0)| \geqq \alpha$,

unter α eine vorgegebene positive Zahl kleiner als 1 verstanden.

Wir beschränken uns auf solche ϱ, daß jede Funktion dieser Familie die Kreise $|z| = \varrho$ auf sich selbst nicht überschneidende Kurven abbildet,

welche in jedem ihrer Punkte eine bestimmte Krümmung besitzen, d. h. auf die ϱ, die kleiner als

$$\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}$$

sind [1]).

Wir werden zeigen, daß jede Funktion der Familie $\{f(z)\}$, ausgenommen die Funktionen

$$f(z) = e^{i\vartheta} z \qquad (\vartheta \text{ reell}),$$

jeden Kreis $|z| = \varrho$ auf eine Kurve der f-Ebene abbildet, deren Krümmung in jedem Punkte *größer ist als* $\frac{1}{\varrho}$, *d. h. als die Krümmung des ursprünglichen Kreises* $|z| = \varrho$, wenn nur ϱ kleiner als ϱ_0 ist, unter ϱ_0 die positive Wurzel von

$$(1) \qquad \varrho^3 - \varrho^2 \frac{4+\alpha}{\alpha} + \varrho \frac{4+\alpha}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} = 0$$

verstanden, die kleiner als $\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}$ ist.

Auch der Kreis $|z| = \varrho_0$ wird im allgemeinen durch eine Funktion der Familie $\{f(z)\}$ auf eine Kurve der f-Ebene abgebildet, deren Krümmung überall größer ist als $\frac{1}{\varrho}$. Aber es treten jetzt zu den ausgenommenen Funktionen

$$f(z) = e^{i\vartheta} z$$

noch die folgenden hinzu:

$$f(z) = e^{i\vartheta} z \frac{\alpha - e^{i\varphi} z}{e^{-i\varphi} - \alpha z} \qquad (\vartheta, \varphi \text{ reell}),$$

bei welchen ebenfalls, allerdings nur für den einzigen Punkt

$$z = e^{-i\varphi} \varrho_0,$$

die Krümmung der Bildkurve von $|z| = \varrho_0$ gleich $\frac{1}{\varrho_0}$ wird.

Für die ϱ, die zwischen ϱ_0 und $\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}$ liegen, hat das Minimum der Krümmungen der Bildkurven von $|z| = \varrho$ durch die verschiedenen Abbildungsfunktionen $f(z)$ unserer Familie nicht mehr den Wert $\frac{1}{\varrho}$ der Krümmung des ursprünglichen Kreises, sondern den kleineren:

$$\frac{(1 - \alpha\varrho)[-\alpha^2\varrho^3 + 3\alpha\varrho^2 + (\alpha^2 - 4)\varrho + \alpha]}{\varrho[(1+\varrho^2)\alpha - 2\varrho]^2},$$

---

[1]) Die schönste Ableitung dieser oberen Grenze findet sich bei C. Carathéodory, Über beschränkte Funktionen, die in einem Paare usw., Monatsh. f. Math. u. Physik 43 (1936).

der die Krümmung der Bildkurven von $|z| = \varrho$ durch die Funktionen

$$f(z) = e^{i\vartheta} z \frac{z - e^{i\varphi} z}{e^{-i\varphi} - \alpha z}$$

im Punkte $f(e^{-i\varphi}\varrho)$ darstellt.

1. Für jede Funktion $f(z)$, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügt — das sind hier die unter 1., 2., 3. erwähnten Eigenschaften der Funktionen der Familie $\{f(z)\}$ — gilt für alle Punkte z mit $|z| = r < 1$ folgende Relation[2]):

$$(1)\quad \frac{|f'(z)|}{r}\frac{1-r^2}{1-|f(z)|^2}\left|r^2 - \frac{1-r^2}{2} z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqq 1 - (1-|f(z)|)\frac{(1-r^2)^2}{(1-|f(z)|^2)^2}|f'(z)|^2.$$

Aus ihr folgt die weitere Relation:

$$(2)\quad \frac{|f'(z)|}{r}\frac{1-r^2}{1-|f(z)|^2}\left|r^2 - \frac{1-r^2}{2}\Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right| \leqq 1 - (1-|f(z)|)\frac{(1-r^2)^2}{(1-|f(z)|^2)^2}|f'(z)|^2.$$

Außerdem ist aber für die Funktionen unserer Familie $\{f(z)\}$ und für die ϱ, auf die wir uns beschränkt haben, die Krümmung der Bildkurven von $|z| = \varrho$ für irgendein z eine bestimmte Zahl

$$K = K(f(z), z)$$

und es gilt[3])

$$K = \frac{1}{\varrho|f'(z)|}\Re\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)$$

oder

$$(3)\quad \Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = K\varrho|f'(z)| - 1.$$

Aus (2) folgt also für die obigen ϱ und die Funktionen unserer Familie $\{f(z)\}$, wenn wir die Krümmung der Bildkurven von $|z| = \varrho$ einführen:

$$\frac{|f'(z)|}{\varrho}\frac{1-\varrho^2}{1-|f(z)|^2}\left|\varrho^2 - \frac{1-\varrho^2}{2}(K\varrho|f'(z)| - 1)\right|$$
$$\leqq 1 - (1-|f(z)|)\frac{(1-\varrho^2)^2}{(1-|f(z)|^2)^2}|f'(z)|^2$$

oder

$$\frac{|f'(z)|}{\varrho}\frac{1-\varrho^2}{1-|f(z)|^2}\left|\frac{1+\varrho^2}{2} - \frac{1-\varrho^2}{2}K\varrho|f'(z)|\right|$$
$$\leqq 1 - (1-|f(z)|)\frac{(1-\varrho^2)^2}{(1-|f(z)|^2)^2}|f'(z)|^2,$$

und daraus folgt erst recht:

$$\frac{|f'(z)|}{\varrho}\frac{1-\varrho^2}{1-|f(z)|^2}\left[\frac{1+\varrho^2}{2} - \frac{1-\varrho^2}{2}K\varrho|f'(z)|\right]$$
$$\leqq 1 - (1-|f(z)|)\frac{(1-\varrho^2)^2}{(1-|f(z)|^2)^2}|f'(z)|^2$$

---

[2]) P. Cacridis-Theodorakopulos, Über die Rundungsschranke beschränkter Funktionen, Math. Annalen 113 (1937), S. 657—664.

[3]) E. Peschl, Über die Krümmung von Niveaukurven usw., Math. Annalen 106 (1932), S. 577.

oder, wenn wir zur Abkürzung

$$(3)\qquad |f'(z)|\,\frac{1-\varrho^2}{1-|f(z)|^2}=\omega$$

setzen und nach Potenzen von ω ordnen:

$$(4)\qquad \omega^2(1-|f(z)|)\left[1-\frac{1+|f(z)|}{2}K\right]+\omega\frac{1+\varrho^2}{2\varrho}-1\leqq 0.$$

2. In der letzten Relation ist ϱ eine Zahl zwischen 0 und

$$\frac{1}{\alpha}-\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1}.$$

In demselben Intervall

$$\left(0,\ \frac{1}{\alpha}-\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1}\right)$$

liegt aber auch die positive Wurzel ϱ_1 der Gleichung

$$-\alpha^2\varrho^3+3\alpha\varrho^2+\varrho(\alpha^2-4)+\alpha=0,$$

welche die folgende Eigenschaft besitzt:

Jede Funktion, die den Bedingungen genügt:

1. $f(z)$ analytisch regulär im Innern des Einheitskreises,
2. $f(0)=0$,
3. $|f(z)|<1$,
4. $|f'(0)|=\alpha$

wird jeden Kreis $|z|=\varrho$, $\varrho\leqq\varrho_1$, auf eine *konvexe* Kurve abbilden. Ist aber $\varrho>\varrho_1$, so gibt es Funktionen mit den erwähnten Eigenschaften, die den Kreis $|z|=\varrho$ auf eine nichtkonvexe Kurve abbilden, z. B. die Funktion

$$f(z)=z\frac{\alpha-z}{1-\alpha z}.\text{[4]}$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem $\varrho>\varrho_1$ oder $\varrho\leqq\varrho_1$ ist.

1. Fall: $\varrho>\varrho_1$. Die Funktion

$$f(z)=z\frac{\alpha-z}{1-\alpha z}$$

gehört auch unserer Familie $\{f(z)\}$ an. Sie bildet außerdem den Kreis $|z|=\varrho$ auf eine nichtkonvexe Kurve ab; d. h. auf eine Kurve, die auch Punkte besitzt, in welchen die Krümmung negativ ist.

In der vorliegenden Arbeit haben wir die untere Grenze der Krümmungen der durch die verschiedenen Funktionen $f(z)$ unserer Familie gelieferten Bildkurven von $|z|=\varrho$ in ihren verschiedenen Punkten zu bestimmen. Dazu brauchen wir also nur solche Funktionen $f(z)$ unserer

[4]) Das ist das Hauptresultat der in Fußnote [2]) erwähnten Arbeit.

Familie in Betracht zu ziehen, welche Bildkurven mit negativer Krümmung in gewissen Punkten liefern, und sie nur in jenen Punkten zu untersuchen, in denen die Krümmung K negativ ist.

In der Relation (4) sind dann auf der linken Seite die Koeffizienten von ω^2 und ω positiv. Ich kann also statt ω^2 und ω etwas Kleineres oder Gleiches einsetzen.

Wir bemerken nun, daß:

$$|f'(z)| \geqq \frac{(1+|f(z)|)(|f(z)|-r^2)}{r(1-r^2)}$$

ist [5]). Diese Relation gilt für alle Funktionen $f(z)$, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen, und für alle z, $|z| = r < 1$.

Es gilt also auch für die Funktionen unserer Familie:

$$|f'(z)| \geqq \frac{(1+|f(z)|)(|f(z)|-\varrho^2)}{\varrho(1-\varrho^2)}, \qquad |z| = \varrho,$$

oder

$$\omega = |f'(z)| \frac{1-\varrho^2}{1-|f(z)|^2} \geqq \frac{(|f(z)|-\varrho^2)}{\varrho(1-|f(z)|)}.$$

Die rechte Seite dieser Relation ist wegen:

$$|f'(0)| \geqq \alpha \quad \text{und} \quad \varrho < \frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}$$

positiv; wir haben also auch:

$$\omega^2 = |f'(z)|^2 \frac{(1-\varrho^2)^2}{1-|f(z)|^2)^2} \geqq \frac{(|f(z)|-\varrho^2)^2}{\varrho^2(1-|f(z)|)^2}.$$

Aus (4) folgt also weiter die Ungleichung:

$$\frac{(|f(z)|-\varrho^2)^2}{\varrho^2(1-|f(z)|)^2}(1-|f(z)|)\left[1-\frac{1+|f(z)|}{2}K\right] + \frac{|f(z)|-\varrho^2}{\varrho(1-|f(z)|)}\frac{1+\varrho^2}{2\varrho} - 1 \leqq 0$$

oder

$$\frac{(|f(z)-\varrho^2)^2}{\varrho^2(1-|f(z)|)}\left[1-\frac{1-|f(z)|}{2}K\right] + \frac{|f(z)|-\varrho^2}{\varrho(1-|f(z)|)}\frac{1+\varrho^2}{2\varrho} - 1 \leqq 0$$

oder

$$(5) \qquad 2(|f(z)|-\varrho^2)^2\left[1-\frac{1+|f(z)|}{2}K\right]$$
$$+ (1+\varrho^2)(|f(z)|-\varrho^2) - 2\varrho^2(1-|f(z)|) \leqq 0.$$

Der linksstehende Ausdruck wird noch kleiner, wenn wir statt $|f(z)|$ eine kleinere oder gleiche Größe schreiben, die aber $\geqq \varrho^2$ ist. Nun haben wir

$$|f(z)| \geqq r\frac{|f'(0)|-r}{1-|f'(0)|r}$$

---

[5]) Simonart, Annales de Bruxelles 1931.

für alle Funktionen, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen — also auch für alle Funktionen der Familie $\{f(z)\}$ — und zwar für alle z, $|z| = r < 1$ [6]).

Folglich gilt für die Funktionen unserer Familie wegen

$$|f'(0)| \geqq \alpha$$

auch

$$|f(z)| \geqq \varrho \frac{\alpha - \varrho}{1 - \alpha \varrho},$$

wobei die rechte Seite wegen

$$\varrho < \frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}$$

größer als ϱ^2 ist.

Ersetzt man nun in (5) $|f(z)|$ durch

$$\varrho \cdot \frac{\alpha - \varrho}{1 - \alpha \varrho}$$

und löst man nach K auf, so bekommt man:

$$K \geqq \frac{(1 - \alpha \varrho)[-\alpha^2 \varrho^3 + 3 \alpha \varrho^2 + \varrho(\alpha^2 - 4) + \alpha]}{\varrho[\alpha(1 + \varrho^2) - 2\varrho]^2}.$$

Das gilt für negatives K, umsomehr also, wenn K positiv oder 0 ist.

Damit haben wir folgendes Resultat gewonnen:

Ist $\varrho > \varrho_1$, so gilt für alle Funktionen unserer Familie $\{f(z)\}$ in allen Punkten z, $|z| = \varrho$,

$$K \geqq \frac{(1 - \alpha \varrho)[-\alpha^2 \varrho^3 + 3 \alpha \varrho^2 + \varrho(\alpha^2 - 4) + \alpha]}{\varrho[\alpha(1 + \varrho^2) - 2\varrho]^2}. \tag{6}$$

Und diese untere Grenze wird nur von den Funktionen

$$f(z) = e^{i\vartheta} z \frac{\alpha - e^{i\varphi} z}{e^{-i\varphi} - \alpha z} \qquad (\vartheta,\ \varphi \text{ reell})$$

erreicht, und zwar für den einzigen Punkt $z = e^{-i\varphi} \varrho$.

2. Fall: $\varrho \leqq \varrho_1$. Jetzt sind zwei Möglichkeiten zu berücksichtigen. Entweder gilt auch für alle jetzt betrachteten ϱ:

$$K \geqq \frac{(1 - \alpha \varrho)[-\alpha^2 \varrho^3 + 3 \alpha \varrho^2 + \varrho(\alpha^2 - 4) + \alpha]}{\varrho[\alpha(1 + \varrho^2) - 2\varrho]^2},$$

oder es gibt mindestens ein ϱ zwischen 0 und ϱ_1 derart, daß für mindestens eine Funktion unserer Familie mindestens ein Punkt z mit $|z| = \varrho$ existiert, so daß:

$$K(f(z), z) = K < \frac{(1 - \alpha \varrho)[-\alpha^2 \varrho^3 + 3 \alpha \varrho^2 + \varrho(\alpha^2 - 4) + \alpha]}{\varrho[\alpha(1 + \varrho^2) - 2\varrho]^2}$$

ist.

---

[6]) Siehe die in Fußnote [5]) erwähnte Arbeit von Simonart.

Die erste Möglichkeit fällt weg. In der Tat bildet die Funktion

$$f(z) = z$$

den Kreis $|z| = \varrho$ auf den Kreis $|f| = \varrho$ ab, dessen konstante Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ für genügend kleine ϱ kleiner als

$$\frac{(1 - \alpha\varrho)[-\alpha^2\varrho^3 + 3\alpha\varrho^2 + \varrho(\alpha^2 - 4) + \alpha]}{\varrho[\alpha(1 + \varrho^2) - 2\varrho]^2}$$

ist.

Es gibt also Funktionen unserer Familie, die gewisse Kreise $|z| = \varrho$ mit $0 < \varrho \leqq \varrho_1$ auf Kurven abbilden, deren Krümmung in einigen Punkten kleiner als

$$\frac{(1 - \alpha\varrho)[-\alpha^2\varrho^3 + 3\alpha\varrho^2 + \varrho(\alpha^2 - 4) + \alpha]}{\varrho[\alpha(1 + \varrho^2) - 2\varrho]^2}$$

ist.

Betrachten wir einen solchen Fall.

Dann muß entweder die Ableitung der linken Seite der Beziehung (4) nach ω negativ sein; oder, falls das nicht der Fall ist, muß die Ableitung der linken Seite der Beziehung (5) nach $|f(z)|$ negativ sein. Denn, wenn diese beiden Ableitungen $\geqq 0$ sind, dann folgt, wie der Beweis bei Fall 1. zeigt, notwendig die Ungleichung (6).

Wir werden jetzt zeigen, daß unter den beiden möglichen Annahmen für die in Betracht kommenden $f(z)$, ϱ und z — welche die Beziehung

$$K(f(z), z) = K < \frac{(1 - \alpha\varrho)[-\alpha^2\varrho^3 + 3\alpha\varrho^2 + \varrho(\alpha^2 - 4) + \alpha]}{\varrho[\alpha(1 + \varrho^2) - 2\varrho]^2}$$

erfüllen — die Ungleichung besteht

$$K(f(z), z) = K \geqq \frac{1}{\varrho}.$$

In der Tat sei erstens die erste Ableitung negativ:

$$2\omega(1 - |f(z)|)\left[1 - \frac{1 + |f(z)|}{2} K\right] + \frac{1 + \varrho^2}{2\varrho} < 0.$$

Dann bleibt sie negativ auch für alle größeren Werte von ω. Es folgt also, daß wir in diesem Falle in der Beziehung (4) statt ω etwas Größeres oder Gleiches schreiben können.

Wenn man darum die bekannte Beziehung:

$$\omega = |f'(z)| \frac{1 - \varrho^2}{1 - |f(z)|^2} \leqq 1 \text{ }^{7})$$

berücksichtigt, folgt aus (4):

$$(1 - |f(z)|) - \frac{1 - |f(z)|^2}{2} K + \frac{1 + \varrho^2}{2\varrho} - 1 \leqq 0$$

d. h.

$$K \geqq 2 \frac{-|f(z)| + \dfrac{1 + \varrho^2}{2\varrho}}{1 - |f(z)|^2}. \tag{7}$$

[7]) C. Carathéodory. Conformal Representation, § 71, Theorem 4.

Die Ableitung von

$$\frac{-|f(z)|+\frac{1+\varrho^2}{2\varrho}}{1-|f(z)|^2}$$

nach $|f(z)|$ ist nun:

$$\frac{-1+\frac{1+\varrho^2}{\varrho}|f(z)|-|f(z)|^2}{(1-|f(z)|^2)^2}$$

und ist also negativ für

$$|f(z)| \leqq \varrho,$$

d. h., nach dem Schwarzschen Lemma, für alle unsere Funktionen $f(z)$.

Ich darf also in (7) $|f(z)|$ durch ϱ ersetzen und erhalte:

$$K \geqq 2\,\frac{-\varrho+\frac{1+\varrho^2}{2\varrho}}{1-\varrho^2} \quad \text{oder} \quad K \geqq \frac{1}{\varrho}.$$

Sei zweitens die Ableitung der linken Seite von (4) nach ω positiv oder 0 und die Ableitung der linken Seite von (5) nach $|f(z)|$ negativ.

Dann geht zunächst aus (4), wie früher, die Beziehung (5) hervor.

Die Ableitung der linken Seite von (5) ist hier nach unserer Annahme negativ:

$$-3K|f(z)|^2+2|f(z)|\,[2-K(1-2\varrho^2)]+[(1-\varrho^2)$$
$$+K\varrho^2(2-\varrho^2)]<0.$$

Dann ist sie negativ auch für alle größeren Werte als $|f(z)|$. Es folgt also, daß wir in diesem Falle in der Beziehung (5) $|f(z)|$ durch ϱ ersetzen dürfen, das — nach dem Schwarzschen Lemma — größer oder gleich ist.

So erhalten wir:

$$2(\varrho-\varrho^2)^2\left[1-\frac{1+\varrho}{2}K\right]+(1+\varrho^2)(\varrho-\varrho^3)-2\varrho^2(1-\varrho)\leqq 0,$$

oder

$$K \geqq \frac{1}{\varrho}.$$

Ist also für irgendein ϱ, irgendeine Funktion $f(z)$ unserer Familie und irgendeinen Punkt z

$$K(f(z),z)=K<\frac{(1-\alpha\varrho)[-\alpha^2\varrho^3+3\alpha\varrho^2+\varrho(\alpha^2-4)+\alpha]}{\varrho[\alpha(1+\varrho^2)-2\varrho]^2}$$

so gilt:

$$K(f(z),z)=K\geqq\frac{1}{\varrho}.$$

Nun ist einerseits

$$\frac{(1-\alpha\varrho)[-\alpha^2\varrho^3+3\alpha\varrho^2+\varrho(\alpha^2-4)+\alpha]}{\varrho[\alpha(1+\varrho^2)-2\varrho]^2}$$

die Krümmung der Bildkurve von $|z| = \varrho$ im Punkte $f(e^{-i\varphi}\varrho)$, wenn

$$(\alpha) \qquad f(z) = e^{i\vartheta}\frac{\alpha - e^{i\varphi} z}{e^{-i\varphi} - \alpha z} \qquad (\vartheta, \varphi \text{ reell})$$

ist; und andererseits

$$\frac{1}{\varrho}$$

die Krümmung der Bildkurve von $|z| = \varrho$ in jedem Punkte $f(z)$ derselben, wenn

$$(\beta) \qquad f(z) = e^{i\vartheta} z \qquad (\vartheta \text{ reell})$$

gesetzt wird, wobei diese Funktionen (α) und (β) unserer Familie $\{f(z)\}$ angehören.

Aber die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{(1 - \alpha\varrho)\,[-\alpha^2\varrho^3 + 3\alpha\varrho^2 + \varrho(\alpha^2 - 4) + \alpha]}{\varrho\,[\alpha(1 + \varrho^2) - 2\varrho]^2}$$

oder

$$\varrho^3 - \varrho^2\frac{4 + \alpha}{\alpha} + \varrho\frac{4 + \alpha}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} = 0$$

hat im Intervalle $0 < \varrho < \varrho_1$ nur eine Lösung ϱ_0.

Ist also $\varrho \leqq \varrho_0$ *so liefern die Funktionen*

$$f(z) = e^{i\vartheta} z \qquad (\vartheta \text{ reell})$$

das Minimum der Krümmung, während für $\varrho \geqq \varrho_0$ *das Minimum von den Funktionen*

$$f(z) = e^{i\vartheta} z\frac{\alpha - e^{i\varphi} z}{e^{-i\varphi} - \alpha z} \qquad (\vartheta, \varphi \text{ reell})$$

im Punkte $z = e^{-i\varphi}\varrho$ *erreicht wird.*

Damit ist der in der Einleitung ausgesprochene Satz bewiesen.

(Eingegangen am 24. 9. 1936.)

Über den größten Primteiler gewisser Polynome dritten Grades.

Von

Trygve Nagell in Uppsala (Schweden).

§ 1.

Einleitung.

Es sei $f(x)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und mit mindestens zwei verschiedenen Nullstellen. Wenn x eine natürliche Zahl ist, bezeichnen wir durch $P(x)$ die größte Primzahl, die in der ganzen Zahl $f(x)$ aufgeht, sofern diese Zahl von Null verschieden ist. Dann gilt bekanntlich das folgende Resultat von C. Siegel[1]):

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \infty. \tag{1}$$

Der Beweis folgt sofort aus dem Siegelschen Satze, daß die diophantische Gleichung

$$f(x) = A y^m, \tag{2}$$

mit ganzzahligem $m \geqq 2$ (ist $f(x)$ quadratisch, so muß $m \geqq 3$ sein), für jeden ganzzahligen Wert von A nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x und y hat. (Es wird hier vorausgesetzt, daß $f(x) = 0$ keine mehrfachen Wurzeln hat.)

Vor kurzem hat K. Mahler für gewisse quadratische Polynome eine wesentliche Vertiefung des Siegelschen Resultates gegeben, indem er den folgenden Satz bewies[2]):

Für die quadratischen Polynome

$$f(x) = D x^2 - A,$$

wo D eine natürliche Zahl ist, und A eine der Zahlen $+1$, -1, $+2$ oder -2 bedeutet, gilt die Relation

$$\lim_{x \to \infty} \text{inf.} \frac{P(x)}{\log \log x} \geqq 1. \tag{3}$$

---

[1]) C. Siegel, Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeitschr. 10 (1921), Satz 7, S. 204—205.

[2]) K. Mahler, Über den größten Primteiler der Polynome $x^2 \mp 1$, und Über den größten Primteiler spezieller Polynome zweiten Grades, Archiv for Mathematik og Naturwidenskab (Oslo) 41, Nr. 1 (1933) und Nr. 6 (1935).

Der Beweis beruht auf einem Hilfssatz über die Eigenschaften der Lösungen der diophantischen Gleichung

$$D x^2 - A = B y^3.$$

Das Ziel dieser Arbeit ist zu zeigen, wie man für gewisse kubische Polynome eine entsprechende Abschätzung für $P(x)$ herleiten kann. Es wird das folgende Ergebnis bewiesen:

Satz 1. *Für die kubischen Polynome*

$$A x^3 - C, \tag{4}$$

wo A eine natürliche Zahl ist, und C eine der Zahlen $+1$, -1, $+3$ oder -3 bedeutet, gilt die Relation (3).

Der Beweis beruht auf den Resultaten meiner Untersuchungen über die Lösungen in ganzen Zahlen x und y der diophantischen Gleichung[3])

$$A x^3 + B y^3 = C,$$

wo A und B natürliche Zahlen sind, und wo $C = 1$ oder $= 3$ ist.

§ 2.

Hilfssätze.

Aus dem Primzahlsatz[4]) folgt ohne weiteres:

Hilfssatz 1. *Sei ε eine beliebig kleine positive Konstante, z eine positive Zahl, die oberhalb einer von ε abhängigen Schranke liegt. Dann ist das Produkt aller Primzahlen $p \leqq z$ höchstens gleich*

$$e^{(1+\varepsilon)z}.$$

Aus der elementaren Zahlentheorie benutzen wir den folgenden

Hilfssatz 1a. *Die Anzahl aller Primzahlen $p \leqq z$ ist höchstens gleich*

$$\varkappa \frac{z}{\log z},$$

wo $\varkappa$ eine absolute positive Konstante ist[5]).

E. Landau hat gezeigt, daß es in jedem algebraischen Körper mit unendlich vielen Einheiten eine von einer Einheitswurzel verschiedene Einheit gibt, die einer gewissen Ungleichung genügt[6]). Wird in dieser Ungleichung $n = 3$ gesetzt, so folgt sofort:

---

[3]) T. Nagell, Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées, Journal de mathématiques (9) 4 (1925).

[4]) Vgl. etwa E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie II (Leipzig 1927). S. 47, Satz 402. Man muß $k = 1$, $l = 0$ nehmen.

[5]) Siehe z. B. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie I (Leipzig (1927), S. 66. Satz 112. Man kann z. B. $\varkappa = 5$ nehmen.

[6]) E. Landau, Abschätzung von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen, Göttinger Nachrichten 1918, S. 88, Formel 18.

Hilfssatz 2. *Es sei ξ die Fundamentaleinheit eines kubischen Zahlkörpers mit der negativen Diskriminante $-D$. Dann besteht die folgende Ungleichung*

$$|\log|\xi|| < k\sqrt{D}(\log D)^3, \tag{5}$$

wo k eine absolute positive Konstante ist[7]).

In der Folge wird die Fundamentaleinheit ξ eines kubischen Körpers mit negativer Diskriminante immer positiv und < 1 gewählt.

Die folgenden Sätze sind in meiner oben erwähnten Arbeit bewiesen (S. 234 und S. 249—251):

Hilfssatz 3. *Es sei B eine natürliche Zahl > 1. Dann hat die diophantische Gleichung*

$$x^3 + By^3 = 1 \tag{6}$$

höchstens eine Lösung in ganzen Zahlen x und y, mit $y \neq 0$. Gibt es eine Lösung x, y, so ist die Zahl

$$x + y\sqrt[3]{B}$$

entweder die Fundamentaleinheit im kubischen Körper $K(\sqrt[3]{B})$ oder das Quadrat dieser Einheit.

Hilfssatz 4. *Es seien A und B kubenfreie natürliche Zahlen und C eine der Zahlen 1 oder 3. Wenn $C = 1$ ist, sei sowohl A wie $B > 1$. Wenn $C = 3$ ist, sei AB durch 3 unteilbar. Dann hat die diophantische Gleichung*

$$Ax^3 + By^3 = C \tag{7}$$

höchstens eine Lösung in ganzen Zahlen x und y. Gibt es eine Lösung x, y, so ist

$$\frac{1}{C}(x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B})^3 = \xi^{2^n}, \tag{8}$$

wo ξ die Fundamentaleinheit des kubischen Körpers $K\left(\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\right)$ ist und n eine ganze Zahl $\geqq 0$.

Anmerkung. Von dem Falle der Gleichung

$$x^3 + 2y^3 = 3$$

wird hier abgesehen.

---

[7]) Eine Abgrenzung der Konstanten k wird von Landau nicht gegeben, ist aber leicht durchzuführen. Für unseren Zweck ist eine solche Abgrenzung nicht notwendig. — In den Mahlerschen Untersuchungen wird von der analogen Abschätzung der Lösungen der Pellschen Gleichung Gebrauch gemacht.

§ 3.

Die Polynome $x^3 \pm 1$.

Wir wollen eine positive Schranke $Z(z)$ bestimmen, so daß für jede natürliche Zahl $x \geqq Z(z)$ das Polynom $x^3 - 1$ durch eine Primzahl größer als z teilbar ist. Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_t$ die sämtlichen Primzahlen, die z nicht überschreiten. Diejenigen Zahlen $x^3 - 1$, für natürliches $x > 1$, die höchstens durch diese Primzahlen teilbar sind, schreiben wir in der Form

$$x^3 - 1 = B y^3, \tag{9}$$

wo

$$B = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots p_t^{\nu_t}$$

mit $\nu_i = 0, 1$ oder 2, y ganze Zahl. Indem wir einen bestimmten Wert von B festhalten, bezeichnen wir durch H das Produkt aller verschiedenen Primteiler von B. Es sei ferner $-D$ die Körperdiskriminante im kubischen Körper $K(\sqrt[3]{B})$. Dann ist bekanntlich entweder $D = 27 H^2$ oder $= 3 H^2$, folglich

$$D \leqq 27 (p_1 p_2 \cdots p_t)^2$$

und nach Hilfssatz 1 für alle hinreichend großen z

$$D \leqq 27 e^{2(1+\varepsilon)z}. \tag{10}$$

Es sei ξ die Fundamentaleinheit in $K(\sqrt[3]{B})$. Wenden wir nun Hilfssatz 3 auf die Gleichung (9) an, so ergibt sich, daß die Zahl

$$\eta = (x - y\sqrt[3]{B})^{-1} = x^2 + xy\sqrt[3]{B} + y^2(\sqrt[3]{B})^2$$

entweder $= \xi^{-1}$ oder $= \xi^{-2}$ ist, und also

$$\tfrac{3}{4} x^2 < \eta \leqq \xi^{-2}.$$

Durch Anwendung von Hilfssatz 2 folgt dann

$$\frac{\sqrt{3}}{2} x < \xi^{-1} < e^{k\sqrt{D}(\log D)^2}$$

oder wegen (10)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} x < e^{k\sqrt{27}\, e^{(1+\varepsilon)z} (\log 27 + 2(1+\varepsilon)z)^2}$$

und

$$x < e^{e^{(1+2\varepsilon)z}}$$

für alle $z \geqq z_1(\varepsilon)$. Für das Polynom $x^3 + 1$ erhalten wir, wie man sofort einsieht, genau dieselbe Ungleichung. Damit ist bewiesen:

Satz 2. *Ist ε positiv und beliebig klein, ferner die positive Zahl z oberhalb einer von ε abhängigen Schranke, so geht für jede natürliche Zahl x mit*

$$x \geqq e^{e^{(1+\varepsilon)z}}$$

in der Zahl $x^3 - 1$ eine Primzahl größer als z auf. Dasselbe gilt auch für die Zahl $x^3 + 1$.

§ 4.

Abschätzung der Lösungen der Gleichung (7).

Die Resultate meiner Untersuchungen über die diophantische Gleichung

$$(11) \qquad A x^3 + B y^3 = 1$$

gestatten eine Abschätzung, als Funktion von A und B, der eventuellen Lösungen x und y, wenn man von Hilfssatz 2 Gebrauch macht. Dies ist ohne weiteres klar, wenn eine Abschätzung der ganzen Zahl n in der Formel (8) bekannt ist.

Es sei nun wie in meiner früher erwähnten Abhandlung $A = a c^2 \geqq 2$ und $B = b d^2 \geqq 2$, wo a, b, c und d natürliche Zahlen sind, so daß $a b c d$ quadratfrei ist. Ist in der Formel (8) $n = 0$ oder $n = 1$, so erhält man

$$\eta = x^2 (\sqrt[3]{A})^2 - x y \sqrt[3]{A B} + y^2 (\sqrt[3]{B})^2 \leqq \xi^{-\frac{3}{2}}$$

oder

$$(12) \qquad \operatorname{Max}\left(\tfrac{3}{4} x^2 (\sqrt[3]{A})^2,\ \tfrac{3}{4} y^2 (\sqrt[3]{B})^2\right) < \eta \leqq \xi^{-\frac{3}{2}}.$$

Bezeichnet $-D$ die Körperdiskriminante im kubischen Körper $K\left(\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\right)$, so ist bekanntlich entweder $D = 27 (a b c d)^2$ oder $D = 3 (a b c d)^2$. Wir setzen $H = a b c d$. Nach Hilfssatz 2 folgt dann aus (12)

$$(13) \qquad \operatorname{Max}\left(|x| \cdot \sqrt[3]{A},\ |y| \sqrt[3]{B}\right) < \frac{2}{\sqrt{3}} e^{k \sqrt{3} H (\log 27 + 2 \log H)^2}.$$

Es sei nun in der Formel (8) $n \geqq 2$. Aus Kapitel IV (S. 252–257) der oben zitierten Abhandlung ergibt sich dann: Das Problem der Auflösung der Gleichung (11) läßt sich durch ein Verfahren, das ich das Reduktionsverfahren nenne, auf das Problem der Auflösung in ganzen nichtverschwindenden Zahlen X_1 und Y_1 einer Gleichung

$$(14) \qquad A_1 X_1^3 + B_1 Y_1^3 = 1$$

zurückführen, wo A_1 und B_1 natürliche kubenfreie Zahlen sind, und wo jeder Primteiler von $A_1 B_1$ entweder in A oder in B aufgeht. Es bestehen die folgenden Relationen

$$A_1 X_1^3 = f^2 N_1^6, \qquad B_1 Y_1^3 = -27 g^2 N_2^6,$$

wo $fg = A$ oder $= B$ ist. Ist $fg = A$, so bestehen weiter die Gleichungen

$$(15) \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{4} A N^4 + 2 B N M^3, \\ y = \phantom{\frac{1}{4}} B M^4 - A N^3 M, \end{cases}$$

und

$$(B M^3 + \tfrac{5}{4} A N^3)^2 = 1 + \tfrac{27}{16} A^2 N^6.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$B |M|^3 < 3 A |N|^3.$$

Durch Anwendung dieser Ungleichung auf die Gleichungen (15) folgt

$$|x| < \tfrac{1}{4} A N^4 + 6 A N^4 = \tfrac{25}{4} A N^4,$$

$$|y| < |M| \cdot (3 A |N|^3 + A |N|^3) < \sqrt[3]{\frac{3A}{B}} \cdot 4 A N^4$$

oder

$$(16) \qquad \operatorname{Max}(|x| \cdot \sqrt[3]{A},\ |y| \cdot \sqrt[3]{B}) < \tfrac{25}{4} A^{\frac{4}{3}} N^4.$$

Es ist ferner $N = 2 N_1 N_2$, folglich wird

$$\operatorname{Max}(\sqrt[3]{f^2} \cdot N_1^2,\ \sqrt[3]{27 g^2} \cdot N_2^2) \geqq \sqrt{\sqrt[3]{27 f^2 g^2} \cdot N_1^2 N_2^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{A} \cdot |N|.$$

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (16)

$$\operatorname{Max}(|x| \cdot \sqrt[3]{A},\ |y| \cdot \sqrt[3]{B}) < \tfrac{100}{9} [\operatorname{Max}(\sqrt[3]{f^2} \cdot N_1^2,\ \sqrt[3]{27 g^2} \cdot N_2^2)]^4$$

oder

$$(17) \qquad \operatorname{Max}(|x| \cdot \sqrt[3]{A},\ |y| \cdot \sqrt[3]{B}) < \tfrac{100}{9} \cdot [\operatorname{Max}(|X_1| \cdot \sqrt[3]{A_1},\ |Y_1| \cdot \sqrt[3]{B_1})]^4,$$

und wegen der Symmetrie in bezug auf A und B ist diese Ungleichung auch dann richtig, wenn $fg = B$ ist.

Es sei nun ξ_1 die Fundamentaleinheit im Körper $K\left(\sqrt[3]{\frac{A_1}{B_1}}\right)$. Ist in der Gleichung (14) sowohl A_1 wie B_1 größer als 1 und ist ferner

$$(X_1 \sqrt[3]{A_1} + Y_1 \sqrt[3]{B_1})^3 = \xi_1^{3^{n_1}}$$

mit $n_1 \geqq 2$, so kann das Reduktionsverfahren auf diese Gleichung fortgesetzt werden, und nur in diesem Fall. Wir nehmen jetzt an, daß wir

dieses Reduktionsverfahren μ Male anwenden und der Reihe nach die folgenden diophantischen Gleichungen erhalten

$$A_2 X_2^3 + B_2 Y_2^3 = 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_\mu X_\mu^3 + B_\mu Y_\mu^3 = 1,$$

wo A_i und B_i natürliche kubenfreie Zahlen sind.

Es wird ferner angenommen, daß das Reduktionsverfahren auf die letzte Gleichung nicht mehr anwendbar ist. Das bedeutet: entweder ist eine der Zahlen A_μ und B_μ gleich 1 und nach Hilfssatz 3

$$X_\mu \sqrt[3]{A_\mu} + Y_\mu \sqrt[3]{B_\mu} = \xi_\mu \quad \text{oder} \quad = \xi_\mu^2,$$

wo ξ_μ die Fundamentaleinheit im Körper $K\left(\sqrt[3]{\frac{A_\mu}{B_\mu}}\right)$ ist, oder die Zahlen A_μ und B_μ sind beide größer als 1 und es ist

$$(X_\mu \sqrt[3]{A_\mu} + Y_\mu \sqrt[3]{B_\mu})^3 = \xi_\mu \quad \text{oder} \quad = \xi_\mu^2.$$

Im ersteren Fall wird

$$\eta = X_\mu^2 (\sqrt[3]{A_\mu})^2 + X_\mu Y_\mu \sqrt[3]{A_\mu B_\mu} + Y_\mu^2 (\sqrt[3]{B_\mu})^2 \leqq \xi_\mu^{-2},$$

und im zweiten Falle wird

$$\eta^3 \leqq \xi_\mu^{-2}.$$

In beiden Fällen wird dann

$$\operatorname{Max}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} |X_\mu| \sqrt[3]{A_\mu}, \frac{\sqrt{3}}{2} | Y_\mu| \sqrt[3]{B_\mu}|\right) < \xi_\mu^{-1}.$$

Bezeichnet $-D_\mu$ die Körperdiskriminante in $K\left(\sqrt[3]{\frac{A_\mu}{B_\mu}}\right)$, so folgt nach Hilfssatz 2

(18) $$\operatorname{Max}(|X_\mu| \sqrt[3]{A_\mu}, |Y_\mu| \sqrt[3]{B_\mu}) < \frac{2}{\sqrt{3}} e^{k \sqrt{D_\mu} (\log D_\mu)^2}.$$

Wird die Ungleichung (17) auf die Gleichung (14) angewandt, so folgt

$$\operatorname{Max}(|X_1| \sqrt[3]{A_1}, |Y_1| \sqrt[3]{B_1}) < \frac{100}{9} \cdot [\operatorname{Max}(|X_2| \sqrt[3]{A_2}, |Y_2| \sqrt[3]{B_2})]^4$$

und also

$$\operatorname{Max}(|x| \sqrt[3]{A}, |y| \sqrt[3]{B}) < \left(\frac{100}{9}\right)^{1+4} \cdot [\operatorname{Max}(|X_2| \sqrt[3]{A_2}, |Y_2| \sqrt[3]{B_2})]^{4^2}.$$

Durch wiederholte Anwendung der Ungleichung (17) ergibt sich zuletzt

(19) $$\operatorname{Max}(|x| \sqrt[3]{A}, |y| \sqrt[3]{B})$$
$$< \left(\frac{100}{9}\right)^{1+4+4^2+\cdots+4^\mu} \cdot [\operatorname{Max}(|X_\mu| \sqrt[3]{A_\mu}, |Y_\mu| \sqrt[3]{B_\mu})]^{4^\mu}.$$

Nun ist $D_\mu < D \leqq 27 H^3$, wo H die frühere Bedeutung hat. Durch Einsetzung der Ungleichung (18) in (19) folgt dann endlich

$$(20)\quad \begin{cases} \operatorname{Max}\left(|x| \sqrt[3]{A},\ |y| \sqrt[3]{B}\right) \\ < \left(\frac{100}{9}\right)^{4^\mu + 1} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} e^{k \sqrt{27} H (\log 27 + 2 \log H)^2}\right)^{4^\mu}. \end{cases}$$

Die Zahl μ ist höchstens gleich der Anzahl der verschiedenen Primteiler in A oder in B.

Man bemerke: Ist die Ungleichung (13) erfüllt, so ist auch um so mehr die Ungleichung (20) erfüllt.

Es wäre leicht, bessere Abschätzungen herzuleiten, wenn man nur die Voraussetzungen besser ausnützt, als wir es getan haben. Für unseren Zweck genügt aber die gewonnene Ungleichung.

Die hier auf die Gleichung (11) angewandte Methode läßt sich nun ohne weiteres auf die Gleichung

$$A x^3 + B y^3 = 3$$

übertragen. (Vgl. meine oben zitierte Abhandlung, S. 259—263.) Man erhält, wie man sofort verifiziert, für die eventuellen Lösungen x und y eine Ungleichung, die aus der Ungleichung (20) dadurch entsteht, daß man die rechte Seite mit 27 multipliziert.

§ 5.

Der allgemeine Fall.

Es sei A eine natürliche kubenfreie Zahl > 1. Wir wollen eine positive Schranke $Z(z)$ bestimmen, so daß für jede natürliche Zahl $x \geqq Z(z)$ das Polynom $A x^3 - 1$ durch eine Primzahl größer als z teilbar ist. Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_t$ die sämtlichen Primzahlen, die z nicht überschreiten. Diejenigen Zahlen $A x^3 - 1$, für natürliches x, die höchstens durch diese Primzahlen teilbar sind, schreiben wir in der Form

$$(21)\qquad A x^3 - 1 = B y^3,$$

wo

$$B = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots p_t^{\nu_t}$$

mit $\nu_i = 0, 1$ oder 2, y ganze Zahl. Indem wir einen bestimmten Wert von B festhalten, bezeichnen wir wie oben durch H das Produkt der verschiedenen Primteiler von $A B$. Wir nehmen an, daß z so groß ist, daß die sämtlichen Primteiler von A kleiner als z sind. Dann wird nach Hilfssatz 1 für hinreichend großes $z > z_1(\varepsilon, A)$

$$(22)\qquad H \leqq p_1 p_2 \cdots p_t < e^{(1+\varepsilon) z}.$$

Für die Zahl μ in der Ungleichung (20) gilt $\mu \leqq t$, oder nach Hilfssatz 1a

$$\mu < \varkappa \frac{z}{\log z}. \tag{23}$$

Werden diese Ungleichungen für H und μ in (20) eingesetzt, so ergibt sich, indem wir der Bequemlichkeit wegen den Logarithmus nehmen,

$$\log x \sqrt[3]{A} < 4 \log 12 \cdot e^{\frac{\varkappa \log 4 \cdot z}{\log z}}$$

$$+ \left[\log \frac{2}{\sqrt{3}} + k \sqrt{27}\, e^{(1+\varepsilon)z} \cdot (\log 27 + 2(1+\varepsilon)z)^2\right] e^{\frac{\varkappa \log 4 \cdot z}{\log z}}.$$

Hieraus folgt für ein hinreichend großes $z > z_2(\varepsilon, A)$

$$x < e^{e^{(1+2\varepsilon)z}}.$$

Man sieht sofort ein, daß diese Ungleichung auch für die Polynome Ax^3+1, Ax^3-3 und Ax^3+3 bestehen muß. Sie gilt offenbar auch für nicht kubenfreie A. Damit ist bewiesen:

Satz 3. *Es sei A eine natürliche Zahl und C eine der Zahlen $+1$, -1, $+3$ oder -3. Ist ε positiv und beliebig klein, liegt ferner die positive Zahl z oberhalb einer von ε, A und C abhängigen Schranke, so geht für jede natürliche Zahl x mit*

$$x \geqq e^{e^{(1+\varepsilon)z}}$$

in der Zahl $Ax^3 - C$ eine Primzahl größer als z auf.

Wenn man nach z auflöst und beachtet, daß ε beliebig klein sein darf, folgt hieraus sofort Satz 1.

Uppsala, den 10. Oktober 1936.

(Eingegangen am 19. 10. 1936.)

Halblineare Transformationen.

Von

Johannes Haantjes in Delft (Niederlande).

Eine Verallgemeinerung der linearen Transformationen in einem Vektorraum, die an verschiedenen Stellen in der Mathematik eine Rolle spielt, bilden die *halblinearen Transformationen*[1]). Man erhält die halblinearen Transformationen, indem man die linearen Transformationen mit den Automorphismen des Grundkörpers K kombiniert. Das Ziel dieser Arbeit ist die Klassifikation der zu einem bestimmten Automorphismus gehörigen halblinearen Transformationen. Dabei werden zwei halblineare Transformationen äquivalent genannt, wenn sich zwei Bezugssysteme angeben lassen, derart, daß die eine Transformation in bezug auf die eine Basis und die andere in bezug auf die zweite Basis durch dieselbe Matrix dargestellt werden. Es handelt sich also darum, ein Kriterium für Äquivalenz abzuleiten und Normalformen anzugeben. In einer neulich erschienenen Arbeit von N. Jacobson[2]) wird ein derartiges Kriterium angegeben, welches von dem hier abgeleiteten verschieden ist. Die von Jacobson benutzte Methode ist mit der Methode der modernen Elementarteilertheorie nahe verwandt.

Im folgenden beschränken wir uns auf kommutative Körper von einer Charakteristik Null und auf Automorphismen *endlicher Ordnung* h.

Für die hier benutzte Methode ist diese letzte Einschränkung wesentlich[3]). In diesem Falle gehört nämlich zu jeder halblinearen Transformation P eine lineare Transformation $Q = P^h$. Die bei Q invarianten Teilräume werden in bezug auf die halblineare Transformation P bezüglich Invarianz untersucht. Dies führt zum folgenden Satz.

Ist x nicht Teiler des charakteristischen Polynoms $\Psi(x)$ von $Q = P^h$, so ist die Normalform von P durch die Normalform von Q bestimmt. Ist x Teiler von $\Psi(x)$, so können zu einer Normalform von Q mehrere Normalformen von P gehören.

---

[1]) B. L. van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen, Erg. der Math. IV, 2, S. 4.

[2]) N. Jacobson, On pseudo-linear transformations, Proc. Nat. Acad. of Sci. 21 (1935), S. 667—670.

[3]) Bei der von N. Jacobson angegebenen Methode braucht man die Endlichkeit der Ordnung nicht vorauszusetzen.

In § 1 werden einige Resultate der Theorie der Elementarteiler zusammengefaßt und in § 2 findet man einige Hilfssätze über nicht kommutative Polynome.

§ 1.

Lineare Transformationen [4]).

Es sei $E_n(K)$ ein *n-dimensionaler Vektorraum* über einem Körper K. Den Körper K setzen wir als *kommutativ* und von einer *Charakteristik Null* voraus. Jeder Vektor läßt sich als Linearkombination von n Basisvektoren (auch Maßvektoren genannt) schreiben. Die Koeffizienten $v^\varkappa$ ($\varkappa, \ldots, \tau = 1, \ldots, n$), Elemente von K, sind die Bestimmungszahlen des Vektors v in bezug auf die gewählte Basis. Irgend n linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis. Der Übergang zu einer neuen Basis wird durch eine Matrix vom Range n gegeben. Die Bestimmungszahlen des Vektors v in bezug auf das neue Bezugssystem sind

(1.1) $$v^{\varkappa'} = A^{\varkappa'}_{\lambda} v^{\lambda}.$$

Eine *lineare Transformation* in E_n wird gegeben durch eine quadratische Matrix Q:

(1.2) $$v'^{\varkappa} = Q^{\varkappa}_{\cdot\lambda} v^{\lambda}, \quad \text{kurz: } v' = Qv.$$

Unter dem Minimalpolynom von Q versteht man das Polynom $\varphi(x)$ kleinsten Grades, für welches $\varphi(Q) = 0$ ist. $\varphi(x)$ ist Teiler des charakteristischen Polynoms $\Psi(x) = \mathrm{Det}\,(xA - Q)$, wo A die identische Transformation darstellt, und zerfällt in Faktoren, die Potenzen von Primpolynomen sind:

(1.3) $$\varphi(x) = \Pi_1(x)^{r_1} \ldots \Pi_s(x)^{r_s}.$$

E_n zerfällt eindeutig in Teilräume $E_{(i)}$. $E_{(i)}$ wird gebildet von den Vektoren, für die

(1.4) $$\Pi_i(Q)^{r_i}\, v = 0$$

ist. Jeder Vektor von $E_{(i)}$ wird von einer Potenz von $\Pi_i(Q)$ zu Null gemacht. Die kleinste Potenz, für die dies der Fall ist, heißt die *Ordnung* des Vektors. Bezeichnen wir die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren q-ter Ordnung [5]) mit n_q, so gilt für jeden Teilraum

(1.5) $$n_r \leqq n_{r-1} \leqq \cdots \leqq n_1$$

---

[4]) Die in diesem Paragraphen zusammengefaßten Begriffe findet man z. B. in: B. L. van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen, Erg. d. Math. IV, 2 und B. L. van der Waerden: Moderne Algebra II, Kap. 15. Vgl. auch O. Schreier und E. Sperner, Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra II, zweiter Abschnitt.

[5]) Linear unabhängig heißen Vektoren q-ter Ordnung im folgenden, wenn sie linear unabhängig sind in bezug auf Vektoren niedrigerer Ordnung.

und jede dieser Zahlen ist ein Vielfaches des Grades des zugehörigen Polynoms $\Pi(x)$.

Zwei lineare Transformationen sind dann und nur dann äquivalent (d. h. haben dann und nur dann dieselbe Normalform), wenn die Polynome $\Pi_i(x)$ und die zu jedem Π_i gehörigen Zahlen $n_1, \ldots, n_r$ für beide Transformationen dieselben sind.

§ 2.

Nicht kommutative Polynome.

Es sei J ein *Automorphismus* des Körpers der Ordnung d, d. h. d sei die kleinste Zahl, für die

$$\alpha^{(d)} = \alpha \tag{2.1}$$

ist für jedes Element α in K. Mit $\alpha^{(m)}$ bezeichnen wir das Element, das man durch m-malige Anwendung des Automorphismus aus α bekommt. Wir betrachten nun die Polynome

$$A(t) = \alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_n, \tag{2.2}$$

wo die Koeffizienten α_i dem Körper K angehören. Es sei

$$B(t) = \beta_0 t^m + \ldots + \beta_m \tag{2.3}$$

ein zweites Polynom. Die Summe bzw. Differenz $A \pm B$ wird definiert als das Polynom, das man durch Addition bzw. Subtraktion der korrespondierenden Koeffizienten erhält. Man bekommt das Polynom αA, $\alpha \subset K$, indem man sämtliche Koeffizienten von A mit α multipliziert. Von der Produktbildung zweier Polynome setzen wir voraus: Die Multiplikation sei assoziativ und distributiv in bezug auf die Addition. Es genügt also das Produkt $x \cdot \alpha$ zu definieren. Es sei

$$x \cdot \alpha = \alpha^{(1)} x. \tag{2.4}$$

Die Polynome bilden also einen *nicht kommutativen Ring*[6]).

Es seien $A(t)$ und $B(t)$ zwei Polynome. Wie Ore in der oben zitierten Arbeit gezeigt hat, existiert ein größter gemeinsamer Teiler (G. G. T; mit (A, B) bezeichnet) und ein kleinstes gemeinsames Vielfaches (K. G. V.; mit $[A, B]$ bezeichnet). Im folgenden wird, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, unter Teiler und Vielfaches immer rechter Teiler und rechtes Vielfaches verstanden. Es ist also

$$[A, B] = A_1 B = B_1 A. \tag{2.5}$$

Satz 1. *Ist (A, B) Teiler von C, so existieren Polynome A_1 und A_2 derart, daß gilt*

$$A_1 A + A_2 B = C. \tag{2.6}$$

[6]) Vgl. Ö. Ore, Theory of Non-commutative polynomials, Annals of Math. 34 (1933), S. 480—508.

Zwei Polynome A und A_1 nennt man *äquivalent*, wenn ein mit A relativ-primes Polynom B existiert derart, daß

$$A_1 = [A, B]\, B^{-1} \qquad \text{(Bezeichnung } B\,A\,B^{-1}) \tag{2.7}$$

ist. A und A_1 haben denselben Grad. Ist (2.7) erfüllt, so existiert auch ein Polynom B_1 derart, daß $A = B_1\, A_1\, B_1^{-1}$ ist.

Satz 2.
$$C\,[A, B]\,C^{-1} = [C\,A\,C^{-1},\ C\,B\,C^{-1}].$$

Satz 3.
$$(C\,B)\,A\,(C\,B)^{-1} = C\,(B\,A\,B^{-1})\,C^{-1}.$$

Satz 4. *Ist A Teiler von B und sind C und B relativ prim, so ist $C\,A\,C^{-1}$ Teiler von $C\,B\,C^{-1}$.*

Satz 5. *Jedes Polynom läßt sich als Produkt von Primfaktoren darstellen und diese Darstellung ist bis auf Äquivalenz eindeutig.*

Die Beweise dieser Sätze findet man in der Arbeit von Ore.

Die Elemente α von K, für die $\alpha^{(1)} = \alpha$ ist, bilden einen Unterkörper k. Es gilt nun [7])

Satz 6. *Ein Polynom $\Pi(t)$ ist dann und nur dann mit jedem Polynom vertauschbar, wenn Π ein Polynom in t^d ist mit Koeffizienten, welche dem Körper k angehören.*

Π ist nämlich dann und nur dann kommutativ mit t, wenn die Koeffizienten zu k gehören, und kommutativ mit jedem Element α, wenn Π ein Polynom in t^d ist.

Es sei jetzt $\Pi(t^d)$ ein Polynom mit Koeffizienten in k, und $A(t)$ ein Primfaktor von Π, also

$$\Pi = B\,A. \tag{2.8}$$

Ferner machen wir die Annahme, daß $\Pi(x)$, $x = t^d$, als Polynom in x aufgefaßt, prim ist (also prim in bezug auf die gewöhnliche Multiplikation) und ungleich $\alpha\, x$. Aus

$$0 = B\Pi - \Pi B = B\,(B\,A - A\,B) \tag{2.9}$$

folgt dann

$$\Pi = B\,A = A\,B. \tag{2.10}$$

Im Falle C mit Π prim ist, ist wegen Satz 4 das Polynom $C\,A\,C^{-1}$ Teiler von $C\,\Pi\,C^{-1} = \Pi$. Daraus geht hervor, daß das K. G. V. aller Polynome $D\,A\,D^{-1}$, $(D, \Pi) = 1$,

$$\chi = [C_1\,A\,C_1^{-1}, \ldots, C_l\,A\,C_l^{-1}] \tag{2.11}$$

Teiler von Π ist. Nun folgt aus Satz 2 und 3

$$C\,\chi\,C^{-1} = \chi \tag{2.12}$$

[7]) Vgl. N. Jacobson, Non commutative polynomials and cyclic algebras, Annals of Math. 35 (1933), S. 197–208.

für jedes Polynom C, für welches $(C, \chi) = 1$ ist, also z. B. für $C = \alpha$ und für $C = t$. Es geht nämlich t nicht in χ auf, weil t nicht in Π aufgeht. χ ist also kommutativ mit t und α. Unter Berücksichtigung von Satz 5 und 6 erhalten wir also

Satz 7. *Gehören die Koeffizienten eines Polynoms Π in t^d dem Körper k an und ist $\Pi(x)$ prim, so sind die Primfaktoren von $\Pi(t)$ alle äquivalent und Π bestimmt das Primpolynom A bis auf Äquivalenz.*

$\Pi(t)$ habe wieder die obengenannten Eigenschaften. Es ist

$$\begin{aligned} \Pi^2 &= ABAB = AABB = A^2B^2 \\ \Pi^r &= A^rB^r = A^rC. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Wir betrachten jetzt die Kongruenz.

$$A^r X \equiv 0 \mod \Pi^r. \tag{2.14}$$

Die Lösungen sind CD, wo D beliebig ist. Für C kann man schreiben

$$C = C_0(t^d) + C_1(t^d)\,t + C_2(t^d)\,t^2 + \ldots + C_{d-1}(t^d)\,t^{d-1}. \tag{2.15}$$

Mit C ist auch

$$C\alpha = \alpha C_0 + \alpha^{(1)} C_1 t + \alpha^{(2)} C_2 t^2 + \ldots + \alpha^{(d-1)} C_{d-1} t^{d-1} \tag{2.16}$$

eine Lösung der Kongruenz (2.14). Wir wählen jetzt d Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, für welche die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_d \\ \alpha_1^{(1)} & & \alpha_d^{(1)} \\ \vdots & & \\ \alpha_1^{(d-1)} & & \alpha_d^{(d-1)} \end{vmatrix} \tag{2.17}$$

nicht verschwindet. Man kann dann $C_0, C_1 t, \ldots, C_{d-1} t^{d-1}$ linear in den d Lösungen $C\alpha_1, \ldots, C\alpha_d$ ausdrücken. Auch

$$Ct = C_{d-1} t^d + C_0 t + C_1 t^2 + \ldots + C_{d-2} t^{d-1} \tag{2.18}$$

ist eine Lösung von (2.14), sowie Ct^2 usw., woraus hervorgeht, daß man das Polynom $C_i t^\nu D$ (D ganz beliebig) linear durch Lösungen der Kongruenz (2.14) ausdrücken kann.

Nicht alle C_i können den Faktor Π enthalten, denn sonst würde Π Teiler von C sein, was unmöglich ist wegen Satz 5. C_i sei ein den Faktor Π nicht enthaltendes Polynom. Es existieren dann Polynome $D(x)$ und $E(x)$, derart, daß

$$C_i(x)\,D(x) + \Pi^r(x)\,E(x) = 1 \tag{2.19}$$

ist, wo $C_i(x) = C_i(t^d)$ ist und wir die gewöhnliche kommutative Multiplikation von Polynomen verwenden. Ersetzen wir in (2.19) x durch t^d, so bleibt die Gleichung richtig, denn für Polynome in t^d ist die oben definierte Multiplikation identisch mit der gewöhnlichen Multiplikation.

Die Polynome $C_i(t)$ und $\Pi^r(t)$ sind also relativ-prim sowohl rechts als links und deshalb auch die Polynome $C_i t^i$ und Π^r.

Mithin hat die Kongruenz (vgl. Satz 1)

$$C_i t^i X \equiv Y \mod \Pi^r \tag{2.20}$$

für jede beliebige Wahl von $Y(t)$ eine Lösung. Ein beliebig gewähltes Polynom Y läßt sich also linear durch Lösungen der Kongruenz (2.14) ausdrücken. Ist der Grad von Π in x gleich p (in t also pd), so folgt

Satz 8. *Die Kongruenz* (2.14) *hat* pdr *linear unabhängige Lösungen vom Grade* $< pdr$.

§ 3.

Halblineare Transformationen.

Man erhält die halblinearen Transformationen, indem man die linearen Transformationen mit den Automorphismen des Grundkörpers K kombiniert[8]). Es sei J ein solcher Automorphismus der Ordnung h. Eine halblineare Transformation wird gegeben durch eine quadratische Matrix P

$$v'^{\varkappa} = P^{\varkappa}_{\cdot\bar{\lambda}} (v^{(1)})^{\bar{\lambda}}, \qquad \text{kurz: } v' = Pv. \tag{3.1}$$

Die Elemente $P^{\varkappa}_{\cdot\bar{\lambda}}$ nennt man die Bestimmungszahlen von P. Geht man mittels (1.1) zu einer neuen Basis über, so wird dieselbe halblineare Transformation gegeben durch die Matrix

$$P^{\varkappa'}_{\cdot\bar{\lambda}'} = A^{\varkappa'}_{\varkappa} P^{\varkappa}_{\cdot\bar{\lambda}} (A^{(1)})^{\bar{\lambda}}_{\bar{\lambda}'}. \tag{3.2}$$

Zwei halblineare Transformationen werden äquivalent genannt, wenn sich zwei Basen (Bezugssysteme) angeben lassen, derart, daß die eine Transformation in bezug auf die eine Basis und die andere Transformation in bezug auf die zweite Basis durch dieselbe Matrix dargestellt werden. Das Ziel dieser Arbeit ist, ein Kriterium für diese Äquivalenz abzuleiten und Normalformen anzugeben. Das Problem ist also ein Klassifikationsproblem für Matrizen, wobei die Matrizen B und C äquivalent heißen, wenn $B = DC(D^{-1})^{(1)}$ ist.

Ist K der Körper der komplexen Zahlen und J der Übergang zum konjugiert-komplexen, so spricht man von *antilinearen Transformationen*. In diesem Falle ist $h = 2$. Die Klassifikation dieser Transformationen findet sich in einer früheren Arbeit[9]).

---

[8]) Vgl. Fußnote [1]).

[9]) Klassifikation der antilinearen Transformationen, Math. Annalen 112 (1935), S. 98–106.

Zweimalige Anwendung der halblinearen Transformation P ergibt eine zum Automorphismus J^2 gehörige halblineare Transformation, die wir mit P^2 bezeichnen,

$$v'' = P^2 v. \tag{3.3}$$

Durch h-malige Anwendung von P erhält man eine lineare Transformation Q

$$P^h = Q. \tag{3.4}$$

Sind nun $\Pi_1(x), \ldots, \Pi_s(x)$ die zu Q gehörigen Primpolynome, so zerfällt E_n in s Teilräume (vgl. § 1). Diese Teilräume sind bei der Transformation Q invariant. Wie verhalten sie sich aber bei der halblinearen Transformation P?

Aus der Definition von Q folgt

$$QPv = PQv \tag{3.5}$$

und die Transformationen P und Q sind also vertauschbar.

P ist aber nicht mit den Elementen von K vertauschbar, es gilt vielmehr

$$P\alpha = \alpha^{(1)} P. \tag{3.6}$$

Für Polynome in P gilt also die in § 2 definierte Multiplikation.

Liegt der Vektor v im zum Primpolynom $\Pi(x)$ gehörigen Teilraum, so ist (vgl. (1.4))

$$P\,\Pi(Q)^r v = (\Pi(Q)^r)^{(1)} P v = 0. \tag{3.7}$$

Wir haben also den Satz erhalten:

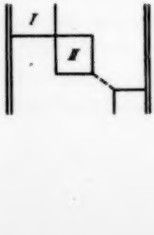
Mit $\Pi(x)$ ist auch $\Pi(x)^{(1)}$ ein zur Transformation P gehöriges Primpolynom. Ist v ein zum Polynom Π gehöriger Vektor, so ist Pv ein zum Polynom $\Pi^{(1)}$ gehöriger Vektor.

Wird die kleinste Zahl k, für die $\Pi^{(k)} = \Pi$ ist, mit m bezeichnet, so sind die Primpolynome des Systems

$$\Pi, \Pi^{(1)}, \ldots, \Pi^{(m-1)} \tag{3.8}$$

alle verschieden (m ist Teiler von h) und die Summe der zugehörigen Teilräume ist bei der Transformation P invariant. Die Polynome $\Pi_1(x), \ldots, \Pi_s(x)$ gehören also in Gruppen zusammen und zu jeder Gruppe gehört ein bei P invarianter Teilraum. Wählt man die Basisvektoren in diesen Teilräumen, so sieht die Matrix der Bestimmungszahlen von P bezüglich dieser Basis so aus:

(3.9)



Die quadratischen Diagonalkästchen I, II, ... enthalten die nicht verschwindenden Bestimmungszahlen. Jedes Kästchen gehört zu einem bei P invarianten Unterraum und die „Länge" eines Kästchens ist gleich der Dimension dieses Unterraums. Durch passende Wahl der Basiselemente in den Teilräumen kann man nun die Kästchen in eine Normalform bringen.

Sind v und w zwei zum Polynom Π gehörige linear unabhängige Vektoren q-ter Ordnung, so sind Pv und Pw zwei zum Polynom $\Pi^{(1)}$ gehörige linear unabhängige Vektoren q-ter Ordnung. Daraus geht hervor: Wird auf eine Basis für die zum Polynom Π gehörigen Vektoren die Transformation P angewendet, so erhält man eine Basis für die zum Polynom $\Pi^{(1)}$ gehörigen Vektoren.

§ 4.

Der zu $\Pi(x) \neq x$ gehörige Unterraum.

Betrachten wir jetzt den zu $\Pi(x) \neq x$ gehörigen Unterraum. Der Grad von $\Pi(x)$ sei p. Die oben eingeführte Zahl m ist Teiler von h.

Wir setzen

$$h = md, \qquad P^m = R, \qquad R^d = Q. \tag{4.1}$$

Auch für Polynome in R gilt die nicht kommutative Multiplikation. Der zugehörige Automorphismus ist J^m. Mit v gehört auch Rv zum Polynom Π. Es sei v ein Vektor höchster Ordnung r. Wir bilden die Vektoren

$$\begin{aligned} &v, Rv, \ldots, R^d v = Qv, \quad RQv, \ldots, R^{d-1}Q^{p-1}v, \\ &\qquad \Pi(Q)v, R\Pi(Q)v, \ldots, \Pi(Q)^r v = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Das Polynom $\Pi(R^d)$ bestimmt ein Primpolynom $A(R)$ bis auf Äquivalenz (§ 2, Satz 7) derart, daß

$$\Pi(R) = B(R)A(R) \tag{4.3}$$

ist. Ist nun $X(R)$ eine Lösung der Kongruenz

$$A^r X \equiv 0 \mod \Pi^r, \tag{4.4}$$

so gilt für den Vektor $w = Xv$

$$A^r w = 0. \tag{4.5}$$

In § 2 haben wir gezeigt, daß diese Kongruenz prd linear unabhängige Lösungen vom Grade $< prd$ gestattet. Der zur Lösung X gehörige Vektor Xv ist linear durch die prd Vektoren (4.2) ausdrückbar. Daraus geht hervor: Gibt es unter den Vektoren (4.2) l linear unabhängige Vektoren r-ter Ordnung, so existieren l linear unabhängige Vektoren $w = Xv$ der Ordnung r, für die (4.5) gilt.

Ist nun u ein von den Vektoren (4.2) linear unabhängiger Vektor r-ter Ordnung, so können, ausgehend von u, in derselben Weise wieder Vektoren w, für die (4,5) gilt, konstruiert werden. Dieser Prozeß läßt sich wiederholen, bis keine linear unabhängigen Vektoren r-ter Ordnung mehr vorhanden sind. Wir haben dann n_r linear unabhängige, der Gleichung (4.5) genügende Vektoren r-ter Ordnung erhalten. Die Ordnungszahlen von $A\,w$, $A^2\,w$, usw. sind $r-1$, $r-2$, usw. Wir beweisen: *Ist k der Grad von A, so sind die Vektoren r-ter Ordnung*

$$(4.6)\qquad w, R\,w, R^2 w, \ldots, R^{k-1} w$$

linear unabhängig in bezug auf Vektoren niedrigerer Ordnung. Würde nämlich die Ordnung des Vektors

$$(4.7)\qquad (\alpha_0 + \alpha_1 R + \ldots + \alpha_{k-1} R^{k-1})\, w = D\,w$$

kleiner als r sein, so wäre auch die Ordnung von $X D w$ (X beliebig) kleiner als r. X läßt sich aber wegen Satz 1 so bestimmen, daß

$$(4.8)\qquad X D \equiv 1 \bmod A$$

ist, d. h. die Ordnung des Vektors w wäre kleiner als r, was gegen die Voraussetzung ist.

Ist w_1 von den Vektoren (4.6) linear unabhängig, so gilt dies auch für das System

$$(4.9)\qquad w_1, R\,w_1, \ldots, R^{k-1} w_1.$$

Wäre nämlich die Ordnung des Vektors

$$(4.10)\qquad C_1 w_1 + C_2 w$$

kleiner als r, so wäre auch

$$(4.11)\qquad w_1 + X C_2 w, \quad X C_1 \equiv 1 \bmod A,$$

ein Vektor einer Ordnung kleiner als r. Dies besagt aber, daß die Vektoren (4.6) zusammen mit w_1 linear abhängig wären, was gegen die Voraussetzung ist.

Aus diesen Sätzen geht nun hervor, daß n_r/k Vektoren w existieren, für die die Vektoren der Systeme (4.6) linear unabhängig sind in bezug auf Vektoren niedrigerer Ordnung. Diese Vektoren wählen wir als Basisvektoren. Die von den Vektoren $C\,A\,w$, wo C ein beliebiges Polynom in R vom Grade $k-1$ ist, linear unabhängigen Vektoren $(r-1)$-ter Ordnung werden in gleicher Weise behandelt usw. Damit haben wir dann eine Basis im zu $\Pi(x)$ gehörigen Unterraum bekommen. Wir haben schon gezeigt, daß man durch Anwendung der Transformation P, P^2, usw. eine Basis in den zu $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$ usw. gehörigen Unterräumen erhält. Die Form der Matrix der Bestimmungszahlen von P in bezug auf diese Basis heißt die *Normalform* von P. Es zeigt sich also:

Im Falle, daß x nicht Teiler des charakteristischen Polynoms von $Q = P^h$ ist, ist die Normalform der halblinearen Transformation P durch die Normalform der zugehörigen linearen Transformation Q bestimmt.

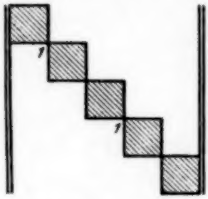
B e i s p i e l:

$$A(t) = t^3 + \alpha_0; \quad m = 1, \quad d = h = 3, \quad r = 2, \quad n_2 = 6, \quad n_1 = 9.$$

Die Maßvektoren sind

$$e_1,\ e_2 = Pe_1,\ e_3 = P^2 e_1,\ e_4 = Ae_1 = P^3 e_1 + \alpha_0 e_1,$$
$$e_5 = Pe_4,\ e_6 = Pe_5\ (Pe_6 = 0),\ e_7,\ e_8 = Pe_7,\ \text{usw.}$$

Die Normalform ist



wo die schraffierten Quadrate stehen für

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

und die nicht besetzten Stellen mit Nullen auszufüllen sind.

§ 5.

Der Fall $\Pi(x) = x$.

Wir betrachten jetzt den Fall $\Pi(x) = x$. Der zu $\Pi(x)$ gehörige Unterraum ist wegen $\Pi = \Pi^{(1)}$ nicht nur bei Q, sondern auch bei der halblinearen Transformation P invariant. Ist v ein Vektor q-ter Ordnung, so ist

(5.1) $$P^h v = Qv = \Pi(Q)v$$

ein Vektor $(q-1)$-ter Ordnung. Daraus geht hervor, daß die Ordnung von Pv entweder q oder $q-1$ ist.

Wir wählen jetzt n_r linear unabhängige Vektoren höchster Ordnung r. Diese Vektoren bestimmen einen Unterraum E_{n_r} der Dimension n_r. Dieser Raum ist bis auf Vektoren niedrigerer Ordnung bestimmt. In diesem E_{n_r} bilden die Vektoren v, für die $P^i v$ $(i = 1, \ldots, h)$ ein Vektor $(r-1)$-ter Ordnung ist, einen Teilraum E_{m_i} der Dimension m_i. Es folgt

(5.2) $$E_{m_1} \subset E_{m_2} \subset \ldots \subset E_{m_h} = E_{n_r}.$$

Diese Teilräume sind mit E_{n_r} bis auf Vektoren niedrigerer Ordnung bestimmt. Die Zahlen

(5. 3) $$m_1 \leqq m_2 \leqq \cdots \leqq m_h = n_r$$

liegen aber eindeutig fest, d. h. die m_i sind Invarianten von P.

Aus

(5. 4) $$\alpha P v + \beta P w = P(\alpha^{(-1)} v + \beta^{(-1)} w)$$

geht hervor:

Gehören die in bezug auf die $E_{m_{i-1}}$ linear unabhängigen Vektoren v und w zur E_{m_i}, so sind Pv und Pw zwei Vektoren der $E_{m_{i-1}}$, die in bezug auf die $E_{m_{i-2}}$ linear unabhängig sind.

Wir wählen jetzt $(m_h - m_{h-1})$ Vektoren in E_{n_r}, die linear unabhängig sind in bezug auf $E_{m_{h-1}}$, und bilden für jeden dieser Vektoren die Kette

(5. 5) $$v, Pv, \ldots, P^{h-1} v, Qv, PQv, \ldots, Q^r v = 0.$$

Aus dem oben bewiesenen Satz geht hervor, daß die so erhaltenen Vektoren linear unabhängig sind. Anwendung von P auf die gewählten $(m_h - m_{h-1})$ Vektoren ergibt Vektoren aus $E_{m_{h-1}}$. Zu diesen Vektoren wählen wir jetzt in $E_{m_{h-1}}$ noch

(5. 6) $$m_{h-1} - m_{h-2} - (m_h - m_{h-1}) = 2\, m_{h-1} - m_h - m_{h-2}$$

Vektoren derart, daß die so erhaltenen $m_{h-1} - m_{h-2}$ Vektoren von $E_{m_{h-1}}$ linear unabhängig sind in bezug auf $E_{m_{h-2}}$, und bilden wieder die zugehörigen Ketten (5. 5) usw.

Die von den schon eingeführten Vektoren linear unabhängigen Vektoren $(r-1)$-ter Ordnung werden in derselben Weise behandelt. So fortfahrend, erhält man ein System von linear unabhängigen Vektoren in dem zu $\Pi(x)$ gehörigen Unterraum, das als Basis eingeführt werden kann.

Das zum Polynom $\Pi(x) = x$ gehörige Quadrat der Matrix der Bestimmungszahlen von P in bezug auf diese Basis ist dann leicht anzugeben. Werden die zu den Vektoren q-ter Ordnung gehörigen Zahlen m_i mit $\overset{q}{m}_i$ $(q = 1, \ldots, r;\ i = 1, \ldots, h)$ bezeichnet, so zeigt sich, daß in diesem Falle die Normalform von P durch die Zahlen $\overset{q}{m}_i$ bestimmt ist. *Im Gegensatz zu dem im vorigen Paragraphen behandelten Falle können also in diesem Falle zu einer Normalform von Q mehrere Normalformen von P gehören.*

Die Zahlen $\overset{q}{m}_i$ können nicht beliebig gewählt werden, sie müssen einigen Ungleichheiten genügen. Aus der Definition dieser Zahlen leitet man nämlich ab:

(5. 7) $$\begin{aligned} \overset{q}{m}_{i+1} &\geqq \overset{q}{m}_i, \\ \overset{q}{m}_{i+1} - \overset{q}{m}_i &\leqq \overset{q}{m}_i - \overset{q}{m}_{i-1}, \\ \overset{q}{m}_1 &\leqq \overset{q-1}{m}_h - \overset{q-1}{m}_{h-1}. \end{aligned}$$

Beispiel:

$$h = 3;\quad r = 2;\quad \overset{2}{m}_1 = 2,\quad \overset{2}{m}_2 = 3,\quad \overset{2}{m}_3 = 4,$$
$$\overset{1}{m}_1 = 3,\quad \overset{1}{m}_2 = 6,\quad \overset{1}{m}_3 = 8.$$

Die Dimension des Unterraumes ist also $\overset{2}{m}_3 + \overset{1}{m}_3 = 12$.

Man erhält die folgende Normalform

$$\left\Vert\begin{array}{cccccc|cccc|cc}
0 & & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & & & & & & & & & & \\
 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 0 & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & & & & 1 & 0
\end{array}\right\Vert$$

Alle nicht besetzten Stellen sind mit Nullen auszufüllen. Umgekehrt kann man aus der Normalform die Zahlen r und $\overset{q}{m}_i$ ableiten.

(Eingegangen am 22. 10. 1936.)

Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre.

Von

Wilhelm Ackermann in Burgsteinfurt.

Der Zweck der folgenden Ausführungen ist, einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für den Teil der Mengenlehre zu geben, der sich auf die Zermeloschen (Fraenkelschen) Axiome unter Ausschluß des Unendlichkeitsaxioms gründet. Dieser Teil der Mengenlehre wird auch als allgemeine Mengenlehre bezeichnet[1]). Der Widerspruchsfreiheitsbeweis ist insofern nicht trivial, als die Axiome zwar nicht die Existenz einer Menge mit unendlich vielen Elementen, wohl aber die Existenz von unendlich vielen Mengen postulieren[2]). Der Beweis wird durch Zurückführung auf die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie vollzogen werden, die jetzt in dem gewünschten Umfange als gesichert betrachtet werden kann[3]).

1. Das Axiomensystem der allgemeinen Mengenlehre.

Beim axiomatischen Aufbau der Mengenlehre wird ein gewisser Bereich von Dingen, die wir Mengen nennen, zugrunde gelegt. In diesem Grundbereich wird ein Prädikat $El(x, y)$, zu lesen „die Menge x ist Element der Menge y", als sinnvoll vorausgesetzt, und die Axiome geben an, welche Eigenschaften El haben soll. Wir nehmen die Axiome, mit ganz geringen Veränderungen, in der Gestalt, die ihnen schon E. Zermelo gegeben hat[4]). Dieses Axiomensystem ist, logisch betrachtet, von der ersten Stufe, indem die vorkommenden All- und Seinszeichen sich nur auf die Individuen des Grundbereichs, also die Mengen, beziehen. Es gehört also dem Bereiche des „engeren Prädikatenkalküls" an[5]).

Wir geben nun die symbolische Formulierung der Axiome. Um unnötige Kompliziertheit der Schreibweise zu vermeiden, gebrauchen wir im folgenden die Abkürzung $x \Subset y$ für $(z)(El(z, x) \rightarrow El(z, y))$, d. h. „jedes

[1]) Vgl. A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Auflage, S. 305.

[2]) Wir werden die Axiome natürlich so fassen, daß die Existenz der Nullmenge gesichert ist.

[3]) Vgl. G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Annalen 112 (1936), S. 493—565.

[4]) Math. Annalen 65 (1908), S. 261—281.

[5]) In unserem Buche „Grundzüge der theoretischen Logik" (im folgenden als H. A. zitiert) wird die Bezeichnung „engerer Funktionenkalkül" gebraucht.

Element von x ist auch Element von y“ oder kürzer „die Menge x ist eine Teilmenge der Menge y“.

I. **Axiom der Bestimmtheit.**

$$(x \mathrel{\underline{\in}} y \;\&\; y \mathrel{\underline{\in}} x) \rightarrow x = y.$$

„Wenn x Teilmenge von y und y Teilmenge von x ist, so sind x und y identisch.“

II. **Axiom der Paarung.**

$$x \neq y \rightarrow (Ez)(u)[El(u,z) \longleftrightarrow (u = x)(u = y)].$$

„Sind x und y verschiedene Mengen, so existiert eine Menge z, die x und y als Elemente enthält, aber keine anderen Elemente.“

III. **Axiom der Vereinigung.**

$$(x)(Ey)(z)\{El(z,y) \longleftrightarrow (Ev)[El(z,v) \;\&\; El(v,x)]\}.$$

„Zu jeder Menge x gibt es eine Menge y, so daß jedes z dann und nur dann Element von y ist, wenn eine Menge v existiert, die z als Element hat und selbst Element von x ist.“

IV. **Axiom der Potenzmenge.**

$$(x)(Ey)(z)[El(z,y) \longleftrightarrow z \mathrel{\underline{\in}} x].$$

„Zu jeder Menge x gibt es eine Menge y, so daß jedes z dann und nur dann Element von y ist, wenn es Teilmenge von x ist.“

V. **Axiom der Aussonderung.**

$$(x)(Ey)(z)[El(z, y) \longleftrightarrow (F(z) \;\&\; El(z, x))].$$

„F sei ein beliebiges Prädikat. Es gibt dann zu jeder Menge x eine Menge y, so daß jedes z dann und nur dann Element von y ist, wenn es Element von x ist und das Prädikat F auf z zutrifft.“

Eine Veranlassung, das Axiom der Aussonderung durch andere Axiome zu ersetzen, besteht für uns nicht. Wir kommen weiter unten darauf zurück. Wir bemerken nur noch, daß das Axiom die Existenz der Nullmenge einschließt. Wir brauchen ja nur für F das Prädikat $x \neq x$ zu nehmen.

VI. **Axiom der Auswahl.**

Da dieses Axiom ziemlich kompliziert ist, verwenden wir einige Abkürzungen. Es sei $\mathfrak{A}(x)$ eine Abkürzung für

$$(Ey)El(y, x) \;\&\; (z)[El(z, x) \rightarrow (Eu)El(u, z)],$$

d. h. „die Menge x hat mindestens ein Element und jedes Element hat wieder Elemente“. $\mathfrak{B}(x)$ stehe für den Ausdruck

$$(y)(z)\{(y = z)\overline{El}(y, x)\overline{El}(z, x)(u)[\overline{El}(u, y)\overline{El}(u, z)]\},$$

d. h. „je zwei verschiedene Elemente von x haben keine gemeinsamen Elemente“. Weiter bedeute $\mathfrak{C}(y, x)$

$$(z)\{El(z, y) \rightarrow (Eu)[El(u, x) \;\&\; El(z, u)]\},$$

d. h. „y ist Teilmenge der Vereinigungsmenge von x". Endlich bezeichne $\mathfrak{D}(x, y)$ den Ausdruck

$$(Ez)\{El(z, x) \,\&\, El(z, y) \,\&\, (u)[\overline{El}(u, x)\,\overline{El}(u, y)\,(u = z)]\},$$

d. h. „x und y haben genau ein Element gemeinsam". Das Axiom der Auswahl lautet dann

$$(x)\{[\mathfrak{A}(x) \,\&\, \mathfrak{B}(x)] \rightarrow (Ey)[\mathfrak{C}(y, x) \,\&\, (z)(\overline{El}(z, x)\,\mathfrak{D}(z, y))]\}.$$

Zu einer Zusammenstellung von Axiomen wie den obigen gehört noch eine genaue Angabe, welche logischen Hilfsmittel bei der Ableitung aus den Axiomen gebraucht werden sollen. Wir haben das schon kurz angedeutet, indem wir bemerkten, daß das Axiomensystem von der ersten Stufe ist. Wir denken uns also die Axiome und Schlußregeln des engeren Prädikatenkalküls hinzugefügt [6]). Da wir ferner die Identität benutzt haben, so müssen die entsprechenden Axiome hinzugefügt werden. Diese sind

$$x = x,$$
$$x = y \rightarrow (F(x) \rightarrow F(y)).$$

F ist hier eine freie Prädikatenvariable. Durch diese Regeln wird insbesondere auch festgelegt, welche Einsetzungen für eine Prädikatenvariable F erfolgen dürfen, und das Axiom der Aussonderung erhält seinen präzisen Sinn [7]). Die Art der Einsetzung ist übrigens im Rahmen des Formalismus (soweit es sich natürlich überhaupt um „Prädikate" handelt) keinen Einschränkungen unterworfen.

2. Der Grundgedanke des Widerspruchsfreiheitsbeweises.

Der Grundgedanke unseres Widerspruchsfreiheitsbeweises läßt sich auch ohne Zuhilfenahme des Formalismus darlegen. Natürlich haben die folgenden Überlegungen nur den Charakter einer vorläufigen Orientierung. Wie wir schon eingangs erwähnten, benutzen wir eine arithmetische Interpretation der Axiome. Als Elemente des Grundbereiches nehmen wir die nicht negativen ganzen Zahlen. Es kommt dann darauf an, in diesem Bereiche ein Prädikat $\mathfrak{El}(x, y)$ so zu definieren, daß die Axiome zu beweisbaren zahlentheoretischen Sätzen werden, wenn wir $El(x, y)$ durch $\mathfrak{El}(x, y)$ ersetzen. Wir benutzen zu diesem Zweck die Tatsache,

---

[6]) H. A., S. 53, § 5 und S. 68, § 10.

[7]) Auf die Tatsache, daß bei Anwendung des engeren Prädikatenkalküls das Axiom der Aussonderung einen präzisen Sinn bekommt, hat zuerst Th. Skolem hingewiesen, vgl. Fund. Math. 15 (1930), S. 337—341.

daß sich jede von 0 verschiedene positive ganze Zahl a eindeutig in der Form $2^{b_1} + 2^{b_2} + \ldots + 2^{b_n}$ darstellen läßt, wobei die $b_1, b_2, \ldots, b_n$ alle verschieden sind. Die Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ und keine anderen sollen dann die „Elemente" von a sein. Z. B. hat die Zahl 101, die sich im dyadischen Zahlensystem als 1100101 schreibt, die Elemente 0, 2, 5, 6. 0 ist die einzige Zahl, die keine „Elemente" hat. Die Zahl 0 entspricht also der Nullmenge, 1 der Menge, deren einziges Element die Nullmenge ist, usw. Es ist dann nicht schwer einzusehen, daß bei dieser Interpretation die Axiome der Mengenlehre in beweisbare zahlentheoretische Sätze übergehen. Dem Axiom der Bestimmtheit entspricht der zahlentheoretische Satz, daß die $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eindeutig das zugehörige a bestimmen. Der Paarmenge (x, y) entspricht die Bildung von $2^x + 2^y$. Beim Beweis der den Axiomen III bis VI entsprechenden arithmetischen Sätze ist folgendes wesentlich:

a) Zu jeder Zahl y gibt es nur endlich viele x, so daß $\mathfrak{El}(x, y)$ richtig ist.

b) Zu jedem y gibt es nur endlich viele x, so daß $x \mathrel{=\!\!\!\!\!<} y$ richtig ist.

c) Es sei eine beliebige endliche Gesamtheit von untereinander verschiedenen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben. Es gibt dann eine Zahl y, so daß $\mathfrak{El}(x, y)$ nur für diejenigen x richtig ist, die zu der angegebenen Gesamtheit gehören. Nämlich $2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_n}$ ist diese Zahl.

Die Richtigkeit der den Axiomen III und V entsprechenden Sätze ergibt sich dann aus a) und c), die Richtigkeit der dem Axiom IV entsprechenden Behauptung aus b) und c). In ähnlicher Weise beweist sich VI, indem wir noch den Umstand benutzen, daß es unter den „Elementen" einer Zahl y ein ausgezeichnetes gibt, nämlich z. B. das größte.

Nun besteht aber die Schwierigkeit, daß bei diesem Grundgedanken offenbar variable Zahlenfolgen und variable Mengen eine Rolle spielen. Würde man ihn also einfach in den Formalismus übersetzen, so müßte man von den Quantifikatoren für Prädikate Gebrauch machen. Zusammen mit den zahlentheoretischen Axiomen hätte man dann einen Formalismus, der nicht mehr der reinen Zahlentheorie entsprechen würde, sondern schon der Analysis, einen Formalismus also, dessen Widerspruchsfreiheit bisher nicht mit den Hilbertschen Methoden hat gezeigt werden können. Der Zweck der folgenden Ausführungen besteht nun, abgesehen von der exakten Durchführung der Beweise, darin zu zeigen, daß es möglich ist, bei der Definition von $\mathfrak{El}(x, y)$ und den Beweisen für die den Axiomen entsprechenden zahlentheoretischen Sätze nicht über den Rahmen der reinen Zahlenlehre hinauszugehen.

3. Einige zahlentheoretischen Funktionen und ihre charakteristischen Eigenschaften.

Wir legen unseren weiteren Betrachtungen ein Axiomensystem der reinen Zahlenlehre zugrunde. Ein derartiges Axiomensystem enthält in irgendeiner Form die Formeln und Schlußweisen des engeren Prädikatenkalküls, ferner die schon erwähnten Axiome für die Identitätsbeziehung und die Peanoschen Axiome. Außerdem dürfen in beliebiger endlicher Zahl Definitionen von zahlentheoretischen Funktionen durch Rekursion hinzugefügt werden[8]).

Wir geben zunächst die Definition einer Reihe von Rekursionsfunktionen, die wir bei unserem Widerspruchsfreiheitsbeweise brauchen werden. Zu diesen Funktionen gehören $a+b$, $a\cdot b$, a^b, die in der üblichen Weise eingeführt werden. Die Ableitung der gebräuchlichsten mit diesen Funktionen verknüpften Formeln (z. B. derjenigen, die das assoziative, kommutative Gesetz der Multiplikation ausdrücken) aus den Axiomen setzen wir als bekannt voraus, ebenso die Einführung und den Gebrauch der Prädikate $x<y$, $x \leqq y$, $x>y$ usw.[9]). Außerdem führen wir die folgenden rekursiv definierten Funktionen ein:

a) $\alpha 0 = 1$; $\alpha(n+1) = 0$,

b) $\beta 0 = 0$; $\beta(n+1) = \alpha[\beta n]$,

c) $\lambda(a,0) = \alpha a$; $\lambda(0,b) = \alpha b$; $\lambda(a+1, b+1) = \lambda(a,b)$,

d) $\iota(a,b) = \alpha[\lambda(a,b)]$,

e) $\gamma 0 = 0$; $\gamma(n+1) = \gamma n + \beta n$,

f) $\mu 0 = 0$; $\mu 1 = 0$; $\mu(n+2) = \mu[\gamma(n+2)] + 1$,

g) $\tau 0 = 0$; $\tau 1 = 0$; $\tau(n+2) = 2\cdot\tau[\gamma(n+2)] + \beta(n+2)$,

h) $\varphi(a,0) = 0$; $\varphi(a,n) = \iota(n,0)\cdot\lambda(a,\mu n) + \iota(a,\mu n)\cdot\varphi(a,\tau n)$.

Zur besseren Orientierung geben wir die inhaltliche Bedeutung dieser Funktionen, obwohl diese natürlich bei unseren Beweisen keine Rolle spielt. Die Bedeutung von α bedarf keiner Erklärung. βn ist der Rest von n modulo 2. $\lambda(a,b)$ ist 1 für $a=b$ und sonst 0. $\iota(a,b)$ ist 0 für $a=b$ und sonst 1. γn ist gleich $\left[\frac{n}{2}\right]$, d. h. gleich der größten ganzen Zahl, die $\leqq \frac{n}{2}$ ist. μn ist diejenige Zahl x, für die $2^x \leqq n < 2^{x+1}$; für 0 hat μ den Wert 0. τn ist für von 0 verschiedene n gleich $n - 2^{\mu n}$. $\varphi(a,n)$ gibt an, ob an der a-ten Stelle in der dyadischen Entwicklung

[8]) Vgl. Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik, wo die verschiedensten Systeme angegeben werden, oder auch die in Anmerkung [3]) erwähnte Arbeit von G. Gentzen.

[9]) Vgl. hierüber Hilbert-Bernays, op. cit.

von n eine 0 oder 1 steht. Dabei denken wir uns die Stellen von rechts an gezählt, mit 0 beginnend, und ferner die Entwicklung durch Hinzufügen von Nullen bis ins Unendliche fortgesetzt. Wir bemerken noch, daß f), g), h) Definitionen durch eine Wertverlaufsrekursion sind, d. h. der Wert der Funktion für n wird nicht auf den für $n-1$ zurückgeführt, sondern hängt in anderer Weise mit den Werten der Funktion für kleinere Argumente zusammen. Bei f) und g) wird μn, bzw. τn auf $\mu[\gamma n]$ bzw. $\tau[\gamma n]$ zurückgeführt, bei h) erhalten wir den Wert der Funktion für n aus dem für τn. Damit diese Rekursionen zulässig sind, ist erforderlich, daß sich die Formeln

$$x \neq 0 \rightarrow \gamma x < x,$$
$$x \neq 0 \rightarrow \tau x < x$$

ableiten lassen, was keine Schwierigkeiten macht.

Wir müssen ferner bei unserem Beweise die Tatsache benutzen, daß sich eine weitere Reihe von Formeln für die angegebenen Funktionen formal herleiten lassen. Da diese Herleitung selbst nichts Besonderes bietet, vielmehr von jedem Leser leicht auszuführen ist, so seien hier für μ und τ einfach die betreffenden Formeln zusammengestellt.

Eigenschaften von μ.

(1) $$\mu a < \mu b \rightarrow a < b,$$

(2) $$b > \mu a \rightarrow \mu(a + 2^b) = b,$$

(3) $$\mu a \leqq a.$$

Eigenschaften von τ.

(4) $$a \neq 0 \rightarrow a = \tau a + 2^{\mu a},$$

(5) $$a \neq 0 \rightarrow \tau a < a,$$

(6) $$b > \mu a \rightarrow \tau(a + 2^b) = a,$$

(7) $$\tau a \neq 0 \rightarrow \mu(\tau a) < \mu a.$$

Eigenschaften von φ.

(8) $$\varphi(a, b) = 0 \vee \varphi(a, b) = 1.$$

Beweis durch Induktion nach b. Aus der Definition von φ läßt sich beweisen:

$$\varphi(a, \tau b) = 0 \vee \varphi(a, \tau b) = 1 \rightarrow \varphi(a, b) = 0 \vee \varphi(a, b) = 1.$$

(9) $$a \neq 0 \rightarrow \varphi(\mu a, a) = 1$$

ergibt sich aus der Definition von φ.

(10) $$b > \mu a \rightarrow \varphi(b, a) = 0.$$

Beweis durch Induktion nach a.

$$(b > \mu a \ \&\ a \neq 0) \rightarrow \varphi(b, a) = \varphi(b, \tau a) \quad \text{(nach Def. von } \varphi\text{)},$$
$$a \neq 0 \rightarrow \tau a < a \quad \text{(nach (5))},$$
$$a \neq 0 \rightarrow \mu(\tau a) \leqq \mu a \quad \text{(Umkehrung von (1))},$$
$$(a \neq 0 \ \&\ b > \mu a) \rightarrow b > \mu(\tau a),$$
$$[b > \mu(\tau a) \rightarrow \varphi(b, \tau a) = 0] \rightarrow [b > \mu a \ \&\ a \neq 0 \rightarrow \varphi(b, a) = 0].$$

Da $\varphi(b, 0) = 0$, ist das Glied $a \neq 0$ entbehrlich.

(11) $$b > \mu a \rightarrow \varphi(x, a + 2^b) = \varphi(x, a) + \lambda(x, b).$$

Beweis: Aus der Definition von φ ergibt sich, da $a + 2^b \neq 0$,

$$\varphi(x, a + 2^b) = \lambda[x, \mu(a + 2^b)] + \iota[x, \mu(a + 2^b)]\, \varphi(x, \tau(a + 2^b))$$
$$b > \mu a \rightarrow \varphi(x, a + 2^b) = \lambda(x, b) + \iota(x, b)\, \varphi(x, a) \quad \text{(nach (2) und (6))}.$$

Aus der letzten Formel ergibt sich (11) unter Anwendung von (10).

(12) $$\varphi(\mu x, \tau x) = 0.$$

Beweis: $\tau x \neq 0 \rightarrow \varphi(\mu x, \tau x) = 0$ (nach (7) und (10)). Die Voraussetzung $\tau x \neq 0$ kann fortfallen, da $\varphi(a, 0) = 0$.

(13) $$\varphi(a, n) = \iota(n, 0) \cdot \lambda(a, \mu n) + \varphi(a, \tau n).$$

Beweis: Nach Definition von φ und (12).

4. Der Widerspruchsfreiheitsbeweis.

Wir sind jetzt so weit, daß wir den in § 2 angekündigten Widerspruchsfreiheitsbeweis durchführen können. Es handelt sich darum, ein zahlentheoretisches Prädikat $\mathfrak{El}(a, b)$ so zu definieren, daß die in § 1 genannten Axiome der Mengenlehre in beweisbare zahlentheoretische Sätze übergehen, falls man in ihnen $El(a, b)$ durch $\mathfrak{El}(a, b)$ ersetzt.

Definition von $\mathfrak{El}(a, b)$.

$\mathfrak{El}(a, b)$ sei eine Abkürzung für $\varphi(a, b) = 1$. Nach (8) gilt daher

$$\overline{\mathfrak{El}}(a, b) \longleftrightarrow \varphi(a, b) = 0.$$

Wir leiten nun auch für $\mathfrak{El}(a, b)$ eine Reihe von Formeln ab.

(14) $$\overline{\mathfrak{El}}(a, 0).$$

Beweis: $\varphi(a, 0) = 0$ (laut Definition von φ).

(15) $$a \neq 0 \rightarrow (E b)\, \mathfrak{El}(b, a).$$

Beweis: Nach (9) gilt

$$a \neq 0 \rightarrow \mathfrak{El}(\mu a, a).$$

(16) $$(E b)\, \mathfrak{El}(b, a) \rightarrow \mathfrak{El}(\mu a, a).$$

Beweis aus (14) und der beim Beweise von (15) benutzten Formel.

(17) $$\mathfrak{El}\,(0, 1).$$

Beweis aus der Definition von φ.

(18) $$b > \mu a \rightarrow \overline{\mathfrak{El}}\,(b, a).$$

Beweis nach (10).

(19) $$a \neq 0 \rightarrow \overline{\mathfrak{El}}\,(a, 1)$$

ist eine Folgerung von (18), da $\mu\, 1 = 0$.

(20) $$b > \mu a \rightarrow [\mathfrak{El}\,(x, a + 2^b) \longleftrightarrow \mathfrak{El}\,(x, a) \vee x = b].$$

Beweis nach (11).

(21) $$(E z)\,(x)\,[\mathfrak{El}\,(x, z) \longleftrightarrow F(x)\ \&\ x \leqq n].$$

F ist hier eine freie Prädikatvariable. Der Beweis geschieht durch Induktion nach n. Nach (14), (17), (19) gilt

$$F(0) \rightarrow (x)\,[\mathfrak{El}\,(x, 1) \longleftrightarrow F(x)\ \&\ x \leqq 0],$$

$$\overline{F}(0) \rightarrow (x)\,[\mathfrak{El}\,(x, 0) \longleftrightarrow F(x)\ \&\ x \leqq 0],$$

also

$$(E z)\,(x)\,[\mathfrak{El}\,(x, z) \longleftrightarrow F(x)\ \&\ x \leqq 0].$$

Weiter haben wir

$$\{(x)\,[\mathfrak{El}\,(x, z) \longleftrightarrow F x\ \&\ x \leqq n]\ \&\ \overline{F}(n+1)\}$$
$$\rightarrow (x)\,[\mathfrak{El}\,(x, z) \longleftrightarrow F x\ \&\ x \leqq n + 1],$$

$$\{(x)\,[\mathfrak{El}\,(x, z) \longrightarrow F x\ \&\ x \leqq n]\ \&\ F(n+1)\}$$
$$\rightarrow (x)\,[\mathfrak{El}\,(x, z + 2^{n+1}) \longleftrightarrow F x\ \&\ x \leqq n + 1].$$

Die erste Formel bedarf keines weiteren Beweises; die Richtigkeit der zweiten ergibt sich aus (20). Beide Formeln zusammengenommen ergeben die zweite Prämisse für die vollständige Induktion.

(22) $$x \subset y \rightarrow \mu x \leqq \mu y.$$

$x \subset y$ ist hier eine Abkürzung für $(z)\,[\mathfrak{El}\,(z,x) \rightarrow \mathfrak{El}\,(z,y)]$. $x \subset y$ ist also äquivalent mit $(z)\,[\varphi(z,x) \leqq \varphi(z,y)]$.

Beweis: Für $x = 0$ ist nichts zu beweisen.

$$x \neq 0 \rightarrow \varphi(\mu x, x) = 1 \qquad \text{(nach (9))},$$

$$x \neq 0\ \&\ x \subset y \rightarrow \varphi(\mu x, y) = 1 \quad \text{(nach Def. von } x \subset y),$$

$$\varphi(\mu x, y) = 1 \rightarrow \mu x \leqq \mu y \qquad \text{(nach (10)}.$$

(23) $$(x \subset y\ \&\ \mu x = \mu y) \rightarrow \tau x \subset \tau y.$$

Unter Benutzung der beim Beweis von (22) gemachten Bemerkungen läßt sich die Formel auch schreiben als

$$\{(z)\,[\varphi(z,x) \leqq \varphi(z,y)]\ \&\ \mu x = \mu y\} \rightarrow (z)\,[\varphi(z, \tau x) \leqq \varphi(z, \tau y)].$$

Beweis:

$$x \neq 0 \rightarrow \varphi(z,x) = \lambda(z,\mu x) + \varphi(z,\tau x) \qquad \text{(nach (13))},$$
$$(\mu x = \mu y \,\&\, y \neq 0) \rightarrow \varphi(z,y) = \lambda(z,\mu x) + \varphi(z,\tau y),$$
$$[x \neq 0 \,\&\, y \neq 0 \,\&\, \mu x = \mu y \,\&\, (z)(\varphi(z,x) \leqq \varphi(z,y))]$$
$$\rightarrow (z)[\varphi(z,\tau x) \leqq \varphi(z,\tau y)] \quad \text{(aus den vorigen beiden Formeln)}.$$

Die Voraussetzung $x \neq 0$ ist entbehrlich, da die beiden Formeln $\tau 0 = 0$ und $\varphi(z,0) = 0$ beweisbar sind. Desgleichen kann man die Voraussetzung $y \neq 0$ fortlassen, da aus $z[\varphi(z,x) \leqq \varphi(z,0)]$ sich ergeben würde $(z)[\varphi(z,x) = 0]$, d. h. $x = 0$ (nach (15)).

(24) $$(x)(x \subset y \rightarrow x \leqq y).$$

Wir bezeichnen (24) zur Abkürzung mit $\mathfrak{A}(y)$. $\mathfrak{A}(0)$ ist offenbar beweisbar. Wir zeigen ferner, daß

$$y \neq 0 \rightarrow [\mathfrak{A}(\tau y) \rightarrow \mathfrak{A} y]$$

sich beweisen läßt:

$$\mathfrak{A}(\tau y) \rightarrow [\tau x \subset \tau y \rightarrow \tau x \leqq \tau y],$$
$$[x \subset y \,\&\, \mu x = \mu y] \rightarrow \tau x \subset \tau y \qquad \text{(nach (23))};$$
$$\mathfrak{A}(\tau y) \rightarrow [(x \subset y \,\&\, \mu x = \mu y) \rightarrow \tau x \leqq \tau y],$$
$$x \neq 0 \rightarrow \tau x + 2^{\mu x} = x,$$
$$y \neq 0 \rightarrow \tau y + 2^{\mu y} = y \qquad \text{(nach (4))};$$
$$[x \neq 0 \,\&\, y \neq 0 \,\&\, \mathfrak{A}(\tau y)] \rightarrow [x \subset y \,\&\, \mu x = \mu y \rightarrow x \leqq y],$$
$$x \subset y \rightarrow \mu x \leqq \mu y \qquad \text{(nach (22))};$$
$$\mu x < \mu y \rightarrow x < y. \qquad \text{(nach (1))}.$$

Aus den letzten drei Formeln ergibt sich

$$[x \neq 0 \,\&\, y \neq 0 \,\&\, \mathfrak{A}(\tau y)] \rightarrow [x \subset y \rightarrow x \leqq y].$$

Die Voraussetzung $x \neq 0$ kann dann noch fortgelassen werden.

(25) $$[x \subset y \,\&\, y \subset x] \rightarrow x = y.$$

Das ist die Formel, die dem *Axiom der Bestimmtheit* entspricht. Sie ergibt sich sofort aus (24).

(26) $$\mathfrak{El}(z, 2^x) \longleftrightarrow z = x.$$

Beweis: Für $x \neq 0$ ergibt sich die Richtigkeit aus (20), indem man 2^x durch $0 + 2^x$ ersetzt und (14) berücksichtigt. Für $x = 0$ ergibt sich (26) aus (17) und (19).

(27) $$x \neq y \rightarrow [\mathfrak{El}(z, 2^x + 2^y) \longleftrightarrow (z = x)(z = y)].$$

Beweis nach (20) und (26).

(28) $$x \neq y \rightarrow (Ez)(u)[\mathfrak{El}(u,z) \longleftrightarrow (u = x)(u = y)].$$

Diese Formel entspricht dem *Axiom der Paarung*. Der Beweis ergibt sich aus (27).

(29) $$\mathfrak{El}(x, y) \rightarrow x \leqq y.$$

Beweis: $$\mathfrak{El}(x, y) \rightarrow x \leqq \mu y \quad \text{(nach (18))},$$
$$\mu y \leqq y \quad \text{(nach (3))}.$$

(30) $$(E v)\,[\mathfrak{El}(z, v) \,\&\, \mathfrak{El}(v, y)] \rightarrow z \leqq y.$$

Beweis unter Anwendung von (29).

(31) $$(E y)\,(z)\,\{\mathfrak{El}(z, y) \longleftrightarrow (E v)\,[\mathfrak{El}(z, v) \,\&\, \mathfrak{El}(v, x)]\}.$$

Diese Formel entspricht dem *Axiom der Vereinigung*. Nach (30) ist die Formel gleichwertig mit

$$(E y)\,(z)\,\{\mathfrak{El}(z, y) \longleftrightarrow ((E v)\,[\mathfrak{El}(z, v) \,\&\, \mathfrak{El}(v, x)] \,\&\, z \leqq x)\}.$$

Die Richtigkeit der letzten Formel ergibt sich durch Einsetzung aus (21).

(32) $$(x)\,(E y)\,(z)\,[\mathfrak{El}(z, y) \longleftrightarrow z \subset x].$$

Diese Formel entspricht dem *Axiom der Potenzmenge*. Ihre Richtigkeit ergibt sich ebenfalls aus (21), wenn man berücksichtigt, daß nach (24) $z \subset x$ durch $z \subset x \,\&\, z \leqq x$ ersetzt werden kann.

(33) $$(x)\,(E y)\,(z)\,[\mathfrak{El}(z, y) \longleftrightarrow F(z) \,\&\, \mathfrak{El}(z, x)].$$

Diese Formel entspricht dem *Axiom der Aussonderung*. Nach (29) ist sie äquivalent mit der Formel

$$(x)\,(E y)\,(z)\,[\mathfrak{El}(z, y) \longleftrightarrow F(z) \,\&\, \mathfrak{El}(z, x) \,\&\, z \leqq x],$$

die sich durch Einsetzung aus (21) ergibt.

(34) $$(x)\,(E y)\,(z)\,\{\mathfrak{El}(z, y) \longleftrightarrow (E v)\,(\mathfrak{El}(v, x) \,\&\, z = \mu v]\}.$$

Da $\mathfrak{El}(v, x) \,\&\, z = \mu v$ mit $\mathfrak{El}(v, x) \,\&\, z = \mu v \,\&\, z \leqq x$ äquivalent ist, läßt sich der Beweis wieder unter Anwendung von (21) erbringen. Wir gebrauchen im folgenden für

$$(z)\,\{\mathfrak{El}(z, y) \longleftrightarrow (E v)\,[\mathfrak{El}(v, x) \,\&\, z = \mu v]\}$$

die Abkürzung $\mathfrak{K}(x, y)$, so daß sich also (34) als $(x)\,(E y)\,\mathfrak{K}(x, y)$ schreibt. Weiter sollen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ im folgenden dieselbe Bedeutung haben wie auf S. 306—307, nur daß natürlich für $El(x, y)$ jetzt $\mathfrak{El}(x, y)$ zu setzen ist.

(35) $$[\mathfrak{A}x \,\&\, \mathfrak{K}(x, y) \,\&\, \mathfrak{El}(u, y)] \rightarrow (E w)\,(\mathfrak{El}(w, x) \,\&\, \mathfrak{El}(u, w) \,\&\, u = \mu w).$$

Beweis:

$$[\mathfrak{K}(x, y) \,\&\, \mathfrak{El}(u, y)] \rightarrow (E w)\,[\mathfrak{El}(w, x) \,\&\, u = \mu w] \quad \text{(nach Def. von } \mathfrak{K}),$$
$$[\mathfrak{A}x \,\&\, \mathfrak{El}(w, x)] \rightarrow (E z)\,\mathfrak{El}(z, w) \quad \text{(nach Def. von } \mathfrak{A}),$$
$$(E z)\,\mathfrak{El}(z, w) \rightarrow \mathfrak{El}(\mu w, w) \quad \text{(nach (16))},$$
$$[\mathfrak{A}x \,\&\, \mathfrak{El}(w, x)] \rightarrow \mathfrak{El}(\mu w, w).$$

Aus der letzten Formel und der zuerst stehenden ergibt sich dann (35).

(36) $$(\mathfrak{A}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{K}(x, y)) \to \mathfrak{C}(y, x).$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus (35).

(37) $$[\mathfrak{A}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{B}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{K}(x, y)] \to (v)\,[\mathfrak{El}(v, x) \to \mathfrak{D}(v, y)].$$

Beweis:

$$[\mathfrak{B}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{El}(v, x) \mathbin{\&} \mathfrak{El}(w, x) \mathbin{\&} \mathfrak{El}(u, v) \mathbin{\&} \mathfrak{El}(u, w)] \to v = w$$

(nach Def. von $\mathfrak{B}$).

In Verbindung mit (35) erhalten wir daraus

$$[\mathfrak{A}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{B}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{K}(x, y) \mathbin{\&} \mathfrak{El}(u, y) \mathbin{\&} \mathfrak{El}(v, x) \mathbin{\&} \mathfrak{El}(\mu, v)] \to u = \mu v.$$

Die letzte Formel läßt sich umformen zu

$$[\mathfrak{A}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{B}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{K}(x, y)] \to (v)\,\{\mathfrak{El}(v, x) \to (u)\,[\overline{\overline{\mathfrak{El}}(u, v)\,\overline{\mathfrak{El}}(u, y)\,(u = \mu v)}]\}.$$

Beim Beweis von (35) hatten wir schon die Formel

$$[\mathfrak{A}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{El}(v, x)] \to \mathfrak{El}(\mu v, v)$$

benutzt.

$$[\mathfrak{K}(x, y) \mathbin{\&} \mathfrak{El}(v, x)] \to \mathfrak{El}(\mu v, y) \quad \text{(nach Def. von } \mathfrak{K}\text{)}.$$

Aus den letzten drei Formeln ergibt sich

$$[\mathfrak{A}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{B}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{K}(x, y)] \to (v)\,\{\mathfrak{El}(v, x)$$
$$\to [\mathfrak{El}(\mu v, v) \mathbin{\&} \mathfrak{El}(\mu v, y) \mathbin{\&} (u)\,\mathfrak{El}(\overline{\overline{\mathfrak{El}}(u, v)\,\overline{\mathfrak{El}}(u, y)\,(u = \mu v)})]\}$$

Weiter erhalten wir

$$[\mathfrak{A}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{B}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{K}(x, y)] \to (v)\,\{\mathfrak{El}(v, x)$$
$$\to (E z)\,[\mathfrak{El}(z, v) \mathbin{\&} \mathfrak{El}(z, y) \mathbin{\&} (u)(\overline{\overline{\mathfrak{El}}(u, v)\,\overline{\mathfrak{El}}(u, y)\,(u = z)})]\}.$$

Das ist die Formel (37).

(38) $$(x)\,\{[\mathfrak{A}\,x \mathbin{\&} \mathfrak{B}\,x] \to (E y)\,[\mathfrak{C}(y, x) \mathbin{\&} (z)(\overline{\overline{\mathfrak{El}}(z, x)\,\mathfrak{D}(z, y)})]\}.$$

Das ist die Formel, die dem *Axiom der Auswahl* entspricht.

Der Beweis ergibt sich sofort aus (34), (36), (37), wenn wir berücksichtigen, daß sich (34) in der Form $(x)\,(E y)\,\mathfrak{K}(x, y)$ schreiben läßt.

Wir haben damit gezeigt, daß alle die Formeln, die wir für $El(x, y)$ als Axiome aufgestellt hatten, zu beweisbaren zahlentheoretischen Sätzen werden. falls wir $El(x, y)$ durch $\mathfrak{El}(x, y)$ ersetzen. Unsere Aufgabe, die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre auf die der reinen Zahlentheorie zurückzuführen, ist damit gelöst.

(Eingegangen am 15. 11. 1936.)

Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. II.

Von

E. Hecke in Hamburg[1]).

Inhaltsverzeichnis.

Der vorliegende Teil gibt die allgemeine Theorie der Modulformen und der Operatoren T_n für die Stufe Q. Die Hauptergebnisse sind

[1]) Der I. Teil der Arbeit findet sich Mathem. Annalen 114 (1937), S. 1–28.

Satz 39 über das Euler-Produkt der Matrizen aus Dirichlet-Reihen, welche den Formen der Stufe Q zugeordnet sind, Satz 42 und die Sätze über die Reduktion dieser Matrizen mit Hilfe der irreduziblen Darstellungen der Modulargruppe $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ in § 11. Schon in der ersten Aussage treten an Stelle der einen Matrix bei der Stufe 1 mehrere Matrizen auf; die Modulformen müssen in Teilscharen aufgespalten werden nach den Teilern, welche die Exponenten in ihren Potenzreihen mit der Stufe gemein haben, und nach ihrem Verhalten bei einer (Abelschen) Untergruppe von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$, weil die Definition der Operatoren T_m mit $(m, Q) > 1$ für die einzelnen Scharen verschieden ist. Dieser Umstand macht die ganze Theorie für höhere Stufe Q weniger durchsichtig, so daß mir die gesonderte Durchführung für die 1. Stufe im Teil 1 berechtigt schien, obwohl diese Theorie hier als Spezialfall $Q = 1$ enthalten ist.

Bezeichnungen: In diesem Teile bedeuten k, Q feste natürliche Zahlen, und bei Aussagen über „alle" Formen werden stets nur Formen desselben k, Q in Betracht gezogen. Das Zeichen n soll durchweg eine natürliche Zahl bedeuten, welche zur Stufe Q teilerfremd ist, auch wenn es nicht besonders erwähnt wird.

§ 5.

Die Operatoren T_n für die Stufe Q mit $(n, Q) = 1$.

Zur Übertragung der in § 2 bis 4 entwickelten Begriffe auf Modulformen der Stufe Q soll zunächst der Grad n der zu T_n führenden Transformation zur Stufe Q prim vorausgesetzt werden. Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Ist L eine binäre Transformation von ω_1, ω_2 mit rationalen Koeffizienten

(1) $L(\omega_1, \omega_2) = (a\,\omega_1 + b\,\omega_2,\ c\,\omega_1 + d\,\omega_2); \quad L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a\,d - b\,c > 0,$

so werde mit L gleichzeitig der Operator bezeichnet, der jede Form F in

$$F \,|\, L = F\,(L\,(\omega_1, \omega_2))$$

überführt. Die Zusammensetzung zweier solcher Operatoren L_1, L_2 werde isomorph zu der der Substitutionen L_1, L_2 definiert:

$$F \,|\, L_1 L_2 = (F \,|\, L_1) \,|\, L_2 = F\,(L_1 L_2 (\omega_1, \omega_2)).$$

Ferner werde der Operator αL für eine komplexe Zahl α erklärt durch

$$F \,|\, \alpha L = F \,|\, L \alpha = \alpha F\,(L\,(\omega_1, \omega_2)) = \alpha F \,|\, L.$$

Die Addition $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$ soll nicht die Addition der Matrizen bedeuten, sondern der Operator $V = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$ wird definiert durch

$$F \,|\, V = F \,|\, \alpha_1 L_1 + F \,|\, \alpha_2 L_2 = \alpha_1 F \,|\, L_1 + \alpha_2 F \,|\, L_2.$$

Die Operatoren L erzeugen nach diesen Festsetzungen einen **Ring** mit den komplexen Zahlen als Multiplikatoren. Eine Form F heiße **Eigenfunktion eines Operators A aus diesem Ring**, wenn $F \mid A = c \cdot F$ mit einer Konstanten c, dem Multiplikator. Hat die Matrix L aus (1) die Determinante 1 und mod. Q ganze Koeffizienten, so ist für jede Modulform der Stufe Q das Zeichen

$$F([L](\omega_1, \omega_2))$$

eindeutig erklärt, wenn $[L]$ irgend eine Substitution aus $\bar{\Gamma}(1)$ bedeuten soll mit

$$[L] \equiv L \,(\text{mod.}\, Q), \quad [L] \text{ in } \bar{\Gamma}(1).$$

Wir setzen

$$F \mid [L] = F([L](\omega_1, \omega_2)).$$

Endlich führen wir noch spezielle Operatoren ein durch die **Definition**:

$$(2) \qquad S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad R_n = \begin{bmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Erklärung des Operators T_n für die Stufe Q gehen wir auf die vollen Repräsentantensysteme von Transformationen der Determinante n aus § 2, Satz 8 zurück:

Satz 31. *Die Transformationen*

$$(3) \qquad R_a \cdot \begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

wo a, b, d alle ganzen Zahlen mit $ad = n$, $d > 0$, b mod. d, durchlaufen, bilden ein volles System nach $\bar{\Gamma}(1)$ nicht-äquivalenter ganzzahliger Transformationen mit der Determinante n. Sie sind alle $\equiv S_n$ (mod. Q). Ihre Anzahl ist wieder gleich der Summe der positiven Teiler von n, $= \sigma_1(n)$.

Beweis folgt unmittelbar aus Satz 8 in § 2.

Für eine Form F der Art $(-k, Q)$ ist die Menge der $\sigma_1(n)$ Funktionen

$$F \mid R_a \begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

bis auf die Reihenfolge allein durch n und F bestimmt, unabhängig von der speziellen Wahl der Transformationen. Daher definieren wir jetzt für die homogenen Formen der Art $(-k, Q)$ den Operator T_n durch die **Definition**:

$$(4) \qquad T_n = n^{k-1} \sum_{\substack{ad = n \\ b \bmod. d \\ d > 0}} R_a \cdot \begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

T_n hängt von k nur durch den Faktor n^k ab, dagegen hängt er wesentlich von Q durch die Zeichen R_a ab. Für die inhomogene Gestalt $F(\tau) = \omega_2^k F(\omega_1, \omega_2)$ verstehen wir unter $F(\tau) \mid T_n$ das Produkt von $F(\omega_1, \omega_2) \mid T_n$ mit ω_2^k.

Satz 32. *Für jede Form F der Art $(-k, Q)$ gehört $F \mid T_n$ wieder zur Stufe Q. Liegt L in $\overline{\Gamma}(1)$, so ist ferner $F \mid T_n L = F \mid [S_n L S_n^{-1}]\, T_n$.*

Beweis: Wir bezeichnen die Transformationen (3) aus Satz 31 in irgend einer Reihenfolge mit N_h $(h = 1, 2, \ldots, \sigma_1(n))$, alsdann sind $N_h L$ wieder alle Klassen nach $\overline{\Gamma}(1)$, also gibt es zu jedem h ein h' und dazu ein L_h aus $\overline{\Gamma}(1)$, so daß

$$N_h L = L_h \cdot N_{h'} \qquad (L_h \text{ aus } \overline{\Gamma}(1)).$$

Hieraus folgt

$$L_h = N_h \cdot L \cdot N_{h'}^{-1} \equiv S_n L S_n^{-1} \pmod{Q},$$

und

$$L_h = [S_n L S_n^{-1}]$$

ist also mod. Q von h unabhängig. Mithin ist

$$F \mid \sum_h N_h L = \sum_h F \mid L_h \cdot N_{h'} = \sum_h F \mid [S_n L S_n^{-1}]\, N_h = F \mid [S_n L S_n^{-1}]\, T_n.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Bei der naturgemäßen Beschränkung auf Formen der Stufe Q ist also für die Operatoren die Relation bewiesen:

(5) $$T_n \cdot L = [S_n L S_n^{-1}] \cdot T_n \quad \text{für } L \text{ aus } \overline{\Gamma}(1).$$

Insbesondere formulieren wir

Satz 33. *Zwischen T_n, R_a, U bestehen die Beziehungen*

$$T_n \cdot R_a = R_a \cdot T_n, \quad T_n \cdot U^n = U \cdot T_n, \quad R_n U^{n^2} R_n^{-1} = [U] \quad (\text{für } (a, Q) = 1).$$

Wir zeigen jetzt wieder die Vertauschbarkeit aller T_n untereinander und die Reduktion auf T_p von Primzahlordnung p.

Hilfssatz 1. Wenn $(n, m) = 1$ und $(n, Q) = (m, Q) = 1$, so ist

$$T_n \cdot T_m = T_{n \cdot m} = T_m \cdot T_n.$$

Beweis: Wird

$$T_n = n^{k-1} \sum_{a, b, d} R_a \begin{pmatrix} a, & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad T_m = m^{k-1} \sum_{A, B, D} R_A \cdot \begin{pmatrix} A & BQ \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

gesetzt, so ist mit Benutzung von Satz 33

$$T_n \cdot T_m = m^{k-1}\, T_n \cdot \sum_{A, B, D} R_A \cdot \begin{pmatrix} A & BQ \\ 0 & D \end{pmatrix} = m^{k-1} \sum_{A, B, D} R_A \cdot T_n \cdot \begin{pmatrix} A & BQ \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Hier ist weiter

$$T_n \cdot \begin{pmatrix} A & BQ \\ 0 & D \end{pmatrix} = n^{k-1} \sum_{a, b, d} R_a \cdot \begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & BQ \\ 0 & D \end{pmatrix} = n^{k-1} \sum_{a, b, d} R_a \begin{pmatrix} aA & (aB + bD)Q \\ 0 & dD \end{pmatrix}$$

$$T_n \cdot T_m = (nm)^{k-1} \sum_{\substack{A, B, D \\ a, b, d}} R_A\, R_a \begin{pmatrix} aA & (aB + bD)\,Q \\ 0 & dD \end{pmatrix} = T_{n \cdot m},$$

denn $aB + bD$ durchläuft wegen $(a, D) = (d, D) = 1$ ein volles Restsystem mod. $d \cdot D$ bei festem d, D.

Hilfssatz 2: Für eine Potenz p^r der Primzahl p (die nicht in Q aufgeht) ist

$$T(p^r)\cdot T(p) = T(p^{r+1}) + p^{k-1}\cdot R_p\cdot T(p^{r-1}) \qquad (r \geqq 1).$$

Hierbei steht vorübergehend der Deutlichkeit wegen $T(n)$ für T_n.

Beweis:

$$(6) \qquad T(p^r)\cdot T(p) = T(p^r)\cdot p^{k-1} R_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + T(p^r)\cdot p^{k-1} \sum_{l \bmod p} \begin{pmatrix} 1 & lQ \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

Hier ist

$$T(p^r) - p^{k-1}\cdot \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = p^{(r+1)(k-1)} \sum_{\substack{h_s \bmod p^s \\ 0 \leqq s \leqq r}} R_{p^{r-s+1}} \begin{pmatrix} p^{r-s} & h_s Q \\ 0 & p^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= p^{(r+1)(k-1)} \sum_{\substack{0 \leqq s \leqq r \\ h_s \bmod p^s}} R_{p^{r+1-s}} \begin{pmatrix} p^{r+1-s} & h_s Q \\ 0 & p^s \end{pmatrix}$$

$$(7) \qquad = T(p^{r+1}) - p^{(r+1)(k-1)} \sum_{h \bmod p^{r+1}} \begin{pmatrix} 1 & hQ. \\ 0 & p^{r+1} \end{pmatrix}.$$

Ferner ist die zweite Summe rechts in (6)

$$T(p^r)\, p^{k-1} \sum_{l \bmod p} \begin{pmatrix} 1 & lQ \\ 0 & p \end{pmatrix} = p^{(r+1)(k-1)} \sum_{\substack{0 \leqq s \leqq r \\ h_s \bmod p^s,\ l \bmod p}} R_{p^{r-s}} \begin{pmatrix} p^{r-s} & h_s Q \\ 0 & p^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & lQ \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

$$= p^{(r+1)(k-1)} \sum_{s,\, h_s,\, l} R_{p^{r-s}} \begin{pmatrix} p^{r-s} & (p^{r-s} l + h_s p)\, Q \\ 0 & p^{s+1} \end{pmatrix}.$$

Für $r - s \geqq 1$ enthalten alle vier Koeffizienten der letzten Matrix den Faktor p, der unter Berücksichtigung der Homogenität der Modulformen als p^{-k} vor die ganze Summe gezogen werden kann. Die Summe über h_s, bei festem s, l wird dann offenbar von l unabhängig, also auch gleich p multipliziert mit der Summe über s, h_s bei $l = 0$; das ist gerade

$$p^{k-1}\cdot R_p\cdot T(p^{r-1}).$$

Schließlich sind die Glieder mit $s = r$ gerade die in (7) mit dem Minuszeichen auftretenden Glieder. Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Hierbei ist R_p ein mit allen $T(p^r)$ vertauschbares Symbol. Nach der Bemerkung beim Beweise von Satz 10 in I, § 2 folgt hieraus aber

$$T(p^r)\cdot T(p^s) = \sum_{0 \leqq u \leqq r, s} T(p^{r+s-2u})\cdot p^{u(k-1)}\cdot R_{p^u}$$

und daraus allgemeiner

Satz 34. *Bei* $(n, Q) = (m, Q) = 1$ *ist*

$$T(n)\cdot T(m) = \sum_{d \mid n, m} T\left(\frac{n\,m}{d^2}\right)\cdot d^{k-1}\cdot R_d.$$

Hierbei durchläuft d *alle positiven gemeinsamen Teiler von* n, m. *Insbesondere sind alle* $T(n)$ *untereinander vertauschbare Operatoren.*

Für den Bereich der Modulformen der Art $(-k, Q)$ erzeugen also die T_n zusammen mit den endlich vielen R_d einen kommutativen Ring von Operatoren, der überdies diesen Funktionsbereich auf sich abbildet.

§ 6.

Normierung der Formen der Stufe Q. Formen vom Teiler t und Charakter $\varepsilon(n)$.

Unser Ziel ist, die Formenschar von der Art $(-k, Q)$ in möglichst viele zueinander fremde Teilscharen zu zerlegen, die bei allen Operatoren T_n in sich übergehen, und dann Aussagen über die Koeffizienten der Potenzreihen daraus herzuleiten in Analogie mit den Aussagen im ersten Teil. Während aber dort zunächst die volle Schar den Operatoren T_n unterworfen und erst nachher die Zerfällung diskutiert wurde, ist jetzt, um eine Matrix mit Euler-Produkt zu erhalten, schon vorher eine Zerlegung in gewisse Teilscharen nötig. Der Grund dafür ist die Existenz der Primfaktoren q der Stufenzahl Q: Die Operatoren T_q müssen für die verschiedenen Teilscharen verschieden definiert werden.

Die Spaltung der Gesamtschar in die passenden Teilscharen wird nach dem Verhalten der Formen bei den Substitutionen von $\overline{\Gamma}(1)$ vorgenommen. Der erste Schritt der Zerlegung wird hier in § 6, 7 für beliebige Stufe Q durchgeführt. Dabei hat man nur das Verhalten bei $\overline{\Gamma}_0(Q)$ in Betracht zu ziehen. Genau wie im ersten Teil erhalten wir dann in § 8 und 9 die Matrizen mit dem Euler-Produkt und nehmen in § 10 die — hier nicht so einfache — vollständige Reduktion des Systems der Eisenstein-Reihen vor.

Zur weiteren Zerlegung der Formenschar muß man das Verhalten bei der ganzen Gruppe $\overline{\Gamma}(1)$ berücksichtigen, und dazu ist dann in § 11 ein näheres Eingehen auf die endliche Gruppe $\Gamma(1)/\Gamma(Q)$, vor allem auf ihre einfachen Charaktere erforderlich. Ich führe diese weitere Reduktion in allen Einzelheiten dann in § 12 für Primzahlstufe durch.

Zur Erklärung des ersten Schrittes bedenken wir zunächst, daß die Operatoren L aus $\overline{\Gamma}_0(Q)$ $\left(\text{d. h. } L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ L \text{ aus } \overline{\Gamma}(1),\ c \equiv 0 \pmod{Q}\right)$ für die Formen der Stufe Q nur mod. Q in Frage kommen, und diese mod. Q reduzierten Substitutionen eine Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ innerhalb der endlichen Modulargruppe $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ bilden. Sie wird durch U und die R_n erzeugt. Die Gruppe der Operatoren aus $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ als Ganzes ist mit allen T_n vertauschbar. Denn es ist

$$(5)\qquad T_n \cdot [L] = [S_n L S_n^{-1}] \cdot T_n,$$

und wenn L zu $\overline{\Gamma}_0(Q)$, so gehört $[S_n L S_n^{-1}]$ wieder zu $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$. Durch die Substitutionen aus $\overline{\Gamma}_0(Q)$ wird in der Schar aller Formen von der Art $(-k, Q)$ eine Gruppe linearer homogener Substitutionen induziert, die eine Darstellung von $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ ist. Eine naheliegende Zerlegung ist die Zerfällung dieser Darstellung in ihre irreduziblen Bestandteile und die damit gegebene Spaltung der Formenschar in Teilscharen, die sich bei $\overline{\Gamma}_0(Q)$ nach einer irreduziblen Darstellung der $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ umsetzen. Wir brauchen für unsere Zwecke aber eine etwas weniger feine Einteilung, die wir unmittelbar vornehmen.

An den Potenzreihen ist zunächst zu sehen, daß wir die Erzeugenden der vollen Formenschar so wählen können, daß in ihrer Potenzreihe nur die Exponenten je einer festen Restklasse mod. Q auftreten; das bedeutet, daß die Formen Eigenfunktionen für den Operator U sind. Alle vorkommenden Exponenten in einer solchen Reihe haben mit Q denselben gr. gem. Teiler. Wegen

$$R_n U^{n^2} R_n^{-1} = [U],$$

ist dann auch $F|R_n$ eine Reihe von dieser speziellen Gestalt, mit einer im allgemeinen anderen Restklasse für die Exponenten, aber mit demselben erwähnten Teiler. Wir nennen weiter eine Modulform der Stufe Q **zur Klasse t gehörig** oder **vom Teiler t**, wenn in ihrer Potenzreihe alle vorkommenden Exponenten mit Q denselben größten gemeinsamen Teiler t haben. Das ist gleichbedeutend mit: Sie ist eine Summe von Eigenfunktionen von U, deren Multiplikatoren primitive $\frac{Q}{t}$-te Einheitswurzeln sind Auch wenn F identisch Null, heiße F vom Teiler t.

Eine Modulform der Stufe Q heiße **normiert**, wenn sie Eigenfunktion für alle Operatoren R_n ist. Der Multiplikator $\varepsilon(n)$ bei R_n ist dann notwendig ein Restklassencharakter von n mod. Q, $\varepsilon(n)$ heiße der **Charakter der Form**. Wegen $F \mid R_{-1} = (-1)^k \cdot F$, können nur Charaktere mit $\varepsilon(-1) = (-1)^k$ auftreten.

Satz 35. *Eine normierte Form geht durch alle T_n, R_n in eine normierte Form vom selben Charakter über. Ebenso geht eine Form der Klasse t durch T_n, R_n wieder in eine Form der Klasse t über.*

Beides folgt sofort aus Satz 33.

Da die R_n eine endliche Abelsche Gruppe bilden, lassen sich die unabhängigen Formen der Klasse t überdies als normiert wählen.

Normierte Formen derselben Klasse, aber von verschiedenem Charakter hängen auf folgende Art zusammen:

Satz 36. *Sei*

$$\omega_2^k F(\omega_1, \omega_2) = F(\tau) = \sum_N a(N) z_Q^{Nt} \qquad \left(\left(N, \frac{Q}{t}\right) = 1\right)$$

die Potenzreihe einer normierten Form vom Teiler t, mit dem Charakter $\varepsilon(n)$. Es bedeute ferner $\chi(n)$ einen Restklassen-Charakter mod. $\frac{Q}{t}$. *Dann ist*

$$\omega_2^k G(\omega_1, \omega_2) = G(\tau) = \sum_N a(N)\,\chi(N)\, z_Q^{Nt}$$

wieder eine normierte Form vom selben Teiler t mit dem Charakter $\varepsilon(n)\cdot\chi(n^2)$.

Dabei ist wieder gesetzt $z_Q = e^{\frac{2\pi i \tau}{Q}}$.

Beweis: Zunächst ist G wieder von der Art $(-k, Q)$. Denn mit F gehört auch $F|U^l$ für $l = 1, 2, \ldots$ zur Stufe Q, daher auch die Teilreihen der Reihe F, deren Exponenten Nt nur eine feste Restklasse mod. Q durchlaufen, mithin auch die Linearkombination G. G ist offenbar vom Teiler t. Aus

$$G(\tau) = F \left| \frac{1}{Q} \sum_{l,\, a \bmod. Q} \zeta^{-lta}\,\chi(a)\, U^l \right. \qquad \left(\zeta = e^{\frac{2\pi i}{Q}}\right)$$

folgt dann

$$G \left| R_n = \frac{1}{Q} F \right| R_n \cdot \sum_{l,\, a} \zeta^{-lta}\,\chi(a)\, U^{ln^2} = \varepsilon(n)\,\chi(n^2)\cdot G.$$

Da man von G durch einen analogen Prozeß wieder zu F gelangt, so erhält man durch diese Methode aus der linearen Schar der Formen mit demselben t, $\varepsilon(n)$ auch die volle lineare Schar der Formen vom Teiler t und dem Charakter $\varepsilon(n)\,\chi(n^2)$.

§ 7.

Die Operatoren T_m^t mit $(m, Q) > 1$.

Wir ziehen jetzt gewisse Operatoren W_r heran, erklärt als lineare homogene Substitutionen der ω_1, ω_2 mit der Matrix

$$W_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \qquad (r > 0).$$

Für sie gilt die Grundformel

$$W_r \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} W_r^{-1} = \begin{pmatrix} a & b r^{-1} \\ c r & d \end{pmatrix}, \tag{8}$$

speziell

$$W_r^{-1}\, U\, W_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Ist jetzt F eine Modulform der Stufe Q aus der Klasse t, so ist

$$F|U^{t_1} = F \qquad \left(t_1 = \frac{Q}{t}\right), \tag{10}$$

und daraus folgt leicht der

Hilfssatz 1. Wenn F zur Klasse t, so gehört $F|W_q$ noch zur Stufe Q, falls q/t.

Denn in der Tat ist nach (8) $W_q L W_q^{-1}$ ganzzahlig, wenn L zu $\Gamma(Q)$, und ist mod. Q kongruent einer Potenz von U^{t_1}.

Hilfssatz 2. Für die Formen der Klasse t sind R_n und W_q vertauschbar, falls q/t.

Denn $W_q R_n W_q^{-1} R_n^{-1}$ ist ganzzahlig und kongruent mod. Q einer Potenz von U^{t_1}.

Hilfssatz 3. Für die Formen der Klasse t sind W_q und T_n vertauschbar, falls q/t.

Zum Beweise darf man sich nach § 5 auf den Fall beschränken, daß $n =$ einer Primzahl p ist, die nicht in Q aufgeht. Nun ist aber

$$T_p \cdot W_q = p^{k-1} \cdot R_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot W_q + p^{k-1} \sum_{l \bmod p} W_p \cdot U^{lQ} \cdot W_q .$$

Hier sind die Bestandteile des ersten Summanden rechts vertauschbar, und die Summe ist nach (9) und Hilfssatz 2

$$= W_p \cdot \sum_{l} W_q U^{lQq} = W_q \sum_{l \bmod p} W_p U^{lQq},$$

also

$$W_q T_p = T_p W_q .$$

Hilfssatz 4. Für eine Form F der Klasse t ist $F | W_q U^{lt_1}$ nur von dem Werte l mod. q abhängig, wenn q/t und t_1 der komplementäre Teiler $\frac{Q}{t}$.

Beweis folgt aus der Grundformel (8).

Für Formen F der Klasse t werde jetzt der Operator T_q^t, wo q ein Primfaktor von t ist, durch folgende nach Hilfssatz 4 eindeutige **Definition** erklärt:

$$T_q^t = q^{k-1} \sum_{l \bmod q} W_q U^{lt_1} \qquad \left(t_1 = \frac{Q}{t}\right). \tag{11}$$

Nach Hilfssatz 1 gehört dann $F | T_q^t$ wieder zur Stufe Q. Für die inhomogene Gestalt $F(\tau)$ soll wieder $F(\tau) | T_q^t$ die Bedeutung des Produktes $F(\omega_1, \omega_2) | T_q^t$ mit ω_2^k haben.

Hilfssatz 5. Für Formen der Klasse t ist T_q^t mit R_n vertauschbar.

Denn nach Hilfssatz 1 und 2 ist der einzelne Summand in $T_q^t R_n$

$$W_q U^{lt_1} R_n = W_q R_n U^{lt_1 n^2} = R_n W_q U^{lt_1 n^2}$$

und nach Hilfssatz 4 also $T_q^t R_n = R_n T_q^t$.

Satz 37. *Jede normierte Form F vom Teiler t geht durch den Operator T_q^t in eine normierte Form vom selben Teiler und vom selben Charakter über. Geht die Primzahl q überdies auch in $\frac{Q}{t}$ auf, so ist $F | T_q^t = 0$.*

Beweis: Nach Hilfssatz 5 ist $F|T_q^t$ wieder normiert und vom selben Charakter wie F. Weiter folgt aus der Potenzreihe für F

$$F(\tau) = \sum_{\left(N,\frac{Q}{t}\right)=1} a(N)\, z_Q^{Nt}$$

$$(12)\qquad F(\tau)|T_q^t = \frac{1}{q} \sum_{l \text{ und } q} F\left(\frac{\tau + l t_1}{q}\right) = \sum_{\left(Nq,\frac{Q}{t}\right)=1} a(Nq)\, z_Q^{Nt}.$$

Die Summationsbedingung $\left(Nq, \frac{Q}{t}\right) = 1$ zeigt, daß $F|T_q^t$ identisch Null ist, wenn q in $\frac{Q}{t}$ aufgeht, und daß im anderen Falle $F|T_q^t$ wieder den Teiler t hat.

Dieser Satz gestattet, Operatoren T_q^t mit gleichem t hintereinander auszuführen. Für zwei Primfaktoren p und q von t (gleich oder nicht) ergibt sich zunächst die Vertauschbarkeit von T_p^t und T_q^t unmittelbar aus der Potenzreihe (12) durch

$$F|T_p \cdot T_q = \sum_N a(Npq)\, z_Q^{Nt} = \frac{1}{pq} \sum_{l \bmod. mq} F\left(\frac{\tau + l t_1}{pq}\right).$$

Und dann geben wir als **Definition:**

Geht jeder Primfaktor der natürlichen Zahl m in t auf, so definieren wir durch Rekursion für jeden Primfaktor q von t

$$T_m^t \cdot T_q^t = T_{mq}^t = (mq)^{k-1} \sum_{l \bmod. mq} W_{mq}\, U^{l t_1}.$$

Hilfssatz 6. Alle diese Operatoren T_m^t mit gleichem t sind untereinander und mit allen T_n vertauschbar.

Denn nach Hilfssatz 3 ist zunächst für die Primteiler q von t: $T_n W_q = W_q T_n$ und nach Satz 33 (§ 5) also

$$T_n \cdot W_q \cdot U^{n l t_1} = W_q \cdot T_n \cdot U^{n l t_1} = W_q \cdot U^{l t_1} \cdot T_n.$$

Durch Summation nach l folgt wegen $(n, Q) = 1$

$$T_n \cdot T_q^t = T_q^t \cdot T_n$$

und daraus die Behauptung.

Endlich werde T_m^t für eine beliebige zu $\frac{Q}{t}$ teilerfremde natürliche Zahl m **definiert:** Es sei n der größte zu Q prime Faktor von m und

$$m = n \cdot r, \quad \left(m, \frac{Q}{t}\right) = (n, Q) = 1.$$

r enthält also keine anderen Primfaktoren als t. Dann setze man

$$(13)\qquad T_m^t = T_n \cdot T_r^t = T_r^t \cdot T_n; \quad (\text{also } T_m^1 = T_m = T_n;\quad T_n^t = T_n).$$

Ein Analogieschluß nach Teil I läßt vermuten, daß zur Untersuchung der Formen vom Teiler t nur die Operatoren T_m^t gebraucht werden, wo m

zu $\frac{Q}{t}$ prim ist. Das ist in der Tat richtig. Man könnte den Operator T^t_q durch (11) auch für Primteiler q von Q definieren, die nicht in t aufgehen. Dann würde $F|T^t_q = 0$ sein. Indessen brauchen wir eben nur solche Primfaktoren von Q, welche nicht in $\frac{Q}{t}$, also in t aufgehen.

Als Schlußresultat formulieren wir zusammenfassend:

Satz 38. *Es sei t ein Teiler von Q, $t \cdot t_1 = Q$, $(m, t_1) = 1$ und wie eben $m = n r$, dann gilt:*

1. *Die Operatoren T^t_m mit gleichem t sind untereinander und mit allen R_n vertauschbar. Sie sind erklärt für alle Formen vom Teiler t.*

2. *Die Schar der normierten Formen mit dem Charakter $\varepsilon(n)$ und dem Teiler t geht durch alle T^t_m in sich über.*

3. *Die Operatoren $T^t_m = T^t(m)$ für die Formen unter 2. erfüllen die Regel:*

$$T^t(m_1) \cdot T^t(m_2) = \sum_{d \mid m_1, m_2} T^t\left(\frac{m_1 m_2}{d^2}\right) \varepsilon(d)\, d^{k-1}. \tag{14}$$

Hierbei ist der Wert des Charakters $\varepsilon(d)$ wie üblich gleich 0 gesetzt, wenn d mit dem Modul Q nicht teilerfremd ist.

4. *Die Bedeutung von T^t_m für eine Form unter 2. ist*

$$F(\omega_1, \omega_2) | T^t_m = m^{k-1} \sum_{\substack{a d = n \\ b \bmod. d \\ l \bmod. r}} \varepsilon(a) F\left(\begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l t_1 \\ 0 & r \end{pmatrix} \omega_1, \omega_2\right)$$

und nach Multiplikation mit ω_2^k für die inhomogenen Funktionen

$$F(\tau) | T^t_m = \frac{n^{k-1}}{r} \sum_{a, b, d, l} \varepsilon(a) F\left(\frac{a\tau + a l t_1 + b Q r}{r d}\right) d^{-k},$$

wofür wir endlich kürzer unter Beachtung der Festsetzung bei 3. schreiben

$$F(\tau) | T^t_m = m^{k-1} \sum_{\substack{a d = m \\ b \bmod. d \\ d > 0}} \varepsilon(a) F\left(\frac{a\tau + b t_1}{d}\right) d^{-k}. \tag{15}$$

Denn $a l + b t r$ durchläuft bei festem r, d ein volles Restsystem mod. $r d$.

§ 8.

Der Matrizenring der $\lambda(m)$ und das Euler-Produkt für die Formen von festem Teiler und Charakter.

Nunmehr läßt sich die im 1. Teil für die Stufe 1 entwickelte Theorie auch für die Stufe Q ohne Schwierigkeit übertragen. Beim Beweise des Hauptsatzes werden die Formen vom festen Teiler t getrennt von den übrigen behandelt, und der folgende Beweis verläuft daher für den Fall

$t = 1$ auch nur unter Benutzung der T_n aus § 5, ohne die §§ 6 und 7 heranzuziehen. Die Kenntnis dieses Umstandes ist zur ersten Orientierung nützlich.

Das volle System linear unabhängiger Modulformen der Art $(-k, Q)$ denken wir uns in der Normalgestalt nach § 6 gegeben: jedes Individuum normiert und zu einem bestimmten Teiler gehörig. Es sei für eine Klasse t und einen Charakter $\varepsilon(n)$: $F^{\varrho}(\tau)\,(\varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ das volle Formensystem und es seien

$$F^{\varrho}(\tau) = \sum_{\left(N,\,\frac{Q}{t}\right)=1} a^{\varrho}(N)\, z_Q^{Nt}$$

die Potenzreihen. Der Summationsbuchstabe N durchläuft in diesem Paragraphen immer nur die zu $\frac{Q}{t}$ teilerfremden Zahlen $\geqq 0$. Nach (15) ist dann bei $\left(m, \frac{Q}{t}\right) = 1$

$$\begin{aligned} F^{\varrho}(\tau) \mid T_m^t &= m^{k-1} \sum_{N;\, d \mid m} a^{\varrho}(N d)\, \varepsilon(a)\, d^{1-k} z_Q^{N a t} \\ &= \sum_{d \mid m,\, N} a^{\varrho}\left(\frac{N m}{d^2}\right) \varepsilon(d)\, z_Q^{Nt} \cdot d^{k-1} = \sum_{N} b_m^{\varrho}(N)\, z_Q^{Nt} \end{aligned}$$

(16) $$b_m^{\varrho}(N) = \sum_{d \mid m,\, N} a^{\varrho}\left(\frac{N m}{d^2}\right) \varepsilon(d)\, d^{k-1}; \quad \left(m, \frac{Q}{t}\right) = \left(N, \frac{Q}{t}\right) = 1, \quad m \geqq 1.$$

Andererseits wird die Schar der $F^{\varrho}(\tau)$ durch die Operatoren T_m^t nach Satz 36 und 38 in sich übergeführt; es gibt also eine von τ unabhängige Matrix $\lambda(m)$ des Grades $\varkappa$ mit den Elementen $\lambda_{\varrho\sigma}(m)$ $(\varrho, \sigma = 1, \ldots, \varkappa)$, so daß

$$F^{\varrho} \mid T_m^t = \sum_{\sigma} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, F^{\sigma},$$

also nach (16)

$$\sum_{d \mid m,\, N} a^{\varrho}\left(\frac{N m}{d^2}\right) \varepsilon(d)\, d^{k-1} = \sum_{\sigma} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, a^{\sigma}(N).$$

Hier ist wie im 1. Teil, § 3,

(17) $$\sum_{\sigma} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, a^{\sigma}(N) = \sum_{\sigma} \lambda_{\varrho\sigma}(N)\, a^{\sigma}(m)$$

und mit $N = 1$

$$a^{\varrho}(m) = \sum_{\sigma} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, a^{\sigma}(1) \qquad m \geqq 1.$$

Aus (17) folgt wie früher die Existenz von $\varkappa$ konstanten Matrizen

$$\mathsf{B}^{\nu} = (b_{\varrho\sigma}^{\nu})$$

mit

$$\lambda(m) = \sum_{\nu} a^{\nu}(m)\,\mathsf{B}^{\nu} \qquad m \geqq 1. \tag{18}$$

Diese Gleichung soll auch für $m = 0$ gelten und dient zur Definition der Matrix $\lambda(0)$, falls $m = 0$ mit der Bedingung $\left(m, \frac{Q}{t}\right) = 1$ verträglich ist, d. h. nur für $t = Q$. Sonst sei

$$\lambda(0) = 0 \text{ für } t < Q \text{ und } \lambda(m) = 0, \text{ wenn } \left(m, \frac{Q}{t}\right) > 1.$$

Die $\varkappa^2$ Funktionen

$$f_{\varrho\sigma}(\tau) = \lambda_{\varrho\sigma}(0) + \sum_{m \geqq 1} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, z_Q^{mt}$$

sind dann linear äquivalent mit den $\varkappa$ Funktionen $F^{\varrho}(\tau)$. Die Kompositionsregel der T'_m nach (14) geht in die entsprechende für die Matrizen $\lambda(m)$ über:

$$\lambda(m_1)\cdot\lambda(m_2) = \sum_{d \mid m_1, m_2} \lambda\left(\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}\right)\cdot \varepsilon(d)\cdot d^{k-1}. \tag{19}$$

Die Matrix aus Dirichlet-Reihen (absolut konvergent für $\Re(s) > k$)

$$\Phi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(m)\,(t\,m)^{-s}$$

hat dann eine Eulersche Produktentwicklung. Hier sind aber die Primfaktoren von Q für sich zu behandeln:

Geht die Primzahl p nicht in Q auf, so ist nach I, § 3, Satz 14

$$\Psi_p(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda(p^r)\,p^{-rs} = (\mathsf{E} - \lambda(p)\cdot p^{-s} + \varepsilon(p)\,p^{k-1-2s}\cdot\mathsf{E})^{-1}.$$

Ist dagegen q ein Primteiler von t, der nicht in $\frac{Q}{t}$ aufgeht, so ist

$$\lambda(q^{r+1}) = \lambda(q^r)\cdot\lambda(q) = \lambda(q)^{r+1} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

und daher

$$\Psi_q(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda(q^r)\,q^{-rs} = (\mathsf{E} - \lambda(q)\,q^{-s})^{-1}.$$

Und damit schließlich

$$\Phi(s) = t^{-s}\prod_{q \mid t}(\mathsf{E} - \lambda(q)\,q^{-s})^{-1}\cdot \prod_{(p,\,Q)=1}(\mathsf{E} - \lambda(p)\cdot p^{-s} + \varepsilon(p)\,p^{k-1-2s}\,\mathsf{E})^{-1} \tag{20}$$

p, q durchlaufen die Primzahlen mit den angegebenen Bedingungen[1]). Für (20) können wir offenbar auch das Produkt über alle Primzahlen p schreiben:

$$\Phi(s) = t^{-s}\prod_{p}(\mathsf{E} - \lambda(p)\,p^{-s} + \varepsilon(p)\,p^{k-1-2s}\,\mathsf{E})^{-1}. \tag{20a}$$

---

[1]) $\lambda(q)$ ist 0, wenn q in $\frac{Q}{t}$ aufgeht, und $\varepsilon(p) = 0$, wenn p in Q aufgeht.

Damit ist der zu I, Satz 15 analoge Hauptsatz bewiesen:

Satz 39. *Das volle System von Modulformen der Art* $(-k, Q)$ *vom Teiler* t, *die bei* R_n *denselben Faktor* $\varepsilon(n)$ *annehmen, sei* $F^\varrho(\tau)$ $(\varrho = 1, \ldots, \varkappa)$ *Es gibt dazu* $\varkappa$ *konstante Matrizen* B^ν *des Grades* $\varkappa$, *welche die Basis eines kommutativen Ringes vom Range* $\varkappa$ *bilden, derart, daß die Dirichlet-Reihen*

$$\varphi^\varrho(s) = \sum_{m \geqq 1} a^\varrho(m)(m\,t)^{-s}$$

zu

$$F^\varrho(\tau) = \sum_{m \geqq 0} a^\varrho(m)\, z_Q^{m\,t}$$

die Matrix

$$\Phi(s) = \sum_\nu \varphi^\nu(s)\,\mathsf{B}^\nu = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(m)(m\,t)^{-s}$$

mit der Eulerschen Produktentwicklung (20) *zusammensetzen.*

Ebenso wie für die Stufe 1 im ersten Teil (Satz 17 und 19 in § 3) ergibt sich hier, daß die B^ν die Symmetrie-Eigenschaft $b^\nu_{\varrho\mu} = b^\mu_{\varrho\nu}$ haben und daß der Ring der Matrizen B^ν maximal ist.

Der Satz 39 gilt sinngemäß auch für jede Teilschar der Formen von festem Teiler t und Charakter, welche durch alle Operatoren T^t_m in sich übergeht.

§ 9.

Die charakteristischen Wurzeln der Matrizen $\mathsf{B}(\tau)$. Unmöglichkeit anderer Euler-Produkte für Dirichlet-Reihen der Schar.

Wir verstehen wieder unter einer **Eigenfunktion des Operatorenringes** der T^t_m eine normierte Form der Art $(-k, Q)$ vom Teiler t, welche durch alle T^t_m bis auf einen konstanten Faktor in sich übergeht. Dabei ist nun folgendes zu beachten: Ist Q_1 ein Teiler von Q, aber $< Q$, so ist jede Form der Art $(-k, Q_1)$ auch von der Art $(-k, Q)$, aber als Form der Stufe Q betrachtet, hat sie eine andere Dirichlet-Reihe und einen anderen Teiler, und wenn sie Eigenfunktion auf der Stufe Q_1 ist, ist sie im allgemeinen nicht mehr Eigenfunktion auf der Stufe Q. Das sieht man etwa für $Q_1 = 1$: Eine Form erster Stufe hat auf der Stufe Q den Teiler Q, weil ihre Potenzreihe jetzt in z_Q und nicht mehr in z_1 anzusetzen ist. Bleibt sie durch den Operator T_Q der ersten Stufe bis auf einen Faktor invariant, so folgt daraus nicht die Invarianz bei dem ganz anders definierten Operator T^Q_Q, der dann auf der Stufe Q heranzuziehen ist.

Für die Matrizen $\mathsf{B}(\tau)$ des vorigen Paragraphen lassen sich nun wieder durch geeignete Wahl der erzeugenden Funktionen F^ϱ innerhalb ihrer

linearen Schar gewisse einfachere Normalformen erreichen. Vor allem ergibt sich durch Reduktion auf Dreiecksgestalt:

Satz 40. *Die charakteristischen Wurzeln jeder Matrix* $\mathsf{B}(\tau)$ *aus* § 8 *gehören der Schar der* F^ϱ *selbst an. Jede dieser Wurzeln ist Eigenfunktion des Operatoren-Ringes. Ihre Dirichlet-Reihe hat eine Eulersche Produktentwicklung von der Gestalt* (20), *wo die* $\lambda(m)$ *durch Matrizen ersten Grades zu ersetzen sind.*

Um eine Umkehrung dieses Satzes zu beweisen, behandeln wir gleich die viel allgemeinere Frage, welche Art von Euler-Produkten überhaupt bei Dirichlet-Reihen zu Modulformen möglich ist. Es wird sich das bemerkenswerte Resultat ergeben, daß keine einzige dieser Dirichlet-Reihen eine wesentlich andere Art von Eulerscher Produkt-Entwicklung aufweisen kann als die charakteristischen Wurzeln der Matrizen $\Phi(s)$.

Dieses Ergebnis beruht auf folgendem allgemeinen Satz über Modulformen:

Satz 41. *Wenn eine Modulform der Art* $(-k, Q)$ *durch eine primitive Transformation* L *von der Ordnung* n (>1) *wieder in eine Form der Stufe* Q *übergeht, und* $(n, Q) = 1$, *so ist die Form* F *identisch Null.*

Dabei heißt wie üblich $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ primitiv, wenn a, b, c, d ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, und $ad - bc = n$ heißt die Ordnung.

Zum Beweise bedenken wir, daß man bekanntlich jede primitive Transformation der Ordnung n aus einer beliebigen von ihnen, z. B. $S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$, in der Gestalt $A S_n B$, wo A und B zu $\overline{\Gamma}(1)$, erzeugen kann; wir dürfen daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich voraussetzen, daß $L = S_n$. Ist nun $F|S_n$ wieder zur Stufe Q gehörig, so ist

$$F|S_n U^Q = F|S_n;\quad F|S_n U^Q S_n^{-1} = F;\quad F\left|\begin{pmatrix} n & Q \\ 0 & n \end{pmatrix}\right. = n^k \cdot F.$$

Die Potenzen dieser letzten Transformation sind nicht primitiv, deshalb wählen wir

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ aus } \overline{\Gamma}(Q) \text{ mit } 1 \equiv a_1 \equiv c_1 \pmod{n},$$

und mit

$$V = A \cdot \begin{pmatrix} n & Q \\ 0 & n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & Q \\ 0 & Q \end{pmatrix} \pmod{n}$$

ist dann auch

$$F|V = n^k \cdot F,$$

während alle Potenzen V^l jetzt primitiv sind. Mit passendem B, C aus $\overline{\Gamma}(1)$ ist daher $V^l = B S_n^{2l} C$, und wenn endlich $n^l \equiv 1 \pmod{Q}$ genommen wird,

ist V^l kongruent der Identität E (mod. Q), also auch $BC \equiv E$ (mod. Q). Das bedeutet aber: $F|B$ ändert sich bei S_n^{2l} nur um den Faktor n^{kl} und muß also offenbar identisch verschwinden.

Zwei Folgerungen heben wir besonders hervor: Es sei $F(\tau) = \sum_m a(m) z_Q^m$ eine Form der Art $(-k, Q)$. Dann gilt

Hilfssatz 1. Wenn für eine feste Primzahl p, welche kein Teiler der Stufe Q ist, stets $a(m) = 0$, sobald m nicht durch p teilbar ist, so ist die Form F identisch Null.

Denn in diesem Falle ist $F\left(\tau + \frac{Q}{p}\right) = F(\tau)$ und da die Transformation $\begin{pmatrix} p & Q \\ 0 & p \end{pmatrix}$ primitiv ist, so ist Satz 42 anwendbar.

Ein erwähnenswertes Gegenstück ist

Hilfssatz 2. Wenn für eine Primzahl p, die kein Teiler der Stufe Q ist, stets $a(m) = 0$, sobald m durch p teilbar, so ist die Form F identisch Null.

Denn nach Satz 32, § 5, ist

$$F|T_p = p^{k-1} F|R_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p^{k-1} \sum_{l \bmod. p} F\left|\begin{pmatrix} 1 & lQ \\ 0 & p \end{pmatrix}\right.$$

eine Form der Stufe Q. Hier ist aber die Summe über l wegen der Voraussetzung identisch Null, und daher ist bereits $F|R_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zur Stufe Q gehörig, muß also nach Satz 41 verschwinden.

Um mit diesen Sätzen die oben gestellte Frage nach den möglichen Euler-Produkten übersichtlich erledigen zu können, führen wir folgende Bezeichnung ein: Wenn die Koeffizienten einer Dirichlet-Reihe

$$\varphi(s) = \sum_m a(m) m^{-s} \tag{21}$$

für eine gewisse Primzahl p die Eigenschaft haben:

$$a(m p^r) = a(m) \cdot c(p^r), \text{ wenn } (m, p) = 1,\ r = 0, 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

wobei $c(p^r)$ von m unabhängig ist, so sagen wir, $\varphi(s)$ ist ein **Euler-Produkt bezüglich der Primzahl p.** Aus (22) folgt ja im Gebiete absoluter Konvergenz die Produkt-Darstellung

$$\varphi(s) = \sum_{(m, p) = 1} a(m) m^{-s} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} c(p^r) p^{-rs}.$$

Der zweite Faktor rechts mag der **p-Bestandteil** heißen. Es gilt dann der folgende wichtige Satz:

Satz 42. *Die Primzahl p gehe nicht in Q auf. Damit die Dirichlet-Reihe* (21) *einer Modulform F von der Art $(-k, Q)$ ein Euler-Produkt be-*

züglich der Primzahl p ist, ist notwendig und hinreichend, daß $F(\omega_1, \omega_2)$ Eigenfunktion für die beiden Operatoren R_p und T_p ist, also

$$F \mid R_p = \varepsilon \cdot F, \quad F \mid T_p = \alpha \cdot F$$

mit konstantem ε, α. Der p-Bestandteil ist dann notwendig

$$\sum_{r=0}^{\infty} c(p^r)\, p^{-rs} = \frac{1}{1-\alpha p^{-s}+\varepsilon p^{k-1-2s}}. \tag{23}$$

Beweis: Daß die Bedingung hinreichend ist, ergibt sich sogleich auf dem früheren Wege. Denn nach den Grundformeln (16) folgt aus (22)

$$\left.\begin{aligned} &a(mp) = \alpha \cdot a(m), \\ &a(mp^{r+1}) + \varepsilon\, a(mp^{r-1})\, p^{k-1} = \alpha \cdot a(mp^r), \quad r \geqq 1 \end{aligned}\right\} \quad (m, p) = 1.$$

Vollständige Induktion nach r zeigt, daß eine Zerlegung

$$a(mp^r) = a(m) \cdot c(p^r) \quad r = 0, 1, 2, \ldots, \ (m, p) = 1$$

gilt. Nach Hilfssatz 1 ist $a(m)$ nicht immer Null für $(m, p) = 1$, daher aus (22)

$$c(p) = \alpha, \quad c(1) = 1,$$
$$c(p) \cdot c(p^r) = c(p^{r+1}) + \varepsilon \cdot p^{k-1} c(p^{r-1}), \quad r \geqq 1,$$

was mit (23) gleichbedeutend ist.

Um die tiefer liegende Tatsache zu erkennen, daß die Bedingungen notwendig sind, bilde man zunächst die Form der Stufe Q

$$F \mid T_p = p^{k-1} G \left| \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. + p^{k-1} \sum_{l \bmod p} F \left| \begin{pmatrix} 1 & lQ \\ 0 & p \end{pmatrix} \right., \tag{24}$$

worin $G(\omega_1, \omega_2)$ die Form $G = F \mid R_p$ der Stufe Q bedeutet. Die Potenzreihe für die Summe über l in (24) ist

$$\frac{1}{p} \sum_l F\left(\frac{\tau + lQ}{p}\right) = \sum_m a(mp)\, z_Q^m.$$

Wegen $a(mp) = a(m) \cdot c(p)$ ist also

$$\frac{1}{p} \sum_l F\left(\frac{\tau + lQ}{p}\right) - c(p) F(\tau) = \sum_m \bigl(a(mp) - c(p)\, a(m)\bigr) z_Q^m$$

eine Potenzreihe in z_Q, deren sämtliche Exponenten durch p teilbar sind, ebenso wie bei $G(p\tau)$. Mithin ist nach Hilfssatz 1

$$F \mid T_p - c(p) \cdot F = 0$$

als Form der Stufe Q. F ist also Eigenfunktion von T_p.

Weiter folgt aber aus

$$p^{k-1} G(\tau) \left| \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. = c(p) \cdot F(\tau) - \frac{1}{p} \sum_l F\left(\frac{\tau + lQ}{p}\right) = \sum_m \bigl(c(p)\, a(m) - a(mp)\bigr) z_Q^m,$$

daß wegen $a(mp^2) = a(m) \cdot c(p^2)$ in der Reihe für

$$p^{k-1} G(p\tau) - \bigl(c(p)^2 - c(p^2)\bigr) F(p\tau) \tag{25}$$

alle Exponenten sogar durch p^2 teilbar sind. Schreibt man hier $\frac{\tau}{p}$ an Stelle von τ, so ist wieder nach Hilfssatz 1 die entstehende Reihe identisch Null und wegen der Bedeutung von G

$$F \mid R_p = \varepsilon \cdot F$$

mit

$$\varepsilon = \frac{c(p)^2 - c(p^2)}{p^{k-1}},$$

und F ist also auch Eigenfunktion von R_p, womit alles bewiesen ist.

Ein analoger Satz gilt mit trivialen Abänderungen im Beweis auch, wenn man als Koeffizienten der Reihen nicht Zahlen $a(m)$, sondern kommutative Matrizen zuläßt.

Für Euler-Produkte bezüglich einer Primzahl q, welche in der Stufe aufgeht, besteht ein ebensolcher Satz nicht, wie sich aus den nachher vorkommenden Beispielen bei den Eisenstein-Reihen ergibt. Die q-Bestandteile solcher Dirichlet-Reihen können auch noch andere Gestalt haben als in den Matrizen $\Phi(s)$.

Jedoch ergibt sich als Umkehrung von Satz 40

Satz 40a. *Damit eine Modulform charakteristische Wurzel einer Matrix* $\mathsf{B}(\tau)$ *ist, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Dirichlet-Reihe ein Euler-Produkt von der Form* (20) *ist, oder auch, daß sie Eigenfunktion des Operatoren-Ringes der* R_n, T_m^t *mit passend gewähltem* t *ist.*

§ 10.

Das System der Eisenstein-Reihen und der Spitzenformen. Beispiel für nicht-voll-reduzible Systeme.

Wenn es vom Teiler t und einem Charakter $\varepsilon(n)$ Formen gibt, die nicht in allen Spitzen verschwinden, so zerfällt wie bei der Stufe eins das System dieser Formen in zwei Teilscharen, die Spitzenformen und die Eisenstein-Reihen. Denn zunächst besteht das System aller Formen der gleichen Art $(-k, Q)$ aus der Schar der Eisenstein-Reihen und den Spitzenformen. Jede dieser Teilscharen geht ferner durch alle Substitutionen aus $\overline{\Gamma}(1)$ in sich über. Durch Anwendung von U und R_n kann man daher aus beiden Systemen je die Schar der Formen vom Teiler t und dem Charakter $\varepsilon(n)$ isolieren.

Bezeichnen wir nun mit $E(t, \varepsilon, Q)$ bzw. $S(t, \varepsilon, Q)$ die lineare Schar der Eisenstein-Reihen und Spitzenformen der Stufe Q, vom Teiler t und Charakter $\varepsilon(n)$, so folgt zunächst

Satz 43. *Jede der Scharen* $E(t, \varepsilon, Q)$, $S(t, \varepsilon, Q)$ *geht durch alle Operatoren* T_m^t *in sich über.*

Beweis: Für jeden Operator L (Transformation höherer Ordnung), der als Summand in der Definition von T^t_m auftritt, gilt:

Durch L geht jede Spitzenform wieder in eine Spitzenform (eventuell von höherer Stufe) über.

Durch L geht jede Eisenstein-Reihe in ein lineares Aggregat von Eisenstein-Reihen (eventuell von höherer Stufe) über. Letzteres folgt unmittelbar aus der Definition dieser Reihen, auch noch für $k = 1, 2$, wenn man hier die von mir vorgeschlagene modifizierte Definition mit Hilfe der, absolute Konvergenz erzeugenden Faktoren benutzt[3]).

Auch durch T^t_m geht daher jede Form aus $S(t, \varepsilon, Q)$ wieder in eine solche über, weil der Begriff Spitzenform unabhängig von dem Wert der Stufe ist.

Aber auch jedes Individuum E aus $E(t, \varepsilon, Q)$ geht durch T^t_m wieder in ein solches über. Denn $E \mid T^t_m$ ist nach dem Vorangehenden eine lineare Kombination von Eisenstein-Reihen einer gewissen Stufe K, andererseits nach § 8 zur Stufe Q gehörig, also gibt es nach § 1, Satz 1 eine Kombination von Reihen der Stufe Q, etwa $F(\tau, Q)$, derart, daß $E \mid T^t_m - F(\tau, Q)$ eine Spitzenform ist. Diese aber ist, aufgefaßt als zur Stufe KQ gehörig, nach Satz 2 identisch Null.

Satz 44. *Die Dirichlet-Reihen zur Schar aller Eisenstein-Reihen der Stufe Q sind linear äquivalent mit den Reihen*

$$(t_1 t_2)^{-s} \cdot L(s, \chi_1) \cdot L(s - k + 1, \chi_2). \tag{26}$$

Hierin bedeuten t_1, t_2 zwei positive Teiler von Q; χ_1, χ_2 sind Restcharaktere mod. $\frac{Q}{t_1}$ bzw. $\frac{Q}{t_2}$, ferner

$$\chi_1(-1) \cdot \chi_2(-1) = (-1)^k, \quad L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Für $k = 2$ darf außerdem

(27) nicht gleichzeitig χ_1 der Hauptcharakter mod. $\frac{Q}{t_1}$ und $Q = t_2$

sein.

Beweis: Die Potenzreihen, welche in der Schar der Eisenstein-Reihen der Stufe Q auftreten, lassen sich — abgesehen vom konstanten Gliede, das für den Übergang zu Dirichlet-Reihen belanglos ist — nach I, Gleichung (4), § 1 folgendermaßen beschreiben: Man bilde mit einem beliebigen Paar a_1, a_2 von Restklassen mod. Q

$$g(a_1, a_2) = \sum_{\substack{m \cdot N > 0 \\ m \equiv a_1 \,(\mathrm{mod.}\, Q)}} N^{k-1} (sgn\, N)\, \zeta^{a_2 N} z_Q^{m N} = (-1)^k g(-a_1, -a_2); \; (\zeta = e^{\frac{2\pi i}{Q}}). \tag{28}$$

[3]) E. Hecke, Theorie der Eisensteinschen Reihen, Abh. Mathem. Sem. Hamburg 5 (1927).

Die genannten Potenzreihen sind dann beliebige lineare Verbindungen

$$(29) \qquad \sum_{a_1, a_2 \bmod. Q} c(a_1, a_2) \cdot g(a_1, a_2)$$

mit konstanten $c(a_1, a_2)$ mit der einzigen Bedingung:

(30) für $k = 2$ muß sein: $c(a_1, a_2) = c(-a_1, -a_2)$ und $\sum\limits_{a_1, a_2} c(a_1, a_2) = 0$.

Nun ist die Schar (29) ohne diese Bedingung (30) offenbar linear äquivalent mit

$$f(a_1, l) = \frac{1}{Q} \sum_{a \bmod. Q} \zeta^{-al} g(a_1, a). \qquad (a_1, l \bmod. Q)$$

Hier ist

$$f(a_1, l) = [a_1, l] + (-1)^k [-a_1, -l],$$

$$(31) \qquad [a_1, a_2] = \sum z_Q^{m_1 m_2} m_2^{k-1} \qquad (m_i \equiv a_i \,(\mathrm{mod.}\, Q),\ m_i > 0).$$

Die Dirichlet-Reihen dazu sind

$$\{a_1, a_2\} = \sum \frac{1}{m_1^s} \cdot \frac{1}{m_2^{s-k+1}} \qquad (m_i \equiv a_i \,(\mathrm{mod.}\, Q),\ m_i > 0).$$

Sind jetzt t_1, t_2 zwei positive Teiler von Q und χ_1, χ_2 Restcharaktere mod. $\frac{Q}{t_1}$ bzw. $\frac{Q}{t_2}$, so folgt durch Summation nach b_i mod. $\frac{Q}{t_i}$

$$\frac{t_2^{k-1}}{2} \sum_{b_i \bmod. \frac{Q}{t_i}} \chi_1(b_1) \chi_2(b_2) \left(\{b_1 t_1, b_2 t_2\} + (-1)^k \{-b_1 t_1, -b_2 t_2\}\right)$$

$$= \varrho \cdot t_2^{k-1} \sum_{b_i \bmod. \frac{Q}{t_i}} \chi_1(b_1) \chi_2(b_2) \{b_1 t_1, b_2 t_2\}$$

$$= \varrho \cdot (t_1 t_2)^{-s} \cdot L(s, \chi_1) \cdot L(s - k + 1, \chi_2),$$

wo

$$\varrho = \frac{1 + (-1)^k \chi_1(-1) \cdot \chi_2(-1)}{2}.$$

Hieraus folgt die Richtigkeit von Satz 44 für $k \neq 2$. Für $k = 2$ ist (31) auf die $g(a_1, a_2)$ umzurechnen und die Bedingung (30) anzusetzen. Man findet für χ_1, χ_2 die Bedingung

$$\sum_{\substack{b_i \bmod. \frac{Q}{t_i} \\ l \bmod. Q}} \chi_1(b_1) \cdot \chi_2(b_2) \zeta^{l b_2 t_2} = 0,$$

und das ist gleichwertig mit der in Satz 43 genannten Forderung (27).

Die Reihen (26) sind nicht alle linear unabhängig. Die zugehörigen Modulformen sind jedenfalls nach Satz 41 des vorigen Paragraphen alle normiert, vom Charakter

$$\varepsilon(n) = \chi_1(n) \cdot \chi_2(n)$$

und sind Eigenfunktionen aller Operatoren T_n. Denn die Dirichlet-Reihen sind Euler-Produkte bezüglich jeder Primzahl p, welche nicht in Q aufgeht.

Was den Teiler betrifft, so sieht man sofort, daß Formen vom Teiler $t = 1$ nur aus Linearkombinationen mit $t_1 \cdot t_2 = 1$, d. h. $t_1 = t_2 = 1$ entstehen können und alle Reihen mit $t_1 = t_2 = 1$ auch umgekehrt zum Teiler $t = 1$ gehören. Daraus folgt

Satz 45. *Die Matrix* $\mathsf{B}(\tau)$ *der Schar der Eisenstein-Reihen* $E(1, \varepsilon, Q)$ *mit* $t = 1$ *ist auf reine Diagonalform reduzierbar.*

Denn die Anzahl der linear unabhängigen Elemente in der Schar ist nach dem Obigen gleich der Anzahl der linear unabhängigen, d. h. verschiedenen, charakteristischen Wurzeln der Matrix $\mathsf{B}(\tau)$.

Eine kleine Rechnung zeigt, daß für Q = Primzahl q oder Quadrat einer solchen auch die Scharen $E(t, \varepsilon, Q)$ mit $t = q$ oder $t = q^2$ ebensoviel verschiedene charakteristische Wurzeln in den Matrizen $\mathsf{B}(\tau)$ wie unabhängige Elemente enthalten, daß also auch hier $\mathsf{B}(\tau)$ auf Diagonalform transformierbar ist.

Dagegen ist bereits für die Stufe $Q = q^3$ diese volle Reduzibilität nicht mehr vorhanden:

Satz 45a. *Die Matrix* $\mathsf{B}(\tau)$ *zum System der Eisenstein-Reihen der Stufe* $Q = q^3$ *vom Teiler* $t = q^3 = Q$ *und dem Charakter* $\varepsilon(n)$ *ist nicht auf Diagonalgestalt transformierbar, falls* $q \neq 2$.

Zum Beweise genügt es, eine bei allen T_m^t invariante Schar von zwei Erzeugenden anzugeben, die nur eine einzige Eigenfunktion des Operatorenringes enthält. Wir bilden die Reihe (26) mit

$$Q = q^3, \quad t_1 = t_2 = q^3,$$
$$\chi_1, \chi_2 \text{ Charaktere mod. } q \quad \text{mit} \quad \chi_1(-1)\,\chi_2(-1) = (-1)^k,$$
$$\varphi(s) = q^{-4s} L(s, \chi_1) \cdot L(s - k + 1, \chi_2).$$

Der q-Bestandteil dieser Reihe ist q^{-4s}. Die zugehörige Modulform ist bis auf eine additive Konstante

$$F(\tau) = \text{const.} + \sum_{(n,q)=1} a(n)\, z_Q^{n q^4}$$

und $F(\tau)$ ist Eigenfunktion aller T_n, R_n, vom Teiler $t = q^3$ und dem Charakter $\varepsilon(n) = \chi_1(n) \cdot \chi_2(n)$. Wegen

$$F\left(\tau + \frac{1}{q}\right) = F(\tau)$$

liefert der Operator

$$T_q^Q = q^{k-1} \cdot \sum_{l \bmod. q} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

die Form vom selben Teiler

(32) $$F(\tau) \mid T_q^Q = \frac{1}{q} \sum_{l \bmod. q} F\left(\frac{\tau + l}{q}\right) = F\left(\frac{\tau}{q}\right) = H(\tau)$$

und

(33) $$H(\tau)\,|\,T_q^Q = \frac{1}{q}\sum_{l \bmod q} H\left(\frac{\tau+l}{q}\right) = 0.$$

Es sind also F, H Eigenfunktionen aller T_r, R_n; sie haben dabei die gleichen Multiplikatoren. Die Matrix $\lambda(q)$ für den Operator T_q^Q lautet für F, H nach (32), (33)

$$\lambda(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der einzigen Wurzel 0. Daher hat auch die Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ zu der Schar (F, H) nur eine einzige charakteristische Wurzel, nämlich $H(\tau)$.

§ 11.

Weitere Reduktion der Matrizen mit Hilfe der irreduziblen Darstellungen von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$.

Die Reduktion der Matrizen $\mathsf{B}(\tau)$ läßt sich nun im allgemeinen noch weiter treiben. Es zeigt sich, daß die $\lambda(n)$ für die verschiedenen t, ε sich auf die mit $t = 1$ zurückführen lassen und daß diese entsprechend den irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{M}(Q)$ in Teilmatrizen zerfallen. Die Quelle dieser Sätze ist die Vertauschungsrelation Satz 32, § 5.

Bedeutet zunächst F^ϱ $(\varrho = 1, \ldots, \varkappa)$ ein volles System von Formen der Art $(-k, Q)$, so gibt es zu jedem n mit $(n, Q) = 1$ eine konstante Matrix des Grades $\varkappa$, $\lambda(n) = (\lambda_{\varrho\sigma}(n))$, so daß

$$F^\varrho\,|\,T_n = \sum_\sigma \lambda_{\varrho\sigma}(n)\,F^\sigma.$$

Andererseits geht aber auch durch jede Substitution L aus $\overline{\Gamma}(1)$ die Schar der F^ϱ in sich über, daher ist mit konstanten $c_{\varrho\sigma}(L)$

$$F^\varrho\,|\,L = \sum_\sigma c_{\varrho\sigma}(L)\,F^\sigma,$$

wo die Matrizen

$$C(L) = C([L]) = (c_{\varrho\sigma}(L))$$

offenbar eine Darstellung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, Q)$ der endlichen Modulargruppe $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ mod. Q bilden. Die Vertauschungsrelation

(34) $$T_n \cdot L = [S_n L S_n^{-1}] \cdot T_n$$

hat dann die Matrizengleichung

(35) $$\lambda(n) \cdot C(L) = C([S_n L S_n^{-1}]) \cdot \lambda(n)$$

zur Folge. Wir haben in den früheren Paragraphen eine Zerfällung der $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, Q)$ und damit der Schar der F^ϱ vorgenommen, durch Einführung von Teiler und Charakter, die sich ungefähr mit der Zerfällung der Darstellung $\mathfrak{S}$ nach den irreduziblen Darstellungen der Untergruppe $\mathfrak{M}_0(Q)$ deckt. Für diese Bestandteile war dann die Definition der Ope-

ratoren T^{i}_{m} mit $(m, Q) > 1$ möglich. Das exakte Zurückgehen auf die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{S}$ ist deshalb eigentümlich kompliziert, weil sich zeigt, daß im allgemeinen die Darstellung $\mathfrak{S}$ von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ mit der Darstellung $C([S_n L S_n^{-1}])$ nicht äquivalent ist. Und bei der hier zu konstatierenden Verknüpfung verschiedener irreduzibler Darstellungen tritt dann merkwürdigerweise die Klassenzahl definiter binärer quadratischer Formen aller Diskriminanten auf, welche Teiler der Stufe Q sind.

Zur Diskussion dieser Beziehungen sei jetzt F_i $(i = 1, \ldots, f)$ ein System von f Formen der Art $(-k, Q)$, das sich bei $\overline{\Gamma}(1)$ nach einer irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}$ der Gruppe $\mathfrak{M}(Q)$ vom Grade f umsetzt. Wenn dann für L aus $\overline{\Gamma}(1)$ mit konstanten $c_{i\nu}(L)$

$$F_i | L = \sum_{\nu=1}^{f} c_{i\nu}(L) F_\nu, \qquad C(L) = (c_{i\nu}(L)),$$

so setzen sich für festes n die f Formen

$$G_i = F_i | T_n \qquad (i = 1, \ldots, f) \tag{36}$$

bei der Substitution L aus $\overline{\Gamma}(1)$ wegen (34) nach den Matrizen

$$C([S_n L S_n^{-1}]) \tag{37}$$

um. Diese bilden wiederum eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{M}(Q)$, welche aus $\mathfrak{D}$ durch den Automorphismus

$$[L] \to [S_n L S_n^{-1}]$$

hervorgeht. Sie sei mit $\xi_n \mathfrak{D}$ bezeichnet. Der Automorphismus ξ_n hängt offenbar nur von n mod. Q ab, und die ξ_n bilden ersichtlich eine endliche Abelsche Gruppe.

Es kommt nun weiterhin darauf an, wie viele unter den Darstellungen $\xi_n \mathfrak{D}$ für die verschiedenen n nicht äquivalent sind. Der Automorphismus ist ein innerer und $\mathfrak{D}$ also mit $\xi_n \mathfrak{D}$ äquivalent, wenn n quadratischer Rest mod. Q ist, $n \equiv g^2$ (mod. Q). Denn dann ist

$$S_n \equiv S_{g^2} \equiv \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \cdot R_g \pmod{Q},$$

$$[S_n L S_n^{-1}] \equiv R_g L R_g^{-1} \pmod{Q},$$

wo nun R_g zu $\overline{\Gamma}(1)$ gehört. Es gibt also unter den $\xi_n \mathfrak{D}$ höchstens soviel nichtäquivalente, als es verschiedene Arten von quadratischen Nichtresten mod. Q gibt. Nennen wir zwei Darstellungen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ **verwandt**, wenn $\mathfrak{D}_2 = \xi_n \mathfrak{D}_1$ mit irgendeinem n („verwandt" ist offenbar symmetrisch und transitiv), so wollen wir zuerst den einfachsten Fall untersuchen:

(38) I. Alle mit $\mathfrak{D}$ verwandten Darstellungen seien äquivalent.

Ein solches $\mathfrak{D}$ heiße **von erster Art.**

Alsdann läßt sich bekanntlich die Darstellung $\mathfrak{D}$ zu einer irreduziblen Darstellung vom selben Grade f für diejenige Gruppe erweitern, welche

aus $\mathfrak{D}$ durch Hinzunahme der Automorphismen ξ_n entsteht. Das ist die Gruppe der ganzzahligen Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mod. Q (wo $ad - bc$ eine beliebige zu Q teilerfremde Zahl sein darf), innerhalb welcher $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ ein Normalteiler vom Index $\varphi(Q)$ (= Eulerscher Funktion von Q) ist mit Abelscher Faktorgruppe. Wir brauchen diese Tatsache nicht in vollem Umfang und geben für den erforderlichen Teil gleich den Beweis: Wegen (38) gibt es zu n eine Matrix A_n vom Grade f, so daß für alle L aus $\overline{\Gamma}(1)$

$$C([S_n L S_n^{-1}]) = A_n \cdot C(L) \cdot A_n^{-1}. \tag{39}$$

Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{D}$ ist A_n hierdurch eindeutig bis auf einen skalaren Zahlfaktor bestimmt. Diesen wählen wir nun in bekannter Weise so, daß die A_n eine mit den ξ_n isomorphe Gruppe bilden mit

$$A_{n_1} \cdot A_{n_2} = A_{n_1 \cdot n_2},$$
$$A_1 = A_n^{\varphi(Q)} = E_f = \text{Einheitsmatrix vom Grade } f.$$

Die aus den Produkten der A_n und $C(L)$ bestehenden Matrizen bilden offenbar eine endliche Gruppe. In ihr ist die Untergruppe der $C(L)$ mit L aus $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ mit allen A_n vertauschbar, weil für ihre Erzeugenden $C(U)$, $C(R_a)$ gilt:

$$C(R_a) \text{ mit } A_n \text{ vertauschbar}, \quad ((a, Q) = 1). \tag{40}$$

$$A_n \cdot C(U)^n \cdot A_n^{-1} = C(U). \tag{41}$$

Wir wollen nun eine bestimmte *Normalform dieser Gruppe* erreichen. Zunächst nehmen wir wie in § 6 an, daß jede der Formen F_i zu je einem bestimmten Teiler t_i gehört. Das bedeutet, daß in der Schar der $F_i | U^l$ für festes i und $l = 1, 2, \ldots, Q$ nur Eigenfunktionen von U auftreten, deren Multiplikatoren primitive $\frac{Q}{t_i}$-te Einheitswurzeln sind. Das ist sicher dann der Fall, wenn die in $\mathfrak{D}$ enthaltene Darstellung von $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ bereits in ihre irreduziblen Bestandteile zerlegt ist. Wegen (40), (41) zerfallen dann die Matrizen A_n ebenfalls in den Teilern entsprechende Teilmatrizen, und jede dieser (Abelschen) Teilmatrizen wollen wir sodann noch auf Diagonalform gebracht denken. Dann haben auch die Matrizen $C(R_n)$ schon Diagonalform, weil wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{D}$ aus (39) folgt

$$C(R_n) = A_{n^2} \cdot \chi(n). \tag{42}$$

Der skalare Faktor $\chi(n)$ muß offenbar ein Restcharakter von n mod. Q sein.

Eine Darstellung $\mathfrak{D}$ heiße nun im Falle I. **normiert**, wenn

1. Die Darstellung von $\mathfrak{M}_0(Q)$ in $\mathfrak{D}$ zerlegt ist in solche mit je einem Teiler;

2. Die Matrizen A_n Diagonalform haben, $A_n = (\chi_i(n)\, \delta_{ik})$.

Damit ist dann bewiesen:

Satz 46. *Jede irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$, welche mit allen verwandten Darstellungen äquivalent ist, ist mit einer normierten Darstellung äquivalent.*

Wir setzen weiterhin $\mathfrak{D}$ als normiert voraus. Dann folgt endlich das erste Resultat:

Satz 47. *Die f Formen F_i $(i = 1, 2, \ldots, f)$ mögen sich bei $\overline{\Gamma}(1)$ nach einer irreduziblen normierten Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ der ersten Art umsetzen. Für jedes n erfahren dann die f Funktionen*

$$\bar{\chi}_i(n) \cdot F_i | T_n \qquad (i = 1, \ldots, f)$$

bei $\overline{\Gamma}(1)$ dieselben linearen Transformationen wie die F_i.

Dabei bedeutet $\bar{\chi}_i(n)$ das i-te Diagonalelement in A_n^{-1}.

Denn nach dem Vorangehenden setzen sich die $F_i | T_n$ nach den Matrizen $A_n \cdot C(L) A_n^{-1}$ um, das System $A_n^{-1}(F_1 | T_n, \ldots, F_f | T_n)$ also ebenfalls nach den Matrizen $C(L)$ wie die F_i.

Endlich sei nun $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, Q)$ die endliche Gruppe linearer homogener Substitutionen, welche ein volles System unabhängiger Modulformen der Art $(-k, Q)$ bei $\overline{\Gamma}(1)$ erfährt. Diese Darstellung von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ denken wir in ihre irreduziblen Bestandteile zerlegt. Die Darstellung $\mathfrak{D}$ von der ersten Art aus Satz 47 sei in $\mathfrak{S}$ genau $\varkappa$-mal enthalten. Es gibt daher genau $\varkappa$ Systeme von Formen $(F_1^\varrho, \ldots, F_f^\varrho)$ $(\varrho = 1, \ldots, \varkappa)$, deren jedes sich bei $\overline{\Gamma}(1)$ nach derselben (normierten) Darstellung $\mathfrak{D}$ umsetzt. Aus der Irreduzibilität von $\mathfrak{D}$ folgt dann der Hauptsatz der Reduktionstheorie:

Satz 48. *Zu jedem n gibt es eine konstante Matrix $\alpha(n) = (\alpha_{\varrho\sigma}(n))$ des Grades $\varkappa$, so daß für alle $i = 1, 2, \ldots, f$*

$$\bar{\chi}_i(n) \cdot F_i^\varrho | T_n = \sum_\sigma \alpha_{\varrho\sigma}(n) F_i^\sigma \qquad (\varrho = 1, \ldots, \varkappa). \tag{43}$$

Hierbei ist wichtig, daß die Matrix $\alpha(n)$ von i unabhängig ist. Man sieht, daß jedes der f Systeme $(F_i^{(1)}, \ldots, F_i^{\varkappa})$ $(i = 1, \ldots, f)$ eine bei allen T_n invariante Schar vom Range $\varkappa$ bildet. Jede Schar hat einen gewissen Teiler t_i, und der Charakter ist nach (42)

$$\varepsilon_i(n) = \chi_i(n^2) \cdot \chi(n).$$

Die Matrizen $\chi_i(n) \cdot \alpha(n)$ für festes i setzen sich nach (43) isomorph mit den Operatoren T_n zusammen. Aus Satz 34, § 5 folgt also

Satz 49.

$$\alpha(n_1) \cdot \alpha(n_2) = \sum_{d | n_1, n_2} \alpha\left(\frac{n_1 n_2}{d^2}\right) \chi(d) \cdot d^{k-1}.$$

Bei denjenigen F_i, welche den Teiler $t = 1$ haben, ist nach § 8 nun die Heranziehung weiterer Operatoren nicht erforderlich, und da sie eine

bei den T_n invariante Teilschar bilden, so gilt die Theorie der in § 8 mit $\lambda(n)$ bezeichneten Matrizen für diese $\lambda(n) = \chi_i(n)\,\alpha(n)$. Es ist damit bewiesen:

Satz 50. *Die Schar der Modulformen vom Teiler* 1 *enthält mehrere, gegenüber den T_n invariante Teilscharen, welche den irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}$ der Modulargruppe $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ von erster Art entsprechen. Der Grad der einzelnen Teilschar und damit der Grad der nach* § 8 *zugehörigen Matrix* $\mathsf{B}(\tau)$ *ist gleich der Vielfachheit $\varkappa$, mit welcher $\mathfrak{D}$ in der Darstellung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, Q)$ enthalten ist.*

Komplizierter liegen die Verhältnisse bei den F_i mit $t_i > 1$. Denn nach der Theorie aus § 8 muß man wissen, wie sich diese F_i bei den Operatoren $T_m^{t_i}$ verhalten. Im allgemeinen gehen aber hierbei die F_i in Formen über, welche zu andern irreduziblen Darstellungen von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ gehören. Eine abgeschlossene Aussage darüber scheint erst nach genauerer Kenntnis der einfachen Charaktere der Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ möglich zu sein. Für Primzahlstufe wird die Theorie in den nächsten Paragraphen vollständig erledigt werden.

II. Sind unter den mit $\mathfrak{D}$ verwandten Darstellungen genau r nichtäquivalente, $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ($\mathfrak{D}$ heiße dann von **r-ter Art**), welche aus $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1$ durch die Automorphismen

$$\xi_{n_l}\,\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_l \qquad (l = 1, \ldots, r)$$

hervorgehen, so gelangen wir durch folgende Abänderung des Gedankenganges zu einem ähnlichen Resultat: Wir ziehen die Untergruppe $\mathfrak{A}$ derjenigen Automorphismen ξ_N heran, welche $\mathfrak{D}_1$ in eine äquivalente Darstellung überführen. Zu jedem n gibt es dann genau eines der obigen n_l, so daß

$$n \equiv N \cdot n_l \ (\mathrm{mod.}\ Q) \qquad (\xi_N \subset \mathfrak{A}).$$

Die Darstellung $\mathfrak{D}_1$ setzen wir wieder als **normiert** voraus, d. h.

1. Die in $\mathfrak{D}_1$ enthaltene Darstellung von $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ soll in solche von je einem Teiler zerlegt sein.

2. Die Matrizen A_N mit $\xi_N \subset \mathfrak{A}$, welche die Automorphismen ξ_N von $\mathfrak{D}_1$ vermitteln, sollen eine mit $\mathfrak{A}$ isomorphe Gruppe von Diagonalmatrizen $A_N = (\chi_i(N)\,\delta_{ik})$ sein.

Aus den Matrizen $C_1(L)$ von $\mathfrak{D}_1$ definieren wir dann die Matrizen $C_l(L)$ aus $\mathfrak{D}_l$ durch

$$C_l(L) = C_1\left([S_{n_l} L S_{n_l}^{-1}]\right). \tag{44}$$

Die $\mathfrak{D}_l$ sind also auch sämtlich normiert. Und analog zu Satz 47 folgt

Satz 47a. *Die f Formen F_i $(i = 1, 2, \ldots, f)$ mögen sich bei $\overline{\Gamma}(1)$ nach der irreduziblen normierten Darstellung $\mathfrak{D}_l$ von r-ter Art umsetzen. Für jedes n erfahren dann die f Funktionen*

$$\bar{\chi}_i(N)\,F_i \mid T_n \qquad (i = 1, \ldots, f)$$

bei $\Gamma(1)$ *die linearen Transformationen* $C_\nu(L)$ *aus* $\mathfrak{D}_\nu$. *Dabei bestimmen sich* ν, N *aus*:

$$\xi_N = \xi_n \cdot \xi_{n_l} \cdot \xi_{n_\nu}^{-1} \text{ zu } \mathfrak{A}; \quad \nu = \nu(n, l).$$

Seien ferner die Darstellungen $\mathfrak{D}_l$ in der Darstellung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, Q)$ genau mit den Vielfachheiten $\varkappa_l$ enthalten. Diese $\varkappa_l$ sind im allgemeinen voneinander verschieden.

Durch T_n gehen nach Satz 47a die Formen von $\mathfrak{D}_l$ in die von $\mathfrak{D}_\nu$ über; und die vermittelnden linearen Substitutionen haben also im allgemeinen rechteckige Matrizen. Man betrachte daher das volle System der F_i mit festem i für sämtliche mit $\mathfrak{D}_1$ verwandten Darstellungen $\mathfrak{D}_l$, das aus

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_r$$

Elementen besteht. Es geht durch alle T_n in sich über, hat einen bestimmten Teiler und den Charakter

$$\varepsilon_i(n) = \chi_i(n^2) \cdot \chi(n),$$

so daß für den Teiler $t_i = 1$ die Theorie von § 8 anwendbar ist. An Stelle von Satz 50 tritt dann

Satz 50a. *Jede der Matrizen* $\mathsf{B}(\tau)$ *mit* $t = 1$ *aus* § 8 *zerfällt in Teilmatrizen, welche zugeordnet sind den Mengen miteinander verwandter irreduzibler Darstellungen von* $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$. *Der Grad jeder dieser Teilmatrizen ist gleich der Summe der Vielfachheiten, mit der diese verwandten Darstellungen in* $\mathfrak{S}(k, Q)$ *enthalten sind.*

Die Abhängigkeit dieser Matrizen vom Index i besteht dann aber bei den Darstellungen höherer Art nicht nur in dem Auftreten eines skalaren Faktors $\chi_i(n)$. Die Untersuchung der hier vorliegenden Gesetzmäßigkeiten bietet gerade ein besonderes Interesse und soll im folgenden für Primzahlstufe vollständig durchgeführt werden.

§ 12.

Durchführung der Theorie für Primzahlstufe q.

Es sei jetzt die Stufe Q eine ungerade Primzahl q. Hier kennt man für die Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ alle irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{G}_f$ vom Grade f. Ihre Charaktere sind von Frobenius berechnet worden. Tabellen für $\mathfrak{M}(q)$ und $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ finden sich in den angegebenen Arbeiten[4]); ich stelle hier die nötigen Angaben zusammen:

---

[4]) G. Frobenius, Berliner Akad. 1896, S. 985. I. Schur, Crelles Journal f. d. r. u. angew. Math. 132, S. 128; E. Hecke, Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928), S. 235; H. Feldmann, Abh. Math. Sem. Hamburg 8 (1931), S. 331.

Aus der Struktur der Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ folgt, indem man die Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mod. q mit $ad - bc \equiv 1$ mod. q als Elemente von $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ wählt, daß die einzelnen Klassen konjugierter Elemente in $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ vollständig durch ihre Spur $a + d$ bestimmt sind, außer wenn die Spur kongruent ± 2 mod. q ist. Die verschiedenen Klassen mit diesen Spuren werden dann repräsentiert durch

$$\pm U, \ \pm U^{\nu} \qquad (\nu \text{ ein quadratischer Nichtrest mod. } q)$$

und noch durch $\pm E$ (E = Einheitsmatrix).

Außer inneren Automorphismen gibt es unter den ξ_n wesentlich einen einzigen anderen, nämlich für n = quadratischer Nichtrest mod. q. Dieser Automorphismus vertauscht die beiden Klassen U, U^{ν} und ebenso $-U$, $-U^{\nu}$, während alle anderen Klassen bei ξ_n fest bleiben. Die Darstellungen der ersten Art von $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ sind daher diejenigen, wo die Charaktere $\chi(U)$, $\chi(U^{\nu})$ gleich sind, die anderen Darstellungen sind von zweiter Art. Es gibt irreduzible Darstellungen $\mathfrak{G}_f$ nur von den Graden

$$f = q, \ q+1, \ q-1, \ \frac{q+1}{2}, \ \frac{q-1}{2}$$

und dazu noch die identische Darstellung. Aus den Tabellen ersieht man

Satz 51. *Die Darstellungen der Grade* $\frac{q+1}{2}$, $\frac{q-1}{2}$ *(es gibt je zwei davon) sind von zweiter Art, alle übrigen von erster Art.*

Zur Durchführung der Theorie aus § 11 müssen wir noch die charakteristischen Wurzeln der Matrizen $C(U)$ und $C(R_n)$ in den einzelnen $\mathfrak{G}_f$ kennen. Für die Spuren $\chi(U)$ und $\chi(R_n)$ in den einzelnen irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{G}_f$ entnimmt man aus den Tabellen folgende Werte: Es sei g eine Primitivzahl mod. q, $R = R_g = \begin{bmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$, ferner $\varepsilon = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$, $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{q-1}}$, a läuft mod. $q-1$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{q}}$.

	$\mathfrak{G}_q$	$\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q+1}{2}}$	$\mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q+1}{2}}$	$\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q-1}{2}}$	$\mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q-1}{2}}$	$\mathfrak{G}^{(i)}_{q+1}$	$\mathfrak{G}^{(i)}_{q-1}$
$\chi(U)$	0	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	1	-1
$\chi(U^{\nu})$	0	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	1	-1
$\chi(R^a)$	1	$(-1)^a$	$(-1)^a$	0	0	$\varrho^{ia} + \varrho^{-ia}$	0

Eine kleine Rechnung ergibt dann

Satz 52. *Die Matrix* $C(U)$ *in der irreduziblen Darstellung* $\mathfrak{G}_f$ *hat folgende charakteristische Wurzeln:*

1. $f = q - 1$: *alle* ζ^l *mit* $(l, q) = 1$.
2. $f = q$: *alle* ζ^l *mit* $l = 0, 1 \ldots q - 1$.

3. $f = q + 1$: *alle* ζ^l *mit* $(l, q) = 1$ *als einfache Wurzel, überdies* 1 *als Doppelwurzel.*

4. $f = \frac{q-1}{2}$: ζ^l *mit* $(l, q) = 1$ *und zwar für die eine dieser Darstellungen alle quadratischen Reste* l mod. q, *für die andere alle Nichtreste* l mod. q.

5. $f = \frac{q+1}{2}$: ζ^l *mit* $\left(\frac{l}{q}\right) = +1$ *bzw.* -1 *wie unter* 4., *dazu noch* 1 *als einfache Wurzel.*

Schließlich ziehen wir noch die irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{A}_r$ vom Grade r von $\mathfrak{M}_0(q)$ heran. Aus der Relation

$$R_n U^{n^2} R_n^{-1} = U$$

folgt sofort, daß r nur die Werte 1 und $\frac{q-1}{2}$ haben kann.

Denn hat die dem Element U zugeordnete Matrix in $\mathfrak{A}_r$ als charakteristische Wurzel 1, so sei φ eine bei U invariante Verbindung der Variabeln: $\varphi | U = \varphi$. Auch für jeden Restcharakter $\chi(n)$ bleibt $g(\chi) = \sum_n \varphi | R_n \cdot \chi(n)$ bei U invariant und ist Eigenfunktion bei R_n. Nicht für alle χ kann $g(\chi) = 0$ sein, weil sonst auch $\varphi = 0$ wäre; also ist ein $g(\chi_0) \neq 0$ und erzeugt eine Darstellung ersten Grades von $\mathfrak{M}_0(q)$, daher ist $r = 1$, wenn $\mathfrak{A}_r$ irreduzibel.

Hat aber jene Matrix zu U in $\mathfrak{A}_r$ als charakteristische Wurzel $\zeta^a \neq 1$ und ist

$$\varphi | U = \zeta^a \cdot \varphi,$$

so bilde man die $\frac{q-1}{2}$ Verbindungen $\varphi | R_n = f_n \left(n = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}\right)$. Da R_{-1} mit allen Elementen in $\mathfrak{M}_0(q)$ vertauschbar ist, so ist für irreduzible $\mathfrak{A}_r$ die R_{-1} entsprechende Matrix notwendig bis auf den Faktor ± 1 die Einheitsmatrix. Die $\frac{q-1}{2}$ Verbindungen f_n setzen sich daher bei allen L aus $\mathfrak{M}_0(q)$ untereinander um und sind unabhängig, weil sie bei U verschiedene Faktoren annehmen. Für irreduzible $\mathfrak{A}_r$ ist daher $r = \frac{q-1}{2}$. Der Charakter $\chi(R_l)$ in dieser Darstellung ist offenbar Null, wenn $l \neq \pm 1 \pmod{q}$.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den Tabellen für die Charaktere der $\mathfrak{G}_f$, so erhält man folgende Übersicht:

Satz 53. *Irreduzible Darstellungen* $\mathfrak{A}_r$ *von* $\mathfrak{M}_0(q)$ *sind in den* $\mathfrak{G}_f$ *folgendermaßen verteilt:*

1. $f = q - 1$: *Jede* $\mathfrak{G}_{q-1}$ *enthält zwei* $\mathfrak{A}_{\frac{q-1}{2}}$.

2. $f = q$: $\mathfrak{G}_q$ *enthält die identische Darstellung von* $\mathfrak{M}_0(q)$ *und außerdem zwei* $\mathfrak{A}_{\frac{q-1}{2}}$.

3. $f = q + 1$: $\mathfrak{G}_{q+1}$ *enthält zwei verschiedene (konjugiert-komplexe) Darstellungen* $\mathfrak{A}_1$ *und zwei* $\mathfrak{A}_{\frac{q-1}{2}}$. *Verschiedene* $\mathfrak{G}_{q+1}$ *enthalten nie dieselben* $\mathfrak{A}_1$.

4. $f = \frac{q-1}{2}$: *Beide* $\mathfrak{G}_{\frac{q-1}{2}}$ *enthalten je eine* $\mathfrak{A}_{\frac{q-1}{2}}$, *aber nicht dieselbe.*

5. $f = \frac{q+1}{2}$: *Beide* $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ *enthalten die von der Identität verschiedene reelle Darstellung* $\mathfrak{A}_1$ *und noch eine* $\mathfrak{A}_{\frac{q-1}{2}}$, *aber nicht dieselbe.*

Damit läßt sich nun die im vorigen Paragraphen skizzierte Reduktionstheorie durchführen. Wir denken uns zunächst die Darstellung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, q)$, welche von dem vollen Formensystem zur Dimension $-k$ geliefert wird, in die irreduziblen Bestandteile $\mathfrak{G}_f$ zerlegt:

$$(45)\qquad \mathfrak{S} = e\cdot\mathfrak{E} + x\,\mathfrak{G}_q + y_1\,\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q+1}{2}} + y_2\,\mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q+1}{2}} + w_1\,\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q-1}{2}} + w_2\,\mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q-1}{2}} + \sum_i u_i\,\mathfrak{G}^{(i)}_{q+1} + \sum_i v_i\,\mathfrak{G}^{(i)}_{q-1}.$$

Hierbei sind die verschiedenen $\mathfrak{G}_f$ vom selben Grade durch obere Indizes unterschieden. $\mathfrak{E}$ ist die identische Darstellung, die e, x, y, u, v, w sind die Multiplizitäten. Wir merken gleich an, daß einige Darstellungen bei allen geraden k, andere bei allen ungeraden k fehlen, weil jede Form durch den Operator R_{-1} sich mit $(-1)^k$ multipliziert. Unter anderem hat das zur Folge:

I. k gerade: $y_1 = y_2 = 0$ für $q \equiv 3 \pmod{4}$,
$w_1 = w_2 = 0$ für $q \equiv 1 \pmod{4}$,

II. k ungerade: $e = 0$, $x = 0$,
$y_1 = y_2 = 0$ für $q \equiv 1 \pmod{4}$,
$w_1 = w_2 = 0$ für $q \equiv 3 \pmod{4}$.

Die Aussagen über die verschiedenen $\mathfrak{G}_f$ der Fälle 1 bis 5 formulieren wir nun der Reihe nach in den Sätzen:

Satz 54. $f = q - 1$. *Jedes* $\mathfrak{G}^{(l)}_{q-1}$ *enthält kein* $\mathfrak{A}_1$, *also nur Funktionen vom Teiler* 1. *Für jedes in* $\mathfrak{S}$ *vertretene* $\mathfrak{G}^{(l)}_{q-1}$ *gibt es daher* $q - 1$ *Matrizen* $\Phi_i(s) = \Phi^{(l)}_i(s, \varepsilon_i)$ $(i = 1, \ldots, q-1)$ *vom Grade* v_l, *deren Elemente die Dirichlet-Reihen zu den Funktionen* F_i *aus* $\mathfrak{G}^{(l)}_{q-1}$ *vom Charakter* $\varepsilon_i(n)$ *sind, mit*

$$(46)\qquad \Phi_i(s) = \prod_{p \neq q} (\mathsf{E} - \lambda_i(p)\,p^{-s} + \varepsilon_i(p)\,p^{k-1-2s}\,\mathsf{E})^{-1}.$$

Man erhält die Φ_i *für die verschiedenen* i *aus einer von ihnen, indem man* p^{-s} *durch* $\chi_0(p)\,p^{-s}$ *ersetzt, wobei* $\chi_0(n)$ *ein beliebiger Restcharakter* mod. q *ist.*

In der Tat ist ja nach Satz 36 in § 6 mit $\sum_n a(n)\, z_Q^n$ vom Charakter $\varepsilon(n)$ auch $\sum_n a(n)\, \chi_0(n)\, z_Q^n$ wieder eine Eigenfunktion von R_n und gehört zur selben Darstellung $\mathfrak{G}_{q-1}^{(l)}$ wie jene, und man erhält daher durch den Übergang von $\lambda_i(p)$, $\varepsilon_i(p)$ zu $\lambda_i(p)\,\chi_0(p)$, $\varepsilon_i(p)\,\chi_0(p^2)$ auch eine Matrix Φ. Andererseits hängen nach Satz 48, 49 alle Matrizen Φ_i für die verschiedenen i auch wirklich stets auf diese Art zusammen. Es kommt also ein Charakter $\varepsilon_l(n)$ entweder zweimal vor — wenn nämlich $\varepsilon(-1) = (-1)^k$ — oder garnicht.

Die beiden Matrizen $\Phi(s)$, welche zu den Funktionen mit demselben Charakter $\varepsilon(n)$ gehören, sind ersichtlich die beiden

$$\Phi(s) = \prod_{p \neq q} (\mathsf{E} - \lambda(p)\,\varrho(p)\,p^{-s} + \varepsilon(p)\,p^{k-1-2s}\,\mathsf{E})^{-1},$$

wo $\varrho(n)$ einer der beiden reellen Charaktere mod. q ist (Hauptcharakter oder quadratischer Restcharakter).

Satz 55. $f = q$. *(Also k gerade.) Für die Funktionen zu $\mathfrak{G}_q$ vom Teiler* 1 *gilt die zu Satz* 54 *analoge Aussage über die Matrizen Φ_i* $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$ *vom Grade x. Dagegen bilden die Funktionen vom Teiler q aus $\mathfrak{G}_q$ (welche übrigens ja alle den Charakter $\varepsilon(n) = 1$ haben) erst zusammen mit denen aus $\mathfrak{E}$ ein bei allen Operatoren T_m^q invariantes System vom Range $e + x$. Die zugehörige Matrix Φ vom Grade $e + x$ hat die Gestalt*

$$\Phi(s) = q^{-s}(\mathsf{E} - \lambda(q)\,q^{-s})^{-1} \cdot \Psi(s),$$

worin Ψ von dem Typus (46) *(ohne q-Bestandteil) ist.*

Daß die Funktionen vom Teiler q und Charakter 1 (d. h. die Invarianten von $\Gamma_0(q)$) ein bei allen Operatoren T_m^q invariantes System bilden, folgt aus dem Satz 38. Aus Satz 53 erkennt man, daß solche Funktionen nur bei den Darstellungen $\mathfrak{G}_q$ und $\mathfrak{E}$ vorkommen können.

Die Matrix $\Psi(s)$ zerfällt ersichtlich wegen Satz 48 in zwei Matrizen: $\Psi_0(s)$ vom Grade e und $\Psi_1(s)$ vom Grade x; $\Psi_1(s)$ ist eine der (beiden) im ersten Teil von Satz 55 erwähnten Matrizen zu den Funktionen vom Charakter 1, aber Teiler 1 aus $\mathfrak{G}_q$, während $\Psi_0(s)$ die für die Funktionen der Stufe 1 definierte Matrix ist, in welcher der q-Bestandteil fortgelassen ist.

Eine ausgezeichnete Stellung haben hierbei der Wert $k = 2$, wo bekanntlich $e = 0$ ist, und, wenn man sich auf Spitzenformen beschränkt, auch die Werte $k = 4, 6, 8, 10$, wo ebenfalls $e = 0$ ist.

Satz 56. $f = q + 1$. *Bei den Funktionen aus $\mathfrak{G}_{q+1}^{(l)}$ liefern wieder die vom Teiler* 1 *eine analoge Reihe von $q - 1$ Matrizen $\Phi_i(s)$ wie bei Satz* 54, *vom Grade u_l. Weiter seien in der normierten Darstellung $\mathfrak{G}_{q+1}^{(l)}$*

aus Satz 47 $F_q(\tau)$ und $F_{q+1}(\tau)$ die beiden Funktionen vom Teiler q; sie haben nach Satz 53, 3. verschiedene konjugiert-komplexe Charaktere, etwa $\varepsilon_0(n)$, $\bar{\varepsilon}_0(n)$. Dann sind in der Bezeichnung von Satz 48 (mit $\varkappa = u_l$) die beiden Scharen $(F_i^{(1)}, \ldots, F_i^{(\varkappa)})$ $(i = q, q+1)$ invariant bei allen Operatoren T_m^q, und zu jeder von ihnen gehört nach dem Hauptsatz 39 eine Matrix $\Phi_i(s)$ von der Gestalt

$$\Phi_q(s) = q^{-s}(\mathsf{E} - \lambda_q(q)\,q^{-s})^{-1}\,\Phi_{r_0}(s),$$
$$\Phi_{q+1}(s) = q^{-s}(\mathsf{E} - \lambda_{q+1}(q)\,q^{-s})^{-1}\,\Phi_{r_1}(s).$$

$\Phi_{r_i}(s)$ ist jedesmal eine der beiden zu Anfang erwähnten Matrizen zum Charakter ε_0 bzw. $\bar{\varepsilon}_0$.

Daß jede der beiden Scharen auch bei dem Operator T_q^q in sich übergeht, folgt aus dem Zusatz in Satz 53, 3. Und dieser beruht auf der Kenntnis aller einfachen Charaktere der Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}(q)$. Die Mehrdeutigkeit in der Schlußaussage von Satz 56 stellt wieder ein bemerkenswertes transzendentes Problem von der Art der Vorzeichenbestimmung der Gaußschen Summen.

Hiermit sind alle Darstellungen erster Art von $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ erledigt.

Satz 57. $f = \frac{q \pm 1}{2}$. *Für die beiden Paare von verwandten Darstellungen $\left(\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q-1}{2}}, \mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q-1}{2}}\right)$, $\left(\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q+1}{2}}, \mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q+1}{2}}\right)$, die man im allgemeinen in den Euler-Produkten nicht trennen kann, gelten die Aussagen von Satz* 47a *und* 50a *mit dem Zusatz, daß, wenn $f = \frac{q-1}{2}$, nur Funktionen vom Teiler* 1 *in Frage kommen, daß aber für $f = \frac{q+1}{2}$ die zu den beiden Darstellungen gehörende Schar vom Teiler q durch den Operator T_q^q in sich übergeht.*

§ 13.

Zusammenhänge mit der Theorie der binären Thetareihen und der imaginär-quadratischen Körper $K(\sqrt{-q})$. Charakteristische Eigenschaften der Zetafunktionen dieser Körper.

Bei den Darstellungen zweiter Art sind nun, wenn $q \equiv 3 \pmod 4$, bemerkenswerte Zusammenhänge mit der Theorie der imaginär-quadratischen Zahlkörper und den binären Thetareihen vorhanden. Ich habe sie in einer früheren Arbeit über Dirichlet-Reihen schon in den Grundzügen besprochen [5]).

---

[5]) E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Mathem. Annalen 112 (1936), S. 694.

Die Bestimmung der Darstellung $\mathfrak{S}(k, q)$, d. h. die Berechnung der Multiplizitäten $x, y, u, \ldots$ in (45) ist für Primzahlen q im wesentlichen geleistet, sobald $k \geqq 2$[4]). (Für $k = 1$ treten besondere Schwierigkeiten auf, welche mit dem Riemann-Rochschen Satz zusammenhängen.) Das Ergebnis ist, daß in $\mathfrak{S}$ alle algebraisch-konjugierten irreduziblen Darstellungen dieselbe Vielfachheit haben, insbesondere auch die in Satz 57 genannten Darstellungen, sobald $q \equiv 1 \pmod{4}$. Ist dagegen $q \equiv 3 \pmod{4}$, so haben die beiden verwandten Darstellungen $\mathfrak{G}_f^{(1)}, \mathfrak{G}_f^{(2)}$ $\left(f = \frac{q+1}{2}\right.$ für gerade k, und $f = \frac{q-1}{2}$ für ungerade $\left.k\right)$ nicht die gleiche Vielfachheit, und der Charakter von $\mathfrak{S}$ ist eine nichtreelle Zahl aus $K(\sqrt{-q})$. Daß die konjugierten algebraischen Zahlen in bezug auf das, scheinbar durch rationale Angaben bestimmte algebraische Gebilde $\Gamma(q)$ nicht gleichberechtigt sind, hat seinen Grund darin, daß die einfachen Charaktere von $\mathfrak{M}(q)$ zwar für $q \equiv 1 \pmod{4}$ alle reell sind, nicht aber für $q \equiv 3 \pmod{4}$, wo gerade nur die Charaktere der beiden $\mathfrak{G}_f$ nicht reell sind. Die positiv imaginären Zahlen sind dann durch die Existenz der Modulfunktionen nur in der oberen Halbebene ausgezeichnet.

Die Differenz der Multiplizitäten

$$y_1 - y_2 \text{ für gerade } k; \quad w_1 - w_2 \text{ für ungerade } k$$

erweist sich nun[6]) bis auf den Faktor ± 1 als die Klassenzahl $h = h(\sqrt{-q})$ des Körpers $K(\sqrt{-q})$ und zwar positiv, wenn die Bezeichnung der Indizes 1, 2 so gewählt wird, daß die charakteristischen Wurzeln der Matrix $\mathfrak{G}_f^{(1)}$ in den $C(U)$ die Zahlen ζ^n mit $n =$ quadratischer Rest mod. q (und eventuell noch die Wurzel 1) sind. Es gibt also genau h Funktionen-Systeme zu den $\mathfrak{G}_f^{(1)}$ mehr als zu $\mathfrak{G}_f^{(2)}$.

Andererseits kann man aus binären Thetareihen, in deren Exponenten die binären quadratischen Formen der Diskriminante $-q$ vorkommen, sich genau h Systeme von je f Modulformen zur Darstellung $\mathfrak{G}_f^{(1)}$ bilden. Ihre Dirichlet-Reihen sind in der Theorie von $K(\sqrt{-q})$ bekannt als „*Zetafunktionen mit Größencharakteren*" und besitzen eine Eulersche Produktentwicklung. Die Thetareihen sind daher charakteristische Wurzeln der Matrix $\mathsf{B}(\tau)$, die nach Satz 50a zu diesen Darstellungen $\mathfrak{G}_f^{(1)} + \mathfrak{G}_f^{(2)}$ gehört. Dadurch sind sie also endlich-vieldeutig bestimmt.

---

[6]) E. Hecke, Über das Verhalten der Integrale 1. Gattung ..., Abh. Math. Sem. Hamburg 8 (1931), S. 280. Hier ist die Rechnung für $k = 2$ durchgeführt, vgl. auch H. Spies, Die Darstellung der inhomogenen Modulargruppe mod. q^n ... Mathem. Annalen 111 (1935), S. 346.

Im einzelnen liegen die Verhältnisse so: Die Größencharaktere[7]) der Zahlen μ des Körpers $K(\sqrt{-q})$ sind die Potenzen

$$\lambda^{k-1}(\mu) = \left(\frac{\mu}{|\mu|}\right)^{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

(Die übliche Bezeichnung „$\lambda(\mu)$" wird wohl keine Verwechslung mit den Matrizen $\lambda(n)$ erzeugen). Für Ideale $\mathfrak{a}$ werden in bestimmter Weise damit zusammenhängende Größencharaktere mod. $\sqrt{-q}$ erklärt von der Form

$$\lambda_{k-1}(\mathfrak{a}) \cdot \psi(\mathfrak{a}),$$

wo $\psi(\mathfrak{a})$ ein Klassencharakter mod. $\sqrt{-q}$ ist. Für Hauptideale $\mathfrak{a} = (\mu)$ sind sie von der Gestalt

$$\lambda^{k-1}(\mu) \cdot \psi(\mu)$$

mit einem Restcharakter $\psi(\mu)$ mod. $\sqrt{-q}$ mit $\psi(-1) = (-1)^{k-1}$. Wegen der Multiplikationseigenschaften der $\lambda(\mathfrak{a})$ besteht für $\Re(s) > 1$ die Gleichung

$$(47) \qquad \zeta(s, k-1, \psi) = \sum_{\mathfrak{a}} \lambda_{k-1}(\mathfrak{a}) \cdot \psi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \lambda_{k-1}(\mathfrak{p}) \psi(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}.$$

$\mathfrak{a}$ durchläuft die ganzen Ideale $\neq 0$, $\mathfrak{p}$ die Primideale aus $K(\sqrt{-q})$. Für $k = 1$ und $\psi \equiv 1$ kommt die Dedekindsche Zetafunktion des Körpers heraus, die anderen Funktionen sind ganze Funktionen. Die Funktionalgleichungen aller dieser Funktionen werden bekanntlich durch Zurückgehen auf die Potenzreihen bewiesen, die sich als Modulformen der Art $(-k, q)$ herausstellen. Man bilde nämlich zunächst die Teilsummen der Reihe (47), die durch die Ideale $\mathfrak{a}$ einer (absoluten) Idealklasse, repräsentiert durch das Ideal $\mathfrak{b}_l$ $(l = 1, 2, \ldots, h)$, entstehen. So kommt man auf die Reihen

$$(48) \qquad \zeta(s, \lambda_{k-1}, \psi, \mathfrak{b}_l) = N(\mathfrak{b}_l)^s \cdot \sum_{\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, \mathfrak{b}_l)} \lambda^{k-1}(\mu) \psi(\mu) N(\mu)^{-s} = N(\mathfrak{b}_l)^s \sum_{\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, \mathfrak{b}_l)} \mu^{k-1} \psi(\mu) N(\mu)^{-\left(s + \frac{k-1}{2}\right)}.$$

Die Potenzreihen zu $\zeta\left(s - \frac{k-1}{2}, \lambda_{k-1}, \psi, \mathfrak{b}_l\right)$ sind endlich die binären Thetareihen[8])

$$(49) \qquad \vartheta_k(\tau, \psi, \mathfrak{b}_l) = \sum_{\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, \mathfrak{b}_l)} \mu^{k-1} \psi(\mu) e^{2\pi i \tau \frac{N(\mu)}{Bq}}.$$

---

[7]) E. Hecke, Über eine neue Art von Zetafunktionen ... II. Mathem. Zeitschr. 6 (1920), S. 43.

[8]) E. Hecke, Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Mathem. Annalen 97 (1926), § 3, S. 222.

B ist die Norm von $\mathfrak{b}_l$. Diese Reihen für festes k, l und variables $\psi(\mu)$ bilden ein System von f Modulformen von der Art $(-k, q)$, welches sich nach der Darstellung $\mathfrak{G}_f^{(1)}$ umsetzt. Das Verhalten bei dem Operator $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt dann das System von Funktionalgleichungen für $\zeta(s, \lambda)$. Die Kombinationen

$$\zeta\left(s - \frac{k-1}{2}, \lambda_{k-1}, \psi\right)$$

mit festem k und variablem Bestandteil ψ sind linear äquivalent mit (48) für $s - \frac{k-1}{2}$ und haben eine Eulersche Produktentwicklung von der in § 8 betrachteten Art. Also sind sie nach Satz 42 charakteristische Wurzeln der betreffenden Matrizen $\Phi(s)$. Damit ist bewiesen:

Satz 58. *Für $k \geqq 2$ sind zu der einen Darstellung $\mathfrak{G}_f^{(1)}$ h verschiedene Systeme von je f Eigenfunktionen des Operatorenringes der T_n bzw. der T_m^q vorhanden. Für $k = 1$ sind unter den Funktionen* (49) *dagegen nur $\frac{h+1}{2}$ verschiedene Systeme vorhanden.*

Der letzte Teil folgt daraus, daß bei $k = 1$ eine jede Idealklasse im wesentlichen dieselben Funktionen wie die reziproke Klasse liefert.

Nun werden nach dem allgemeinen Satz 47a die Funktionen von $\mathfrak{G}_f^{(1)}$ durch den Operator T_n in Funktionen von $\mathfrak{G}_f^{(2)}$ übergeführt, falls n quadratischer Nichtrest mod. q ist. Der scheinbare Widerspruch mit der Eigenschaft „Eigenfunktion aller T_n" findet seine Erklärung durch

Satz 59. *Für jede der in Satz* 58 *genannten Eigenfunktionen F gilt*

$$F \mid T_n = 0,$$

wenn n quadratischer Nichtrest mod. q *ist.*

Es genügt, den Satz für Primzahlen $n = p$ zu beweisen. Da folgt er aber aus der Gestalt des p-Bestandteiles in dem Euler-Produkt für die Primideale zweiten Grades durch die Anwendung von Satz 42, § 9.

Bei $k = 1$ sind, wie erwähnt, die fraglichen Anzahlen w_1, w_2 noch nicht bestimmt worden. Immerhin läßt sich hier wenigstens für die Dedekindsche Zetafunktion eine charakteristische Eigenschaft angeben. Ihre Potenzreihe ist charakteristische Wurzel der Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ zu den verwandten Darstellungen $\mathfrak{G}_f^{(1)} + \mathfrak{G}_f^{(2)}$. Ihr konstantes Glied ist von Null verschieden, weil die Dirichlet-Reihe bei $s = 1$ einen Pol hat. Also muß nach § 10 diese Wurzel zu der Schar der Eisenstein-Reihen gehören. Aus meiner allgemeinen Theorie der Eisenstein-Reihen[9]) folgt aber, daß nur

[9]) Vgl. die in [8]) zitierte Arbeit, S. 214.

zur Darstellung $\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q+1}{2}}$, nicht aber zu $\mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q+1}{2}}$ solche Reihen gehören. Und zwar gibt es nur ein einziges System, das zu dieser Darstellung gehört. Also gibt es dafür auch nur eine einzige Eigenfunktion vom Teiler q, und da die Eigenfunktionen vom Teiler 1 bei $\tau = \infty$ offenbar verschwinden müssen, so folgt

Satz 60. *Die Zetafunktion von $K(\sqrt{-q})$ ist die Dirichlet-Reihe derjenigen eindeutig bestimmten Modulform von der Art $(-k, q)$, welche charakteristische Wurzel der Matrizen $\mathsf{B}(\tau)$ zu den Darstellungen $\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q+1}{2}} + \mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q+1}{2}}$ ist und bei $\tau = \infty$ nicht verschwindet.*

Beispiele und Anwendungen der allgemeinen Theorie auf die Theorie der quadratischen Formen von mehr als zwei Variabeln sollen in einer späteren Arbeit behandelt werden.

Hamburg, 20. Januar 1937.

(Eingegangen am 20. 1. 1937.)

Bemerkungen über die Galoissche Gruppe einer Gleichung.

(Aus einem Briefe an Herrn B. L. van der Waerden.)

Von

Michael Bauer in Budapest.

---

1. Herr van der Waerden[1]) hat folgenden Satz bewiesen: Zerfällt das Primideal $\mathfrak{p}$ des algebraischen Zahlkörpers k im Oberkörper $K(k)$ in r Primideale $\mathfrak{P}_\nu$ von den Graden f_ν und mit Exponenten e_ν,

$$(1) \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1}\mathfrak{P}_2^{e_2}\ldots\mathfrak{P}_r^{e_r},$$

so zerfallen die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der definierenden Gleichung gegenüber der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}$ von $\overline{\mathfrak{P}}$ ($\overline{\mathfrak{P}}$ ist ein Primteiler der Primzahl p, $\overline{\mathfrak{P}}\,|\,\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}\,|\,p$ im Galoisschen Körper von $K(k)$) in r Transitivitätsgebiete zu je $e_\nu f_\nu$ Wurzeln, welche gegenüber der Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ in je f_ν Transitivitätsgebiete zu je e_ν Wurzeln zerfallen.

Wenden wir die Tatsache an (welche einen Teil des Wegnerschen[2]) Hilfssatzes bildet), daß aus

$$(2) \qquad (e_\nu, p) = 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

die Relation $\mathfrak{V} = E$ für die Verzweigungsgruppe folgt, dann sehen wir, daß im Falle (2) die Gruppe $\mathfrak{T}$ zyklisch ist und ein Grundelement B besitzt, welches als Permutation der Wurzeln aus f_1 Zyklen der Ordnung $e_1, \ldots, f_r$ Zyklen der Ordnung e_r besteht. Die Ordnung von B ist das kleinste gemeinsame Vielfache $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ der Zahlen e_ν. Der angeführte Satz ist zuerst von Wegner[2]) bewiesen worden, derselbe hat noch weitergehende Sätze gefunden[3]).

2. Ich möchte nun darauf hinweisen, daß die Tatsache: aus $(e_\nu, p) = 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$ folgt $\mathfrak{V} = E$, sehr naturgemäß aus Herbrands Betrachtungen über zusammengesetzte Körper ableitbar ist. Es seien die

---

[1]) Die Zerlegungs- und Trägheitsgruppe als Permutationsgruppen. Math. Annalen 111 (1935), S. 731—733.

[2]) Zur Theorie der affektlosen Gleichungen. Math. Annalen 111 (1935). S. 738—742. Vgl. noch die unter [6]) zitierte Arbeit von Vassiliou. Derselbe hat schon gefunden, daß im Falle $\mathfrak{V} = E$ aus dem in [1]) zitierten Satze der Wegnersche Annalen-Satz folgt.

[3]) Über die Permutationen der Galoisschen Gruppe einer Gleichung. Deutsche Math. 1, S. 186—190.

Körper $K_1(k), K_2(k)$ und der zusammengesetzte Körper $K_1 K_2(k)$ gegeben. Das Primideal $\mathfrak{P}$ des Körpers $K_1 K_2(k)$ teile die Primideale $\mathfrak{P}_1$ bzw. $\mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{p}$ der Körper $K_1(k)$ bzw. $K_2(k)$ bzw. k. Es sollen die Zerlegungen

$$(3) \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{a_1} \ldots, \ \mathfrak{p} = \mathfrak{P}_2^{a_2} \ldots, \ \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}^{a} \ldots, \ \mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{a a_2} \ldots$$

gelten, wo

$$(3^*) \qquad a_1 = a_1^{(0)} p^{m_1}, \quad (a_1^{(0)}, p) = 1, \quad a_2 = a_2^{(0)} p^{m_2}, \quad (a_2^{(0)}, p) = 1,$$
$$a = a^{(0)} p^{m}, \quad (a^{(0)}, p) = 1$$

ausfallen. Es ist dann[4])

$$m_1 \geqq m.$$

Es folgt also aus $(a_1, p) = (a_2, p) = 1$ die Relation $(a a_2, p) = 1$.

Eine unmittelbare Folge ist der Satz: Gelten in $K_1(k)$, bzw. $K_2(k)$ die Primidealzerlegungen

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{p} &= \mathfrak{P}_{11}^{e_{11}} \mathfrak{P}_{12}^{e_{12}} \ldots \mathfrak{P}_{1r}^{e_{1r}}; \quad (e_{1i}, p) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \\ \mathfrak{p} &= \mathfrak{P}_{21}^{e_{21}} \mathfrak{P}_{22}^{e_{22}} \ldots \mathfrak{P}_{2s}^{e_{2s}}; \quad (e_{2j}, k) = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, s), \end{aligned}$$

dann gilt im zusammengesetzten Körper $K_1 K_2(k)$ die Primidealzerlegung

$$(5) \qquad \mathfrak{p} = \overline{\mathfrak{P}}_1^{e_1} \ldots \overline{\mathfrak{P}}_t^{e_t}; \quad (e_l, p) = 1 \quad (l = 1, 2, \ldots, t).$$

Aus diesem Satze folgt die im Punkte 1. angewandte Tatsache.

3. Herr van der Waerden hat von seinem Satze[5]), der schon interessante Anwendungen erfahren hat, seinerseits eine Anwendung auf ganzzahlige Gleichungen gegeben, deren Diskriminanten genau durch die erste Potenz einer Primzahl p teilbar sind. Herr I. Schur hat den folgenden Satz[6]) bewiesen, von welchem er a. a. O. wichtige Anwendungen gemacht hat: Es sei K ein algebraischer Zahlkörper n-ten Grades mit der Diskriminante D. Geht die Primzahl p in D mindestens in der n-ten Potenz auf, so muß die Ordnung g der Galoisschen Gruppe des Körpers durch p teilbar sein.

[4]) Jacques Herbrand, Théorie arithméthique des corps de nombres de degré infini, Math. Annalen **106** (1932), S. 473—501, Formel (3), S. 489. Der kurze Beweis ist unabhängig lesbar. A. a. O. ist ein sehr allgemeiner Satz angegeben, der jedoch nicht in vollem Umfange richtig ist. Vgl. Mikao Moriya, Über einen Satz von Herbrand, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University **4** (1936), S. 182—194. Ich möchte bemerken, daß in der Fußnote[1]) S. 192, die Worte „und $e_1 = 1 = e_2$" zu streichen sind.

[5]) Man kann den Beweis von van der Waerden so modifizieren, daß dabei die Dedekindsche Regel noch mehr benutzt wird.

[6]) Gleichungen ohne Affekt. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1930. Wir erwähnen noch die Arbeit Vassiliou, Über affektlose Gleichungen, Journal für Math. **176**, S. 45—48, Satz 1.

Wir geben einen vereinfachten Beweis an. Es sei p im Körper K in Primideale zerlegt:

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_r^{e_r}.$$

Sind alle e_ν relativ prim gegen p, dann ist D genau durch

$$p^{(e_1-1)f_1+(e_2-1)f_2+\dots+(e_r-1)f_r} = p^{n-(f_1+f_2+\dots+f_r)}$$

teilbar, was der Prämisse widerspricht. Also ist z. B. e_1 teilbar durch p. Da im Galoisschen Körper

$\mathfrak{p}_1 = (\mathfrak{P}\dots)^{a_1}$ ausfällt, ist $p = (\mathfrak{P}\dots)^e$,

wo e teilbar durch p ist, da $\mathfrak{P}$ nur $\mathfrak{p}_1$ teilt; erst recht ist dann g teilbar durch p.

(Eingegangen am 26. 1. 1937.)

Die Gruppe der zentralen Automorphismen einer Gruppe mit Hauptreihe.

Von

Hans Fitting in Königsberg (Pr.).

Einleitung.

Herr Shoda hat die Automorphismengruppe g einer gewöhnlichen, endlichen, abelschen Gruppe $\mathfrak{a}$ nach einer Methode untersucht, bei der die Eigenschaften von g aus denen des zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Automorphismenringes $\mathfrak{o}$ gewonnen werden, und zwar auf Grund des Zusammenhanges, der durch *„Strahlbildung"* zwischen den Unterringen von $\mathfrak{o}$ und gewissen Untergruppen von g hergestellt wird[1]). Die Shodasche Methode baut darauf auf, daß g die Einheitengruppe von $\mathfrak{o}$ ist, und kann in gleicher Weise zum Studium der Einheitengruppe eines beliebigen Ringes benutzt werden[2]). In F_1 [3]) hat der Verfasser gezeigt, daß bei beliebigen Gruppen ein Analogon zum Automorphismenring abelscher Gruppen: der „Automorphismenbereich" definiert werden kann, der in allen wesentlichen Punkten dieselben Eigenschaften besitzt wie der Automorphismenring im abelschen Spezialfall. Es liegt daher nahe, die Shodaschen Überlegungen auf den Automorphismenbereich einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ und seine Einheitengruppe: die Gruppe Z der eigentlichen, zentralen Automorphismen von $\mathfrak{G}$ zu übertragen. Dies soll im folgenden im einzelnen durchgeführt werden, und zwar unter der speziellen Voraussetzung, daß in $\mathfrak{G}$ eine Hauptreihe existiert, d. h. die Doppelkettenbedingung für die Normalteiler gilt. Es wird sich dabei herausstellen, daß die von Herrn Shoda gefundenen Resultate im großen und ganzen auch für die Gruppe Z gelten, die — grob gesprochen — dieselbe Struktur besitzt, wie die volle Automorphismengruppe im abelschen Spezialfall: Sie enthält einen nach aufsteigenden Zentren auflösbaren Normalteiler Z_1, dessen Restklassengruppe Z/Z_1 in das direkte Produkt

[1]) K. Shoda, Über die Automorphismengruppe einer endlichen abelschen Gruppe, Math. Annalen **100** (1928), S. 674—686.

[2]) K. Shoda, Über die Einheitengruppe eines endlichen Ringes, Math. Annalen **102** (1930), S. 273—282.

[3]) Mit F_1 wird die Arbeit: H. Fitting, Die Theorie des Automorphismenringes abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht-kommutativen Gruppen, Math. Annalen **107** (1933), S. 514—542, mit F_2 die Arbeit: H. Fitting, Über den Automorphismenbereich einer Gruppe, Math. Annalen **114** S. 84—98, zitiert.

endlich vieler Gruppen zerfällt, von denen jede mit einer gewissen „allgemeinen, linearen Gruppe mit Koeffizienten aus einem Schiefkörper" (d. h. mit der Einheitengruppe eines vollständigen Matrizenringes über einem i. a. nichtkommutativen Körper) isomorph ist.

Obwohl die eigentlichen, zentralen Automorphismen nur etwas sehr Spezielles sind, kann man bei sehr vielen (insbesondere bei allen auflösbaren) endlichen Gruppen ohne Operatoren aus den Ergebnissen über die Struktur von Z bereits recht weitgehende Einblicke in die Struktur der vollen Automorphismengruppe G gewinnen. Voraussetzung dabei ist, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$, deren Automorphismen man betrachtet, eine Untergruppe $\mathfrak{N}$ enthält, welche 1. charakteristisch ist, 2. alle Elemente von $\mathfrak{G}$ umfaßt, die mit jedem Element aus $\mathfrak{N}$ vertauschbar sind, 3. nach aufsteigenden Zentren auflösbar ist (d. h. in das direkte Produkt ihrer Sylowgruppen zerfällt), so daß die Reihe $\mathfrak{N}_0 = 1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots$, bei der $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i-1}$ das Zentrum von $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_{i-1}$ ist, mit $\mathfrak{N}$ abbricht; die Voraussetzung der Existenz einer solchen Untergruppe ist bei allen auflösbaren, darüber hinaus aber noch bei vielen anderen Gruppen endlicher Ordnung erfüllt. Bezeichnet man mit N_i die Menge aller (eigentlichen!) Automorphismen Θ_i von $\mathfrak{G}$, bei denen das Bild $B\Theta_i$ eines Elements B aus $\mathfrak{N}$ sich von seinem Original B um ein Element aus $\mathfrak{N}_i$ unterscheidet: $(B^{-1} \cdot B\Theta_i \in \mathfrak{N}_i$ für $B \in \mathfrak{N})$, so erhält man eine aufsteigende Reihe $N_0 \subseteqq N_1 \subseteqq N_2 \subseteqq \ldots$ von Normalteilern der vollen Automorphismengruppe G von $\mathfrak{G}$, die mit G abschließt und außerdem die folgende Eigenschaft hat: N_0 ist eine abelsche Gruppe bekannter Struktur, deren Ordnung nur durch solche Primzahlen teilbar ist, die schon in der Ordnung von $\mathfrak{N}_1$ aufgehen (siehe oben) und N_i/N_{i-1} eine gewisse Gruppe (eigentlicher) zentraler Automorphismen von $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_{i-1}$. Diese Resultate, auf die ich erst in einer späteren Arbeit näher eingehen will, lassen erkennen, daß die „zentralen Automorphismen" trotz ihres sehr speziellen Charakters für die Theorie der Automorphismengruppe einer Gruppe von Bedeutung sind.

§ 1.

Die Grundlagen.

In dieser Arbeit bedeutet $\mathfrak{G}$ zunächst eine (kommutative oder nichtkommutative) Gruppe (mit oder ohne Operatoren), in welcher die Existenz einer Hauptreihe, d. h. die Gültigkeit der sogenannten Doppelkettenbedingung für die Normalteiler vorausgesetzt wird, welche besagt, daß in jeder auf- und in jeder absteigenden Reihe

$$\mathfrak{H}_1 \subseteqq \mathfrak{H}_2 \subseteqq \ldots \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{H}_1' \supseteqq \mathfrak{H}_2' \supseteqq \ldots$$

von Normalteilern $\mathfrak{H}_i$ bzw. $\mathfrak{H}_i'$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ von einem gewissen endlichen Index n bzw. n' an nur noch das Gleichheitszeichen gilt.

Unter einem „*Endomorphismus*“ [4]) der Gruppe $\mathfrak{G}$ soll in dieser Arbeit stets eine operatorhomomorphe (eindeutige, relations- und operatortreue) Abbildung dieser Gruppe auf eine ihrer Untergruppen verstanden werden.

Zu mehreren Endomorphismen $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ von $\mathfrak{G}$ kann [im Sinne von F_1 und F_2 (vgl. Fußnote [3]))] immer ein „*Produkt*“ als der aus $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ „zusammengesetzte“ Endomorphismus

$$\Theta_1 \cdot \Theta_2 \cdot \ldots \cdot \Theta_n = \{A \to ((A\Theta_1)\Theta_2)\Theta_3 \ldots\},$$

manchmal auch eine „*Summe* $\Theta_1 + \ldots + \Theta_n$“ definiert werden; das letztere ist der Fall, wenn die Bildgruppen $\mathfrak{G}\Theta_1, \ldots, \mathfrak{G}\Theta_n$ zu je zweien elementweise miteinander vertauschbar sind; unter dieser Voraussetzung soll $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ ein System „*addierbarer*“ Endomorphismen genannt und unter $\Theta_1 + \ldots + \Theta_n$ der Endomorphismus

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_n = \{A \to A\Theta_1 \cdot A\Theta_2 \cdot \ldots \cdot A\Theta_n\}$$

verstanden werden. Bei multiplikativer und additiver Verknüpfung bilden die Endomorphismen von $\mathfrak{G}$ einen „*Bereich*“ [5]), d. h. einen Ring mit beschränkter Addier- und Subtrahierbarkeit.

Von besonderer Bedeutung sind die „*normalen*“ *Endomorphismen* von $\mathfrak{G}$, welche dadurch ausgezeichnet sind, daß sie mit allen „Transformationen“ (inneren Automorphismen) $\mathsf{T}(B) = \{A \to B^{-1} \cdot A \cdot B\}$ vertauschbar sind, also der Gleichung $(B^{-1} \cdot A \cdot B)\Theta = B^{-1} \cdot A\Theta \cdot B$ genügen, wo A und B beliebige Elemente aus $\mathfrak{G}$ bedeuten. Sie können offenbar auch als diejenigen Endomorphismen von $\mathfrak{G}$ charakterisiert werden, die auch nach Hinzunahme der Transformationen $\mathsf{T}(B)$ zum Operatorensystem von $\mathfrak{G}$ noch operatortreu bleiben. Hieraus folgt sofort, daß die normalen Endomorphismen ebenfalls einen Bereich bilden, den ich den „*Endomorphismenbereich*“ von $\mathfrak{G}$ nennen und mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen will. Von den in F_1 und F_2 (vgl. Fußnote [3])) gewonnenen Resultaten über den Bereich $\mathfrak{A}$ werde ich in der vorliegenden Arbeit vor allem die folgenden Tatsachen benutzen:

I. *Zu jeder direkten Produktzerlegung von* $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_h$$

---

[4]) Einem von Herrn van der Waerden gemachten Vorschlag folgend, möchte ich das, was ich in früheren Arbeiten, z. B. auch in F_1 und F_2 Automorphismus genannt habe, von jetzt ab „*Endomorphismus*“ nennen, um dem Wort „Automorphismus“ wieder seine ursprüngliche, spezielle Bedeutung zurückzugeben, in der es von den meisten Gruppentheoretikern gebraucht wird.

[5]) Betreffs der Definition des Begriffes „*Bereich*“ vergleiche man die Einleitung von F_2 [siehe Fußnote [3])].

gehört ein System addierbarer Elemente $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_h$ *aus* $\mathfrak{A}$, *die der „Vollständigkeitsrelation“*

$$\mathsf{P}_1 = \mathsf{H}_1 + \ldots + \mathsf{H}_h \text{ [6])}$$

und den „Orthogonalitätsrelationen“

$$\mathsf{H}_\mu \mathsf{H}_\nu = \begin{matrix} \mathsf{P}_0 & \text{für} & \mu \neq \nu \text{ [6])} \\ \mathsf{H}_\mu & \text{für} & \mu = \nu \end{matrix}$$

*genügen, die also ein „**vollständiges Orthogonalsystem**“ bilden.* H_μ *ist dabei die Abbildung* $\mathsf{H}_\mu = \{A \to A_\mu\}$, *die entsteht, wenn jedem Element* A *aus* $\mathfrak{G}$ *seine* $\mathfrak{F}_\mu$*-Komponente* A_μ *zugeordnet wird. — Umgekehrt gehört zu jedem System addierbarer Elemente* $\mathsf{H}'_1, \ldots, \mathsf{H}'_{h'}$ *von* $\mathfrak{A}$, *die ein vollständiges Orthogonalsystem bilden, d. h. den Relationen* $\mathsf{H}'_1 + \ldots + \mathsf{H}'_{h'} = \mathsf{P}_1$, $\mathsf{H}'_\mu \mathsf{H}'_\nu = \begin{matrix} \mathsf{P}_0 & \textit{für} & \mu \neq \nu \\ \mathsf{H}'_\mu & \textit{für} & \mu = \nu \end{matrix}$ *genügen, eine direkte Produktzerlegung*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}'_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}'_{h'}$$

von $\mathfrak{G}$, *die man erhält, wenn* $\mathfrak{F}'_i = \mathfrak{G}\,\mathsf{H}'_i$ *gesetzt wird* (vgl. F_1, § 12 oder die besonders ausführliche Darstellung in der Arbeit: H. Fitting, Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe, Math. Zeitschr. **41**, S. 386—395, § 2, Hilfssatz 1).

II. *Die Menge* $\mathfrak{K}$ *aller Elemente des Bereichs* $\mathfrak{A}$, *die zu **jedem** Element von* $\mathfrak{A}$ *addierbar sind, ist Unterring und zugleich zweiseitiges Ideal*[7]) *von* $\mathfrak{A}$. *Sie besteht aus allen Endomorphismen von* $\mathfrak{G}$, *welche die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *auf eine Untergruppe ihres Zentrums* (d. h. „ins Zentrum“) *abbilden.* $\mathfrak{K}$ *ist sogar der maximale Unterring von* $\mathfrak{A}$, *welcher alle Unterringe von* $\mathfrak{A}$ *umfaßt* (vgl. F_2, §§ 1, 2). In Übereinstimmung mit F_1, § 10 will ich $\mathfrak{K}$ den „*Kern*“ des Bereichs $\mathfrak{A}$ nennen.

III. *Der Bereich* $\mathfrak{A}$ *enthält ein Ideal* $\mathfrak{C}$, *welches einerseits alle nilpotenten*[8]) *Ideale von* $\mathfrak{A}$ *umfaßt, andererseits selber nilpotent ist. Dieses Ideal* $\mathfrak{C}$ (das „***Radikal***“ von $\mathfrak{A}$) *ist Teilmenge, also auch ein Unterring des Kernes* $\mathfrak{K}$ *und zugleich das maximale nilpotente Ideal* (*Radikal*) *von* $\mathfrak{K}$

---

[6]) Mit P_1 wird in der ganzen Arbeit der identische Automorphismus $\{A \to A\}$ (bei dem jedes $A \in \mathfrak{G}$ sich selber entspricht) und mit P_0 der „Nullendomorphismus“ $\{A \to E\}$ (durch den jedes A aus $\mathfrak{G}$ aufs Einheitselement E abgebildet wird) bezeichnet.

[7]) „*Ideal*“ heißt jedes Teilsystem eines Bereichs, das mit einem Element a und einem zu a addierbaren Element b bzw. einem von a subtrahierbaren Element c stets auch die Summe $a + b$ und die Differenz $a - c$ und außerdem alle Produkte $r\,a$ bzw. $a\,r$ enthält, wenn r alle Elemente des Bereichs durchläuft. Genau wie in Ringen werden die Ideale eines Bereichs in links-, rechts- und zweiseitige eingeteilt.

[8]) Eine beliebige Teilmenge eines Bereichs heißt „*nilpotent*“, wenn für ein hinreichend großes s jedes Produkt aus s Elementen der betreffenden Menge verschwindet.

(F_2, § 4). *Von einer Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Faktoren* $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_l$ *ausgehend, lassen sich die Elemente* Γ *von* $\mathfrak{C}$ *unter Benutzung des vollständigen Orthogonalsystems* $(\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_l)$, *das im Sinne des Satzes* I *zu der Zerlegung*

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2 \times \ldots \times \mathfrak{U}_l \qquad (\mathfrak{U}_i \text{ direkt-unzerlegbar})$$

gehört, wie folgt charakterisieren: Γ ist stets dann und nur dann Element von $\mathfrak{C}$, *wenn die Zuordnung*

$$J_{\mu\nu} = \{A_\mu \to A_\mu \mathsf{H}_\mu \Gamma \mathsf{H}_\nu\}$$

bei der A_μ *alle Elemente aus* $\mathfrak{U}_\mu$ ***durchläuft**, für* $\mu = 1, \ldots, l$, $\nu = 1, \ldots, l$ *niemals eine* *o p e r a t o r i s o m o r p h e* (d. h. *umkehrbar* eindeutige, relations- und operatortreue) *Abbildung von* $\mathfrak{U}_\mu$ *auf ganz* $\mathfrak{U}_\nu$ *ist*, wenn also $J_{\mu\nu}$ für $\mu = 1, \ldots, l$, $\nu = 1, \ldots, l$ stets ein „*uneigentlicher*" $\{\mathfrak{U}_\mu \to \mathfrak{U}_\nu\}$-Isomorphismus ist[9]) ($F_1$, § 16, Satz 11).

IV. *Das Radikal* $\mathfrak{C}$ *ist im Bereich* $\mathfrak{A}$ *und daher auch im Kern* $\mathfrak{K}$ *zweiseitiges Ideal. Der Restklassenring* $\mathfrak{K}/\mathfrak{C}$ *ist vollständig reduzibel*, d. h. direkte Summe endlich vieler einfacher Linksideale. *Ist t die Anzahl der (maximalen) Klassen untereinander isomorpher Gruppen, in welche die abelschen Faktoren der Zerlegung* (α) *zerfallen,* $\mathfrak{U}_{r_1}, \ldots, \mathfrak{U}_{r_t}$ *ein vollständiges Repräsentantensystem für diese Klassen* (so daß jedes abelsche $\mathfrak{U}_i$ mit genau einem $\mathfrak{U}_{r_\lambda}$ isomorph ist) *und ist schließlich* g_λ *die Anzahl der* $\mathfrak{U}_i$, *die in der durch* $\mathfrak{U}_{r_\lambda}$ *repräsentierten Klasse vorkommen* (d. h. die Anzahl der mit $\mathfrak{U}_{r_\lambda}$ isomorphen $\mathfrak{U}_i$), *so ist* $\mathfrak{K}/\mathfrak{C}$ *direkte Summe aus genau t einfachen Ringen* $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_t$, *von denen* $\mathfrak{R}_\lambda$ *mit dem Ring aller* g_λ*-reihigen, quadratischen Matrizen mit Koeffizienten aus dem Restklassenring* $\mathfrak{A}_\lambda/\mathfrak{C}_\lambda$ *isomorph ist, wo* $\mathfrak{A}_\lambda$ *den „Endomorphismenring" von* $\mathfrak{U}_{r_\lambda}$ *und* $\mathfrak{C}_\lambda$ *das Radikal dieses Ringes bedeutet* (F_2, § 5). *Nach* F_1, § 14, *Satz* 8 *ist* $\mathfrak{A}_\lambda/\mathfrak{C}_\lambda$ *ein Schiefkörper.*

Zur Vereinfachung der Darstellung beweise ich gleich an dieser Stelle den in dieser Arbeit häufig zur Anwendung kommenden

H i l f s s a t z 1: Es sei

$$(\beta) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{F}_1$$

diejenige direkte Produktzerlegung von $\mathfrak{G}$, die aus einer Darstellung

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2 \times \ldots \times \mathfrak{U}_l$$

von $\mathfrak{G}$ als direktes Produkt direkt-unzerlegbarer Faktoren $\mathfrak{U}_i$ entsteht, wenn in der letzteren alle abelschen $\mathfrak{U}_i$ zu einem Faktor $\mathfrak{F}_0$, alle nicht-abelschen $\mathfrak{U}_i$ zu einem Faktor $\mathfrak{F}_1$ zusammengefaßt werden. Zu (β) möge im Sinne des Satzes I das vollständige Orthogonalsystem $(\mathsf{H}_0, \mathsf{H}_1)$ gehören.

[9]) Der Begriff „*uneigentlicher Isomorphismus*" ist im Sinne von F_1, § 2 zu verstehen.

Gilt für ein Element K des Ringes $\mathfrak{K}$ $\mathsf{H}_0\mathsf{K}\mathsf{H}_0 = \mathsf{P}_0$, so ist K im Radikal $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{K}$ enthalten.

Beweis: $(\mathsf{H}_1^*, \mathsf{H}_2^*, \ldots, \mathsf{H}_l^*)$ sei das im Sinne von Satz I zu (α) gehörige vollständige Orthogonalsystem und $J_{\mu\nu}$ die durch die Zuordnungsvorschrift $J_{\mu\nu} = \{A\,\mathsf{H}_\mu^* \to (A\,\mathsf{H}_\mu^*)\,\mathsf{H}_\mu^*\,\mathsf{K}\,\mathsf{H}_\nu^*\}$ definierte operatorhomomorphe Abbildung von $\mathfrak{U}_\mu$ auf eine Untergruppe von $\mathfrak{U}_\nu$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß gerade die k ersten $\mathfrak{U}_i$, d. h. $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_k$ nicht kommutativ, die $(l-k)$ letzten $\mathfrak{U}_{k+1}, \mathfrak{U}_{k+2}, \ldots, \mathfrak{U}_l$ dagegen kommutativ seien. Es ist dann $\mathsf{H}_{k+1}^* + \ldots + \mathsf{H}_l^* = \mathsf{H}_0$ und darum

(1) $\quad \mathsf{P}_0 = \mathsf{H}_\mu^*\,\mathsf{P}_0\,\mathsf{H}_\nu^* = \mathsf{H}_\mu^*\,\mathsf{H}_0\,\mathsf{K}\,\mathsf{H}_0\,\mathsf{H}_\nu^* = \mathsf{H}_\mu^*\,\mathsf{K}\,\mathsf{H}_\nu^*$ für $\mu > k,\ \nu > k$.

Im Falle $\mu > k,\ \nu > k$ ist wegen (1) $J_{\mu\nu}$ sicherlich keine operatorisomorphe Abbildung von $\mathfrak{U}_\mu$ auf ganz $\mathfrak{U}_\nu$, weil bei $J_{\mu\nu}$ das Bild von $\mathfrak{U}_\mu$ nur aus dem Einheitselement besteht. Im Falle $\nu \leqq k$ ist $J_{\mu\nu}$ ebenfalls keine operatorisomorphe Abbildung von $\mathfrak{U}_\mu$ auf ganz $\mathfrak{U}_\nu$, weil $\mathfrak{U}_\mu$ durch $J_{\mu\nu}$ offensichtlich auf eine Untergruppe des Zentrums, also auf eine *echte* Untergruppe von $\mathfrak{U}_\nu$ abgebildet wird. Schließlich kann aber auch im Falle $\mu \leqq k,\ \nu > k$ keine operatorisomorphe Abbildung von $\mathfrak{U}_\mu$ auf ganz $\mathfrak{U}_\nu$ sein, da sonst das abelsche $\mathfrak{U}_\nu$ mit dem nichtabelschen $\mathfrak{U}_\mu$ isomorph sein müßte, was nicht möglich ist. Nach Satz III ist daher K in der Tat ein Element von $\mathfrak{C}$.

§ 2.

Die Gruppe der zentralen Automorphismen von $\mathfrak{G}$.

Ein Endomorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt „*Automorphismus*". wenn er $\mathfrak{G}$ *umkehrbar eindeutig* auf *ganz* $\mathfrak{G}$ abbildet (vgl. Fußnote [4])).

In dieser Arbeit soll die Betrachtung auf die „*normalen*", d. h. auf die mit allen Transformationen $\mathsf{T}(B) = \{A \to B^{-1}\cdot A\cdot B\}$ vertauschbaren (der Nebenbedingung $(B^{-1}\cdot A\cdot B)\Theta = B^{-1}\cdot A\Theta\cdot B$ genügenden) Automorphismen beschränkt bleiben. Für diese gilt zunächst

Satz 1: *Ein Automorphismus Θ von $\mathfrak{G}$ ist stets dann und nur dann normal, wenn er „zentral" ist*, d. h., wenn $A^{-1}\cdot A\Theta$ für alle $A \in \mathfrak{G}$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$ enthalten ist.

Beweis: 1. Ist Θ zentral, so ist $B^{-1}\cdot B\Theta$ mit jedem Element von $\mathfrak{G}$, insbesondere auch mit $A\Theta$ vertauschbar. Es ist also

$$A\Theta\cdot\underbrace{B^{-1}\cdot B\Theta} = \underbrace{B^{-1}\cdot B\Theta}\cdot A\Theta$$

und folglich

$$B\cdot A\Theta\cdot B^{-1} = (B\Theta)\cdot A\Theta\cdot(B\Theta)^{-1} = B\Theta\cdot A\Theta\cdot B^{-1}\Theta = (B\cdot A\cdot B^{-1})\Theta.$$

2. Ist Θ normal, so gilt

$$(B\Theta)\cdot A\Theta\cdot(B\Theta)^{-1} = B\Theta\cdot A\Theta\cdot B^{-1}\Theta = (B\cdot A\cdot B^{-1})\Theta = B\cdot A\Theta\cdot B^{-1},$$

also auch

$$\underbrace{B^{-1}\cdot B\Theta}\cdot A\Theta = A\Theta\cdot\underbrace{B^{-1}\cdot B\Theta},$$

woraus folgt, daß $B^{-1}\cdot B\Theta$ mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist, da Θ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ sein sollte und daher $A\Theta$ mit A alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft.

Satz 2: *Jeder normale (zentrale) Automorphismus Θ von $\mathfrak{G}$ ist als Summe von der Gestalt $\mathsf{K}+\mathsf{P}_1$ darstellbar, wo K einen zum Kern $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{A}$ gehörigen Endomorphismus bedeutet.*

Beweis: Nach Satz 1 ist $A^{-1}\cdot A\Theta$ mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar. Folglich ist die Zuordnung $\mathsf{K} = \{A \to A^{-1}\cdot A\Theta\}$ wegen

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A\Theta}\cdot B^{-1}\cdot B\Theta = B^{-1}\cdot\underbrace{A^{-1}\cdot A\Theta}\cdot B\Theta = (A\cdot B)^{-1}\cdot(A\cdot B)\Theta$$

ein Endomorphismus, der die Gruppe $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe ihres Zentrums abbildet und daher zu $\mathfrak{K}$ gehört. Schließlich ist K offensichtlich zum identischen Automorphismus P_1 addierbar und die Summe $\mathsf{K}+\mathsf{P}_1$ gleich Θ.

Bei multiplikativer Verknüpfung bilden die zentralen (normalen) Automorphismen von $\mathfrak{G}$ eine Gruppe Z. Sie ist mit der Einheitengruppe des in § 1 definierten Endomorphismenbereichs $\mathfrak{A}$ isomorph. Wir untersuchen ihre Struktur, indem wir in ihr eine absteigende Kette von Normalteilern

$$Z = Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots$$

einführen und die Restklassengruppen Z_i/Z_{i+1} betrachten.

Bei der Definition der Gruppen Z_i knüpfe ich an einen auf Herrn Shoda zurückgehenden Begriff an[10]). Ist $\mathfrak{B}$ irgendein nur aus nilpotenten Elementen bestehender Unterring des Bereichs $\mathfrak{A}$, so soll unter dem „*von $\mathfrak{B}$ erzeugten Strahl*“ $\mathfrak{B}+\mathsf{P}_1$ die Menge aller Summen $\Psi+\mathsf{P}_1$ mit $\Psi\in\mathfrak{B}$ verstanden werden. Da $\mathfrak{B}$ Ring sein soll, ist $\mathfrak{B}$ nach § 1, II im Kern von $\mathfrak{A}$ enthalten und daher jedes Ψ aus $\mathfrak{B}$ zum identischen Automorphismus P_1 addierbar. *Der Strahl $\mathfrak{B}+\mathsf{P}_1$ ist eine Untergruppe von Z*; denn es ist

$$1.\quad (\Psi_1+\mathsf{P}_1)(\Psi_2+\mathsf{P}_1) = \underbrace{\Psi_1\Psi_2+\Psi_1+\Psi_2}+\mathsf{P}_1 = \Psi_3+\mathsf{P}_1$$

$$2.\quad (\Psi+\mathsf{P}_1)\cdot[\underbrace{(-\Psi)^{n-1}+(-\Psi)^{n-2}+\dots+(-\Psi)}+\mathsf{P}_1]$$
$$= (\Psi+\mathsf{P}_1)(\Psi'+\mathsf{P}_1) = (-\Psi)^n+\mathsf{P}_1,$$

für ein hinreichend großes n also gleich P_1.

Dies vorausgeschickt, definiere ich die Gruppe Z_i für $i>0$ als den von $\mathfrak{C}^i$ erzeugten Strahl, wo $\mathfrak{C}^i$ die i-te Potenz des Radikals von $\mathfrak{A}$ bedeutet; eine solche Definition ist möglich, weil $\mathfrak{C}$, also auch $\mathfrak{C}^i$, nach § 1, III.

---

[10]) a. a. O. [siehe Fußnote [1])] § 3, S. 682—684. Eine Definition des „Strahlbegriffs“ findet sich auch in der Einleitung der in Fußnote [2]) angegebenen Arbeit.

Unterring von $\mathfrak{R}$ ist und außerdem nur aus nilpotenten Elementen besteht. Der Einfachheit halber werde $Z = Z_0$ gesetzt.

Satz 3: *Die Gruppen Z_i sind Normalteiler der vollen Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$, die in der Beziehung*

$$Z = Z_0 \supseteqq Z_1 \supseteqq Z_2 \supseteqq \ldots$$

zueinander stehen.

Beweis: Daß Z_i in Z_{i-1} als Untergruppe enthalten ist, läßt sich auf den ersten Blick übersehen. Zu beweisen bleibt also nur, daß die Z_i Normalteiler der *vollen* Automorphismengruppe sind. Es sei Ξ irgendein Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}$. Mit Θ ist dann auch $\Xi^{-1}\Theta\Xi$ immer ein normaler Endomorphismus von $\mathfrak{G}$, was aus

$$\begin{aligned}(B^{-1}\cdot A\cdot B)\Xi^{-1}\Theta\Xi &= (B^{-1}\Xi^{-1}\cdot A\Xi^{-1}\cdot B\Xi^{-1})\Theta\Xi \\ &= (B^{-1}\Xi^{-1}\cdot A\Xi^{-1}\Theta\cdot B\Xi^{-1})\Xi = B^{-1}\cdot A\Xi^{-1}\Theta\Xi\cdot B\end{aligned}$$

folgt. Die Zuordnung $\Theta \rightleftarrows \Xi^{-1}\Theta\cdot\Xi$ liefert daher eine umkehrbar eindeutige, relationstreue Abbildung des Bereichs $\mathfrak{A}$ auf sich selbst, bei der natürlich die Einheitengruppe Z, die Potenzen des Radikals, also auch die von diesen Potenzen erzeugten Strahlen sich selber entsprechen müssen.

Satz 4a: *Für $k > 0$ ist $Z_k/Z_{k+1} = (\mathfrak{C}^k + \mathsf{P}_1)/(\mathfrak{C}^{k+1} + \mathsf{P}_1)$ kommutativ und mit der Restklassengruppe $\mathfrak{C}^k/\mathfrak{C}^{k+1}$ isomorph, falls in der letzteren nur die Addition als Verknüpfung berücksichtigt wird:*

$$Z_k/Z_{k+1} = \underbrace{(\mathfrak{C}^k + \mathsf{P}_1)/(\mathfrak{C}^{k+1} + \mathsf{P}_1)}_{\text{multiplikativ}} \cong \underbrace{\mathfrak{C}^k/\mathfrak{C}^{k+1}}_{\text{additiv}}.$$

Beweis: Man ordne jeder Summe $\Delta + \mathsf{P}_1$ mit $\Delta \in \mathfrak{C}^k$ die von Δ modulo $\mathfrak{C}^{k+1}$ erzeugte Restklasse $\overline{\Delta}$ zu: $(\Delta + \mathsf{P}_1 \to \overline{\Delta})$. Hierdurch entsteht offensichtlich eine eindeutige Abbildung des Strahls $\mathfrak{C}^k + \mathsf{P}_1 = Z_k$ auf die additive Restklassengruppe $\mathfrak{C}^k/\mathfrak{C}^{k+1}$. Diese Abbildung ist relationstreu, also ein Homomorphismus, weil dem Produkt zweier Elemente $\Delta_1 + \mathsf{P}_1$, $\Delta_2 + \mathsf{P}_1$ aus $\mathfrak{C}^k + \mathsf{P}_1$, d. h. dem Element

$$(\Delta_1 + \mathsf{P}_1)(\Delta_2 + \mathsf{P}_1) = \underbrace{\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1 + \Delta_2}_{} + \mathsf{P}_1 = \Delta_3 + \mathsf{P}_1$$

wegen $\Delta_1\Delta_2 \in \mathfrak{C}^{2k} \subseteq \mathfrak{C}^{k+1}$ die Summe der beiden Restklassen $\overline{\Delta}_1$, $\overline{\Delta}_2$ $(\overline{\Delta}_1 + \overline{\Delta}_2 = \overline{\Delta}_3)$ zugewiesen ist. Das Einheitselement von $\mathfrak{C}^k/\mathfrak{C}^{k+1}$ (die Restklasse $\overline{\mathsf{P}}_0$) ist bei der Abbildung $\Delta + \mathsf{P}_1 \to \overline{\Delta}$ den Elementen des Strahls $Z_{k+1} = \mathfrak{C}^{k+1} + \mathsf{P}_1$ und nur diesen zugeordnet. Nach dem Homomorphiesatz wird folglich Z_k/Z_{k+1} in der Tat zur additiven Restklassengruppe $\mathfrak{C}^k/\mathfrak{C}^{k+1}$ isomorph.

Aus dem Beweis des Satzes 4a folgt unmittelbar der allgemeinere

Satz 4b: *Es ist sogar $Z_{2^i}/Z_{2^{i+1}}$ mit $\mathfrak{C}^{2^i}/\mathfrak{C}^{2^{i+1}}$ isomorph, wenn in $\mathfrak{C}^{2^i}/\mathfrak{C}^{2^{i+1}}$ wieder nur die Addition als Verknüpfung berücksichtigt wird.*

Satz 4c· *Für $k > 0$ ist Z_k/Z_{k+1} im Zentrum der Gruppe Z_1/Z_{k+1} enthalten. Die Gruppe Z_1 ist daher nach aufsteigenden Zentren auflösbar*[11], *also das direkte Produkt ihrer Sylowkomponenten, falls sie nur endlich viele Elemente umfaßt.*

Beweis: Es sei $\varDelta + \mathsf{P}_1$ irgendein Element aus $Z_k = \mathfrak{C}^k + \mathsf{P}_1$, und $\varGamma + \mathsf{P}_1$ irgendein Element aus $Z_1 = \mathfrak{C} + \mathsf{P}_1$. Es ist dann

$$(\varDelta + \mathsf{P}_1)(\varGamma + \mathsf{P}_1) = \varDelta\varGamma + \varDelta + \varGamma + \mathsf{P}_1,$$
$$(\varGamma + \mathsf{P}_1)(\varDelta + \mathsf{P}_1) = \varGamma\varDelta + \varGamma + \varDelta + \mathsf{P}_1$$

oder, wenn $(\varDelta + \varGamma + \mathsf{P}_1)^{-1} = \Theta$ gesetzt wird,

$$(\varDelta + \mathsf{P}_1)(\varGamma + \mathsf{P}_1)\Theta = \varDelta\varGamma\Theta + \mathsf{P}_1,$$
$$(\varGamma + \mathsf{P}_1)(\varDelta + \mathsf{P}_1)\Theta = \varGamma\varDelta\Theta + \mathsf{P}_1.$$

Nun ist $\varDelta\varGamma\Theta \in \mathfrak{C}^{k+1}$ und $\varGamma\varDelta\Theta \in \mathfrak{C}^{k+1}$; die beiden Produkte $(\varDelta + \mathsf{P}_1)(\varGamma + \mathsf{P}_1)\Theta$ und $(\varGamma + \mathsf{P}_1)(\varDelta + \mathsf{P}_1)\Theta$ liegen daher modulo $Z_{k+1} = \mathfrak{C}^{k+1} + \mathsf{P}_1$ in derselben Restklasse. Das gleiche muß dann aber auch von den beiden Produkten $(\varDelta + \mathsf{P}_1)(\varGamma + \mathsf{P}_1)$ und $(\varGamma + \mathsf{P}_1)(\varDelta + \mathsf{P}_1)$ gelten, woraus die Behauptung unmittelbar hervorgeht.

Satz 5: *Z_0/Z_1 ist mit der Einheitengruppe des Restklassenringes $\mathfrak{R}/\mathfrak{C}$ isomorph. Nach* § 1, IV *ist also Z_0/Z_1 das direkte Produkt von genau t Gruppen $G_1, G_2, \ldots, G_t$, von denen G_λ mit der „allgemeinen linearen Gruppe"*[12] *$GL(g_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda/\mathfrak{C}_\lambda)$ isomorph ist.* Die in diesem Satz benutzten Bezeichnungen haben dieselbe Bedeutung wie in § 1, IV.

Beweis: Um Satz 5 zu beweisen, greife ich auf das in § 1, Hilfssatz 1 eingeführte vollständige Orthogonalsystem $(\mathsf{H}_0, \mathsf{H}_1)$ zurück, für das die Gleichungen

(1a) $$\mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_1 = \mathsf{P}_1$$

und

(1b) $$\mathsf{H}_0\mathsf{H}_1 = \mathsf{H}_1\mathsf{H}_0 = \mathsf{P}_0, \quad \mathsf{H}_0^2 = \mathsf{H}_0, \quad \mathsf{H}_1^2 = \mathsf{H}_1$$

gelten.

Nach Satz 2 ist jeder zentrale Automorphismus Θ von $\mathfrak{G}$ als Summe von der Gestalt $\Theta = \mathsf{K}' + \mathsf{P}_1$, also auch als Summe von der Gestalt

(2) $$\Theta = \mathsf{K}' + \mathsf{P}_1 = \underbrace{\mathsf{K}' + \mathsf{H}_0} + \mathsf{H}_1 = \mathsf{K} + \mathsf{H}_1$$

darstellbar, wo K' und K Elemente aus $\mathfrak{R}$ bedeuten.

---

[11]) Eine Gruppe L heißt „nach aufsteigenden Zentren auflösbar", wenn in der Reihe $L_0 = 1, L_1, L_2, \ldots$, wo L_i/L_{i-1} das Zentrum von L/L_{i-1} ist, ein L_r mit endlichem Index r gleich L ist.

[12]) Über das Symbol $GL(n, K)$ und über den Begriff einer „allgemeinen linearen Gruppe" orientiere man sich etwa in dem Buch von v. d. Waerden: Gruppen von linearen Transformationen (Erg. d. Math. Bd. 4, Heft 2, § 2).

Hiervon ausgehend, ordne man jedem normalen Automorphismus Θ diejenige Restklasse $\overline{\mathsf{K}}$ modulo $\mathfrak{C}$ zu, die von dem der Gleichung (2) genügenden Element K des Ringes $\mathfrak{K}$ erzeugt wird. Man erhält so die Abbildung

$$(3) \qquad \Theta \to \overline{\mathsf{K}}.$$

Bei (3) *entspricht jedem zentralen Automorphismus* Θ *von* $\mathfrak{G}$ *eine Einheit des Restklassenringes* $\mathfrak{K}/\mathfrak{C}$. Denn, ist etwa

$$\Theta = \mathsf{K} + \mathsf{H}_1, \quad \Theta^{-1} = \mathsf{K}^* + \mathsf{H}_1,$$

so gilt

$$\mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_1 = \mathsf{P}_1 = \Theta\Theta^{-1} = (\mathsf{K} + \mathsf{H}_1)(\mathsf{K}^* + \mathsf{H}_1)$$
$$= \mathsf{K}\,\mathsf{K}^* + \mathsf{K}\,\mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_1\mathsf{K}^* + \mathsf{H}_1,$$

also

$$\mathsf{H}_0 = \mathsf{K}\,\mathsf{K}^* + \mathsf{H}_1\mathsf{K}^* + \mathsf{K}\,\mathsf{H}_1.$$

Wegen

$$\mathsf{H}_0 \cdot \mathsf{K}\,\mathsf{H}_1 \cdot \mathsf{H}_0 = \mathsf{H}_0 \cdot \mathsf{H}_1\mathsf{K}^* \cdot \mathsf{H}_0 = \mathsf{P}_0$$

ist nach Hilfssatz 1 (§ 1)

$$\mathsf{K}\,\mathsf{H}_1 \equiv \mathsf{H}_1\mathsf{K}^* \equiv \mathsf{P}_0 \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{C})$$

und darum

$$\mathsf{H}_0 \equiv \mathsf{K}\,\mathsf{K}^* \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{C}),$$

woraus hervorgeht, daß $\overline{\mathsf{K}}$ in der Tat eine Einheit des Restklassenringes $\mathfrak{K}/\mathfrak{C}$ sein muß, da die von H_0 modulo $\mathfrak{C}$ erzeugte Restklasse $\overline{\mathsf{H}_0}$ das Einselement von $\mathfrak{K}/\mathfrak{C}$ ist.

Umgekehrt gibt es zu jeder Einheit $\mathfrak{E}$ *des Restklassenringes* $\mathfrak{K}/\mathfrak{C}$ *mindestens einen zentralen Automorphismus* Π *von* $\mathfrak{G}$, *dem bei der Zuordnung* (3) $\mathfrak{E}$ *zugeordnet ist;* man erhält ein solches Π, wenn man aus $\mathfrak{E}$ irgendeinen Repräsentanten Λ herausgreift und $\Pi = \Lambda + \mathsf{H}_1$ setzt. Um dies zu beweisen, hat man nur zu zeigen, daß dieses Π ein zentraler Automorphismus von $\mathfrak{G}$ ist. Zu diesem Zwecke werde aus $\mathfrak{E}^{-1}$ irgendein Repräsentant Λ^* ausgewählt. Es gilt dann $\Lambda\Lambda^* = \mathsf{H}_0 + \Gamma$ mit $\Gamma \in \mathfrak{C}$, also

$$(\Lambda + \mathsf{H}_1)(\Lambda^* + \mathsf{H}_1) = \Lambda\Lambda^* + \Lambda\,\mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_1\Lambda^* + \mathsf{H}_1$$
$$= \mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_1 + \Gamma + \mathsf{H}_1\Lambda^* + \Lambda\,\mathsf{H}_1 = \mathsf{P}_1 + \underbrace{\Gamma + \mathsf{H}_1\Lambda^* + \Lambda\,\mathsf{H}_1}.$$

Nun ist nach § 1, Hilfssatz 1, wie oben $\Lambda\,\mathsf{H}_1 \equiv \mathsf{H}_1\Lambda^* \equiv \mathsf{P}_0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{C})$ und folglich

$$(\Lambda + \mathsf{H}_1)(\Lambda^* + \mathsf{H}_1) \equiv \mathsf{P}_1\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{C}),$$
$$(\Lambda + \mathsf{H}_1)(\Lambda^* + \mathsf{H}_1) \in Z_1,$$

woraus zu ersehen ist, daß $\Lambda + \mathsf{H}_1$, $\Lambda^* + \mathsf{H}_1$ Einheiten von $\mathfrak{A}$ und daher zentrale Automorphismen von $\mathfrak{G}$ sein müssen.

Aus dem bisher Bewiesenen ergibt sich, daß Z durch (3) *auf die volle Einheitengruppe von $\mathfrak{K}/\mathfrak{C}$ abgebildet wird. Darüber hinaus ist die Zuordnung* (3) *eindeutig*, da mit Θ das der Gleichung (2) genügende Element K von $\mathfrak{K}$, also auch die von K modulo $\mathfrak{C}$ erzeugte Restklasse $\overline{\mathsf{K}}$ eindeutig bestimmt ist, *und relationstreu*, weil aus $\Theta_1 = \mathsf{K}_1 + \mathsf{H}_1$, $\Theta_2 = \mathsf{K}_2 + \mathsf{H}_1$ die Gleichung

$$\Theta_1 \Theta_2 = (\mathsf{K}_1 + \mathsf{H}_1)(\mathsf{K}_2 + \mathsf{H}_1) = \mathsf{K}_1 \mathsf{K}_2 + \mathsf{K}_1 \mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_1 \mathsf{K}_2 + \mathsf{H}_1 = \mathsf{K}_3 + \mathsf{H}_1$$

und wegen $\mathsf{K}_1 \mathsf{H}_1 \equiv \mathsf{H}_1 \mathsf{K}_2 \equiv \mathsf{P}_0 \pmod{\mathfrak{C}}$ (siehe § 1, Hilfssatz 1) hieraus weiter die Kongruenz $\mathsf{K}_1 \cdot \mathsf{K}_2 \equiv \mathsf{K}_3 \pmod{\mathfrak{C}}$ folgt.

(3) ist also sogar eine homomorphe Abbildung von Z auf die volle Einheitengruppe des Restklassenringes $\mathfrak{K}/\mathfrak{C}$ und zwar eine solche, bei welcher das Einselement $\overline{\mathsf{H}}_0$ von $\mathfrak{K}/\mathfrak{C}$ den Elementen von Z_1 und nur diesen zugeordnet ist, woraus die Behauptung auf Grund des Homomorphiesatzes unmittelbar hervorgeht.

Satz 6: *Es sei*

$$(\beta) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{F}_1$$

eine direkte Produktzerlegung von $\mathfrak{G}$ von der speziellen in § 1, *Hilfssatz* 1 *betrachteten Art.* $\mathfrak{F}_0$ ist also das Produkt aller abelschen, $\mathfrak{F}_1$ das Produkt aller nichtabelschen Faktoren einer Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in das direkte Produkt direkt-unzerlegbarer Untergruppen. *Ferner sei A_0 (bzw. A_1) die $\mathfrak{F}_0$-(bzw. $\mathfrak{F}_1$-)Komponente des Elements A bei der Zerlegung (β) und $\overline{A}_1$ die von A_1 modulo der Kommutatorgruppe $\mathfrak{F}_1^*$ von $\mathfrak{F}_1$ erzeugte Restklasse. Durchläuft Θ_{00} alle Automorphismen von $\mathfrak{F}_0$, H_{01} bzw. H_{11} alle operatorhomomorphen Abbildungen von $\mathfrak{F}_0$ (bzw. $\mathfrak{F}_1/\mathfrak{F}_1^*$) auf Untergruppen des Zentrums von $\mathfrak{F}_1$ und schließlich H_{10} alle operatorhomomorphen Abbildungen von $\mathfrak{F}_1/\mathfrak{F}_1^*$ auf Untergruppen von $\mathfrak{F}_0$, so durchläuft die Zuordnung*

$$(1) \qquad \Phi = \{A \to A_0 \Theta_{00} \cdot A_1 \cdot A_0 H_{01} \cdot \overline{A}_1 H_{10} \cdot \overline{A}_1 H_{11}\}$$

genau alle zentralen Automorphismen von $\mathfrak{G}$.

Beweis: Zunächst überzeugt man sich leicht, daß die Zuordnung (1) *bei jeder speziellen Wahl von Θ_{00}, H_{01}, H_{10}, H_{11}* jedenfalls ein Endomorphismus von $\mathfrak{G}$ sein muß, da bis auf A_1 alle Faktoren des Produkts $A_0 \Theta_{00} \cdot A_0 H_{01} \cdot \overline{A}_1 H_{10} \cdot \overline{A}_1 H_{11} \cdot A_1$ dem Zentrum von $\mathfrak{G}$ angehören. Aus demselben Grunde ist auch die Zuordnung

$$\Phi' = \{A \to A_0 \Theta_{00}^{-1} \cdot A_1\}$$

ein Endomorphismus von $\mathfrak{G}$. Das Produkt $\Phi' \Phi$ ist

$$\Phi' \Phi = \{A \to A_0 \cdot A_0 \Theta_{00}^{-1} H_{01} \cdot \overline{A}_1 H_{10} \cdot \overline{A}_1 H_{11} \cdot A_1\}.$$

Schließlich ist — wie unmittelbar ersichtlich — auch noch die Zuordnung

$$\Phi'' = \{A \to A_0 \Theta_{00}^{-1} H_{01} \cdot \bar{A}_1 H_{10} \cdot \bar{A}_1 H_{11}\}$$

ein Endomorphismus von $\mathfrak{G}$ und zwar ein solcher, für den $\Phi'\Phi = \Phi'' + \mathsf{P}_1$ gilt; denn es ist $A_0 \cdot A_1 = A$. Da jeder Faktor des Produkts

$$A_0 \Theta_{00}^{-1} H_{01} \cdot \bar{A}_1 H_{10} \cdot \bar{A}_1 H_{11}$$

zum Zentrum von $\mathfrak{G}$ gehört, ist Φ'' Element des Ringes $\mathfrak{K}$, was ja auch schon daraus folgt, daß Φ'' zu P_1 addierbar ist. Nun ist $\mathsf{H}_0 \Phi'' \mathsf{H}_0 = \mathsf{P}_0$, also nach § 1, Hilfssatz 1, sogar $\Phi'' \in \mathfrak{C}$ und daher $\Phi'' + \mathsf{P}_1 = \Phi'\Phi \in Z_1$, woraus unmittelbar folgt, daß Φ' und Φ sogar Automorphismen von $\mathfrak{G}$ sind. Da Φ überdies zentral ist, was sich sofort aus der Definitionsgleichung (1) ablesen läßt, ist damit der erste Teil des Satzes 6 bewiesen.

Umgekehrt wollen wir jetzt noch zeigen, daß jeder zentrale Automorphismus Θ unter den durch die Zuordnungsvorschrift der Gleichung (1) definierten Automorphismen Φ vorkommt. Zu diesem Zwecke führen wir das im Sinne von § 1, I zu (β) gehörige vollständige Orthogonalsystem (H_0, H_1) ein und überzeugen uns unter Zuziehung des Satzes 2, daß Θ als Summe von der Gestalt

$$\Theta = \mathsf{K}' + \mathsf{P}_1 = \underbrace{\mathsf{K}' + \mathsf{H}_0} + \mathsf{H}_1 = \mathsf{K} + \mathsf{H}_1$$

mit $\mathsf{K} \in \mathfrak{K}$ dargestellt werden kann (was wir bereits beim Beweis des Satzes 5 benutzten). Nun ist

$$\begin{aligned} \mathsf{K} = \mathsf{P}_1 \mathsf{K} \mathsf{P}_1 &= (\mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_1)\mathsf{K}(\mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_1) \\ &= \mathsf{H}_0\mathsf{K}\mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_0\mathsf{K}\mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_1\mathsf{K}\mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_1\mathsf{K}\mathsf{H}_1, \end{aligned}$$

also

$$\Theta = \mathsf{H}_0\mathsf{K}\mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_0\mathsf{K}\mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_1\mathsf{K}\mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_1\mathsf{K}\mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_1$$

oder

$$(2) \qquad \Theta = \{A \to A_0\,\mathsf{H}_0\mathsf{K}\mathsf{H}_0 \cdot A_0\,\mathsf{H}_0\mathsf{K}\mathsf{H}_1 \cdot A_1\,\mathsf{H}_1\mathsf{K}\mathsf{H}_0 \cdot A_1\,\mathsf{H}_1\mathsf{K}\mathsf{H}_1 \cdot A_1\}.$$

Da $\mathsf{H}_i\mathsf{K}\mathsf{H}_j$ für $i = 0, 1$, $j = 0, 1$ immer zum Kern von $\mathfrak{A}$ gehört, wird $\mathfrak{F}_i$ durch $\mathsf{H}_i\mathsf{K}\mathsf{H}_j$ operatorhomomorph auf eine Untergruppe des Zentrums von $\mathfrak{F}_j$, also auf eine abelsche Gruppe abgebildet. $\mathsf{H}_i\mathsf{K}\mathsf{H}_j$ vermittelt daher eine operatorhomomorphe Abbildung H_{ij} der Faktorkommutatorgruppe von $\mathfrak{F}_i$ auf eine Untergruppe des Zentrums von $\mathfrak{F}_j$, derart, daß

$$(3) \qquad A_i\,\mathsf{H}_i\mathsf{K}\mathsf{H}_j = \bar{A}_i H_{ij}$$

gilt, wo $\bar{A}_i$ die von A_i modulo der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{F}_i$ erzeugte Restklasse bedeutet. Durch Einsetzen von (3) in (2) erhält man

$$\Theta = \{A \to A_0 \mathsf{H}_0 \mathsf{K} \mathsf{H}_0 \cdot A_0 H_{01} \cdot \bar{A}_1 H_{10} \cdot \bar{A}_1 H_{11} \cdot A_1\};$$

denn es ist $\bar{A}_0 = A_0$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß der durch die Zuordnung $\{A_0 \to A_0 \mathsf{H}_0 \mathsf{K} \mathsf{H}_0\}$ definierte Endomorphismus Θ_{00} von $\mathfrak{F}_0$ ein Automorphismus ist, was offenbar bewiesen sein wird, wenn in $\mathfrak{A}$ die Existenz eines Elementes $\mathsf{H}_0 \mathsf{K}^* \mathsf{H}_0$ nachgewiesen ist, für das

$$\mathsf{H}_0 \mathsf{K} \mathsf{H}_0 \cdot \mathsf{H}_0 \mathsf{K}^* \mathsf{H}_0 = \mathsf{H}_0 \tag{4}$$

gilt; denn dann ist

$$\{A_0 \to A_0 \mathsf{H}_0 \mathsf{K}^* \mathsf{H}_0\} = \Theta_{00}^{-1}.$$

Auf den Nachweis der Lösbarkeit der Gleichung (4) wird es daher ankommen. Nun ist

$$\begin{aligned} \mathsf{H}_0 = \mathsf{H}_0 \mathsf{P}_1 \mathsf{H}_0 = \mathsf{H}_0 \Theta \mathsf{P}_1 \Theta^{-1} \mathsf{H}_0 &= \mathsf{H}_0 \Theta (\mathsf{H}_0 \mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_1 \mathsf{H}_1) \Theta^{-1} \mathsf{H}_0 \\ &= \mathsf{H}_0 \Theta \mathsf{H}_0 \cdot \mathsf{H}_0 \Theta^{-1} \mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_0 \Theta \mathsf{H}_1 \cdot \mathsf{H}_1 \Theta^{-1} \mathsf{H}_0 \\ &= \mathsf{H}_0 \mathsf{K} \mathsf{H}_0 \cdot \mathsf{H}_0 \Theta^{-1} \mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_0 \mathsf{K} \mathsf{H}_1 \cdot \mathsf{H}_1 \Theta^{-1} \mathsf{H}_0 \end{aligned} \tag{5}$$

(denn es gilt $\Theta = \mathsf{K} + \mathsf{H}_1$, $\mathsf{H}_0 \Theta \mathsf{H}_0 = \mathsf{H}_0 \mathsf{K} \mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_0 \mathsf{H}_1 \mathsf{H}_0 = \mathsf{H}_0 \mathsf{K} \mathsf{H}_0$, $\mathsf{H}_0 \Theta \mathsf{H}_1 = \mathsf{H}_0 \mathsf{K} \mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_0 \mathsf{H}_1 \mathsf{H}_1 = \mathsf{H}_0 \mathsf{K} \mathsf{H}_1$).

Wegen $\mathsf{H}_0 \cdot \mathsf{K} \mathsf{H}_1 \cdot \mathsf{H}_0 = \mathsf{P}_0$ ist nach § 1, Hilfssatz 1 $\mathsf{K} \mathsf{H}_1 \in \mathfrak{C}$, also auch

$$\Gamma = \mathsf{H}_0 \mathsf{K} \mathsf{H}_1 \cdot \mathsf{H}_1 \Theta^{-1} \mathsf{H}_0 = \mathsf{H}_0 \Gamma \mathsf{H}_0 \in \mathfrak{C}.$$

Aus (5) folgt daher unmittelbar

$$\begin{aligned} \mathsf{H}_0 &= [\mathsf{H}_0 - \mathsf{H}_0 \Gamma \mathsf{H}_0][\mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_0 \Gamma \mathsf{H}_0 + (\mathsf{H}_0 \Gamma \mathsf{H}_0)^2 + \ldots] \\ &= \mathsf{H}_0 \mathsf{K} \mathsf{H}_0 \cdot \underbrace{\mathsf{H}_0 \Theta^{-1} \mathsf{H}_0 \cdot [\mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_0 \Gamma \mathsf{H}_0 + (\mathsf{H}_0 \Gamma \mathsf{H}_0)^2 + \ldots]} \\ &= \mathsf{H}_0 \mathsf{K} \mathsf{H}_0 \cdot \mathsf{H}_0 \mathsf{K}^* \mathsf{H}_0, \end{aligned}$$

q. e. d.

§ 3.

Die Gruppe der zentralen Automorphismen einer endlichen Gruppe ohne Operatoren.

Von jetzt an sei $\mathfrak{G}$ eine gewöhnliche Gruppe endlicher Ordnung, d. h. eine endliche Gruppe ohne Operatoren. In diesem besonders wichtigen Spezialfall wollen wir in diesem Paragraphen die vorangehenden allgemeinen Resultate in einigen wesentlichen Punkten ergänzen. Zu diesem Zweck zerlegen wir $\mathfrak{G}$ — genau wie in Satz 6 — wieder in das direkte Produkt zweier Untergruppen $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$, von denen $\mathfrak{F}_0$ kommutativ sein soll, während $\mathfrak{F}_1$ keinen abelschen direkten Faktor mehr ent-

halten möge (so daß die Gruppen $\mathfrak{U}_i$, in deren direktes Produkt $\mathfrak{F}_1$ zerfällt, alle nichtkommutativ sind). Mit $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sollen die Primzahlen bezeichnet werden, welche gleichzeitig im Index der Kommutatorgruppe *und* in der Ordnung des Zentrums von $\mathfrak{G}$ aufgehen. $a_{i,k}$ sei ferner die Zahl, welche angibt, wie oft die Potenz p_i^k unter den Invarianten von $\mathfrak{F}_0$ vertreten ist, und entsprechend $b_{i,k}$ (bzw. $c_{i,k}$) die Zahl, welche angibt, wie oft die Potenz p_i^k unter den Invarianten der Faktorkommutatorgruppe (bzw. des Zentrums) von $\mathfrak{F}_1$ vorkommt. Im folgenden will ich nachweisen, daß sich die Struktur der Gruppe Z aller zentralen Automorphismen von $\mathfrak{G}$ durch die Zahlen $p_i, a_{i,k}, b_{i,k}, c_{i,k}$, wenn auch nicht vollständig, so doch immerhin schon recht weitgehend beschreiben läßt. Hierzu bedarf ich aber noch zweier Hilfssätze, die ich darum vorausschicke.

Hilfssatz 2: $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ seien zwei gewöhnliche abelsche Gruppen, von denen $\mathfrak{V}$ die Basis $v_1, \ldots, v_\alpha$ und $\mathfrak{W}$ die Basis $w_1, \ldots, w_\beta$ besitzen möge; dabei sollen sowohl die v_i wie die w_j jeweils unter sich linear unabhängig sein. Ist n_i die Ordnung von v_i und m_j die Ordnung von w_j, so wird durch die Zuordnung

$$(1) \qquad H(z) = \left\{ v_1^{x_1} \cdot v_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot v_\alpha^{x_\alpha} \rightarrow w_1^{\sum\limits_{i=1}^{\alpha} x_i \frac{z_{i1} m_1}{(n_i, m_1)}} \cdot \ldots \cdot w_\beta^{\sum\limits_{i=1}^{\alpha} x_i \frac{z_{i\beta} m_\beta}{(n_i, m_\beta)}} \right\},$$

in der die x_i unabhängig voneinander alle ganz rationalen Zahlen durchlaufen und die z_{ij} irgendwelche *feste* ganzrationale Zahlen bedeuten, stets eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{W}$ auf eine Untergruppe $\mathfrak{W}'$ von $\mathfrak{W}$ definiert. Man erhält alle homomorphen Abbildungen H von $\mathfrak{V}$ auf Untergruppen von $\mathfrak{W}$ und zwar jede von ihnen genau einmal, wenn die z_{ij} unabhängig voneinander ein vollständiges Restsystem modulo (n_i, m_j) durchlaufen. Die Anzahl aller Abbildungen der genannten Art ist also $\prod\limits_{i=1}^{\alpha} \prod\limits_{j=1}^{\beta} (n_i, m_j)$. Definiert man — genau wie bei Endomorphismen einer abelschen Gruppe — für je zwei Abbildungen $H' = \{v \rightarrow w'\}$ und $H'' = \{v \rightarrow w''\}$, die durch eine Zuordnungsvorschrift von der Gestalt (1) definiert sind, eine „Summe" durch die Festsetzung $H' + H'' = \{v \rightarrow w' \cdot w''\}$, so wird die Menge aller Abbildungen (1) zu einer Gruppe $\mathfrak{H}$: der *„Gruppe der Homomorphismen von $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{W}$"*; sie ist direkte Summe aus $\alpha \cdot \beta$ zyklischen Gruppen $\mathfrak{Z}_{ij}$, von denen $\mathfrak{Z}_{ij}$ die Ordnung (n_i, m_j) hat.

Beweis: Zunächst ist eine Abbildung von der Form (1) eindeutig; denn aus $v_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot v_\alpha^{x_\alpha} = v_1^{x'_1} \cdot \ldots \cdot v_\alpha^{x'_\alpha}$ folgt wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Elemente $v_1, \ldots, v_\alpha$, $x_i \equiv x'_i \pmod{n_i}$,

$$x_i - x'_i \equiv 0 \pmod{n_i}, \quad \frac{(x_i - x'_i) z_{ij} m_j}{(n_i, m_j)} \equiv 0 \pmod{m_j}, \quad \frac{x_i z_{ij} m_j}{(n_i, m_j)} \equiv \frac{x'_i z_{ij} m_j}{(n_i, m_j)} \pmod{m_j},$$

also

$$w_1^{\sum\limits_{i=1}^{\alpha} \frac{x_i z_{i1} m_1}{(n_i, m_1)}} \cdot \ldots \cdot w_\beta^{\sum\limits_{i=1}^{\alpha} \frac{x_i z_{i\beta} m_\beta}{(n_i, m_\beta)}} = w_1^{\sum\limits_{i=1}^{\alpha} \frac{x_i' z_{i1} m_1}{(n_i, m_1)}} \cdot \ldots \cdot w_\beta^{\sum\limits_{i=1}^{\alpha} \frac{x_i' z_{i\beta} m_\beta}{(n_i, m_\beta)}}.$$

Da nun jede der Abbildungen (1) — wie man durch Nachrechnen sofort bestätigt — außerdem noch die Eigenschaft der Relationstreue besitzt, ist sie in der Tat ein Homomorphismus.

Umgekehrt läßt sich leicht zeigen, daß jede homomorphe Abbildung H' von $\mathfrak{V}$ auf eine Untergruppe $\mathfrak{W}'$ von $\mathfrak{W}$ die spezielle, durch die Gleichung (1) ausgedrückte Gestalt haben muß. Ist nämlich $w_1^{y_{i1}} \cdot \ldots \cdot w_\beta^{y_{i\beta}}$ dasjenige Element von $\mathfrak{W}$, das bei H' dem Element $v_i \in \mathfrak{V}$ entspricht, so muß offenbar $w_1^{n_i y_{i1}} \cdot \ldots \cdot w_\beta^{n_i y_{i\beta}} = 1$ gelten, woraus wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der w_j sofort $n_i y_{ij} \equiv 0 \pmod{m_j}$,

$$y_{ij} \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{m_j}{(n_i, m_j)}\right), \quad y_{ij} = \frac{z'_{ij} m_j}{(n_i, m_j)}, \text{ d. h.}$$

$$H' = \left\{ v_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot v_\alpha^{x_\alpha} \to w_1^{\sum\limits_{i=1}^{\alpha} \frac{x_i z'_{i1} m_1}{(n_i, m_1)}} \cdot \ldots \cdot w_\beta^{\sum\limits_{i=1}^{\alpha} \frac{x_i z'_{i\beta} m_\beta}{(n_i, m_\beta)}} \right\}$$

folgt.

Aus dem bisher Bewiesenen ergibt sich, daß durch die Zuordnungen von der Gestalt (1) in der Tat alle homomorphen Abbildungen von $\mathfrak{V}$ auf die Untergruppen von $\mathfrak{W}$ — i. a. allerdings jede mehrfach — geliefert werden. Will man jede Abbildung nur einmal bekommen, so hat man die z_{ij} auf ein volles Restsystem modulo (n_i, m_j) zu beschränken, da offenbar zwei Zuordnungen von der Gestalt (1) stets dann und nur dann übereinstimmen, wenn die ihnen entsprechenden z_{ij} modulo (n_i, m_j) kongruent sind.

Die Behauptung über die Gruppe $\mathfrak{H}$ ergibt sich aus dem Vorangehenden unmittelbar, wenn man $\mathfrak{Z}_{ij}$ als die Menge aller $H(z)$ definiert, bei denen bis auf z_{ij} alle $z_{\varkappa\lambda}$ gleich Null sind; in der Tat ist diese Menge bei additiver Verknüpfung eine zyklische Gruppe von der Ordnung (n_i, m_j) und $\mathfrak{H}$ die direkte Summe der $\mathfrak{Z}_{ij}$.

Hilfssatz 3: Bei additiver Verknüpfung seiner Elemente ist das Radikal $\mathfrak{C}$ des Endomorphismenbereichs $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ eine abelsche Gruppe, deren Invariantensystem p_i^k in der Vielfachheit

$$d_{i,k} = a_{i,k+1}^2 - a_{i,k}^2 + (a_{i,k} + c_{i,k}) \cdot \sum^{\varkappa \leqq k} (a_{i,\varkappa} + b_{i,\varkappa})$$
$$+ (a_{i,k} + b_{i,k}) \sum^{\varkappa > k} (a_{i,\varkappa} + c_{i,\varkappa}),$$

neben den Primzahlpotenzen p_i^k $(i = 1, \ldots, r)$; $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ aber keine weiteren Zahlen mehr enthält.

Beweis: Es sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_1 \times \ldots \times \mathfrak{U}_l$ wie bisher immer eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ als direktes Produkt direkt-unzerlegbarer Untergruppen, $\mathfrak{U}_i^*$ die Kommutatorgruppe, $\mathfrak{U}_i^{**}$ das Zentrum von $\mathfrak{U}_i$.

a) Wird das vollständige Orthogonalsystem, das im Sinne von § 1, I zu der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_1 \times \ldots \times \mathfrak{U}_l$ gehört, mit $(\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_l)$ bezeichnet, so zerfällt $\mathfrak{C}$ in die direkte Summe der l^2 Gruppen $\mathsf{H}_\mu \mathfrak{C} \mathsf{H}_\nu$, in denen wieder *nur* die Addition als Verknüpfung zu gelten hat.

Beim Beweis des Hilfssatzes 3 genügt es also, die Invarianten der einzelnen Summanden $\mathsf{H}_\mu \mathfrak{C} \mathsf{H}_\nu$ zu bestimmen. Hierzu führe ich — genau wie in § 1, III — zu jedem Element $\mathsf{H}_\mu \Gamma \mathsf{H}_\nu$ aus $\mathsf{H}_\mu \mathfrak{C} \mathsf{H}_\nu$ diejenige operatorhomomorphe Abbildung $J_{\mu\nu}$ von $\mathfrak{U}_\mu$ auf eine Untergruppe von $\mathfrak{U}_\nu$ ein, welche durch die Zuordnungsvorschrift $J_{\mu\nu} = \{A_\mu \rightarrow A_\mu \mathsf{H}_\mu \Gamma \mathsf{H}_\nu\}$ definiert ist, in der A_μ alle Elemente aus $\mathfrak{U}_\mu$ durchläuft.

Da $\mathsf{H}_\mu \Gamma \mathsf{H}_\nu$ nach § 1, III zum Kern $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{A}$ gehört, wird $\mathfrak{U}_\mu$ durch $\mathsf{H}_\mu \Gamma \mathsf{H}_\nu$ auf eine Untergruppe des Zentrums $\mathfrak{U}_\nu^{**}$ von $\mathfrak{U}_\nu$, also jedenfalls auf eine abelsche Gruppe abgebildet. $J_{\mu\nu}$ vermittelt daher eine durch $\mathsf{H}_\mu \Gamma \mathsf{H}_\nu$ eindeutig bestimmte homomorphe Abbildung

$$\overline{J}_{\mu\nu} = \{\overline{A}_\mu \rightarrow A_\mu \mathsf{H}_\mu \Gamma \mathsf{H}_\nu\}$$

von $\mathfrak{U}_\mu / \mathfrak{U}_\mu^*$ auf eine Untergruppe von $\mathfrak{U}_\nu^{**}$, wobei mit $\overline{A}_\mu$ die von A_μ modulo $\mathfrak{U}_\mu^*$ erzeugte Restklasse bezeichnet wird.

b) Ist nun $\mathfrak{U}_\mu$ nicht zu $\mathfrak{U}_\nu$ isomorph oder mindestens eine der beiden Gruppen $\mathfrak{U}_\mu$ und $\mathfrak{U}_\nu$ nichtkommutativ, so zeigt die Zuordnung $\mathsf{H}_\mu \Gamma \mathsf{H}_\nu \rightarrow \overline{J}_{\mu\nu}$, daß die Gruppe $\mathsf{H}_\mu \mathfrak{C} \mathsf{H}_\nu$ nach § 1, III mit der Gruppe aller Homomorphismen von $\mathfrak{U}_\mu / \mathfrak{U}_\mu^*$ in $\mathfrak{U}_\nu^{**}$ isomorph ist, deren Invarianten nach Hilfssatz 2 bekannt sind.

c) Sind $\mathfrak{U}_\mu$ und $\mathfrak{U}_\nu$ isomorphe abelsche Gruppen, also zwei zyklische Gruppen, die beide dieselbe Primzahlpotenzordnung p^l haben, so ist $\mathsf{H}_\mu \mathfrak{C} \mathsf{H}_\nu$ nach § 1, III nur isomorph mit der (additiven) Gruppe aus denjenigen Homomorphismen von $\mathfrak{U}_\mu$ in $\mathfrak{U}_\nu$, welche $\mathfrak{U}_\mu$ auf eine *echte* Untergruppe von $\mathfrak{U}_\nu$ abbilden; in diesem Fall ist daher $\mathsf{H}_\mu \mathfrak{C} \mathsf{H}_\nu$ — wie unmittelbar ersichtlich — eine zyklische Gruppe von der Ordnung p^{l-1}.

Aus a), b) und c) ergibt sich die Behauptung in Verbindung mit Hilfssatz 2 auf Grund einer elementaren Rechnung.

Unter Beibehaltung der am Anfang dieses Paragraphen eingeführten Bezeichnungen formuliere ich schließlich den fast unmittelbar aus den vorangehenden Resultaten folgenden

Hauptsatz:

1. *Die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *besitzt genau*

$$z = \prod_{i=1}^{r} \prod_{k=1}^{\infty} p_i^{k \cdot d_{i,k}} \cdot \psi(p_i, a_{i,k}) \tag{1}$$

zentrale Automorphismen, welche nach Satz 6 *und nach Hilfssatz* 2 *als bekannt gelten dürfen;* $d_{i,k}$ *und* $\psi(p_i, a_{i,k})$ *sind dabei Abkürzungen für die Ausdrücke*

$$(1\text{a})\quad d_{i,k} = a_{i,k+1}^2 - a_{i,k}^2 + (a_{i,k} + c_{i,k}) \cdot \sum_{x \geqq k} (a_{i,x} + b_{i,x}) + (a_{i,k} + b_{i,k}) \cdot \sum_{x > k} (a_{i,x} + c_{i,x}),$$

$$(1\text{b})\quad \psi(p_i, a_{i,k}) = \begin{cases} 1 & \text{für } a_{i,k} = 0 \\ (p_i^{a_{i,k}} - 1)(p_i^{a_{i,k}} - p_i) \cdot \ldots \cdot (p_i^{a_{i,k}} - p_i^{a_{i,k}-1}) & \text{für } a_{i,k} > 0. \end{cases}$$

Der Beweis ergibt sich aus Satz 6, wenn man neben Hilfssatz 2 noch berücksichtigt, daß $\mathfrak{F}_0$ nach Shoda[13]) genau

$$\prod_{i=1}^{r} \prod_{k=1}^{\infty} \psi(p_i, a_{i,k}) \cdot p_i^{(a_{i,k+1}^2 - a_{i,k}^2 + a_{i,k} \cdot \sum_{x \geqq k} a_{i,x} + a_{i,k} \cdot \sum_{x > k} a_{i,x}) \cdot k}$$

(eigentliche!) Automorphismen besitzt.

2. *Bei multiplikativer Verknüpfung bilden die zentralen Automorphismen von* $\mathfrak{G}$ *eine Gruppe Z, deren Ordnung durch* (1), (1 a) *und* (1 b) *gegeben ist.*

3. *Z enthält einen Normalteiler* Z_1 *mit folgenden Eigenschaften:*

a) Z_1 *ist nach aufsteigenden Zentren auflösbar* (vgl. Fußnote [11])) *und zerfällt folglich in das direkte Produkt seiner Sylowkomponenten. Die Anzahl h der voneinander verschiedenen Gruppen* $\neq 1$, *die in der aufsteigenden Zentrenreihe der Gruppe* Z_1 (d. h. in der Reihe $V_0 = 1, V_1, V_2, \ldots, V_h = Z_1$, bei der V_i/V_{i-1} das Zentrum von Z_1/V_{i-1} ist) *vorkommen, ist höchstens ebenso groß wie der zum Radikal* $\mathfrak{C}$ *des Endomorphismenbereichs* $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{G}$ *gehörige Exponent*, also höchstens ebenso groß wie die kleinste natürliche Zahl e, für welche $\mathfrak{C}^e = \mathsf{P}_0$ gilt: $h \leqq e$ (Satz 4 c).

b) *Bedeutet f die kleinste natürliche Zahl, welche der Bedingung* $\mathfrak{C}^{2^f} = \mathsf{P}_0$ oder — was auf dasselbe hinausläuft — $2^f \geqq e$ *genügt, und ist* $\widetilde{Z}_1$ *die Abelsche Gruppe, deren Invariantensystem nur die Primzahlpotenzen* p_i^k $(i = 1, \ldots, r,\ k = 1, 2, 3, \ldots)$, *und zwar von diesen* p_i^k *in der Vielfachheit* $d_{i,k}$ [siehe (1 a)] *enthält, so gibt es in* $\widetilde{Z}_1$ *und in* Z_1 *absteigende Normalreihen*

$$\widetilde{Z}_1 \supset \widetilde{Z}_2 \supset \widetilde{Z}_4 \supset \widetilde{Z}_8 \supset \ldots \supset \widetilde{Z}_{2^f} = 1,$$
$$Z_1 \supset Z_2 \supset Z_4 \supset Z_8 \supset \ldots \supset Z_{2^f} = 1,$$

von denen jede nur aus genau f voneinander verschiedenen Gruppen $\neq 1$ *besteht derart, daß* $\widetilde{Z}_{2^i}/\widetilde{Z}_{2^{i+1}}$ *mit* $Z_{2^i}/Z_{2^{i+1}}$ *isomorph ist* (Satz 4 b, Hilfssatz 3). *Die Stufenzahl*[14]) *der Gruppe* Z_1 *ist folglich nicht größer als f. Die Ordnung von* Z_1 *ist*

$$(2)\qquad z_1 = \prod_{i=1}^{r} \prod_{k=1}^{\infty} p_i^{k \cdot d_{i,k}} \qquad (\text{vgl. } (1\text{a})),$$

---

[13]) A. a. O. [siehe Fußnote [1])], § 1, S. 676—678.

[14]) Unter *„Stufe"* einer auflösbaren Gruppe L wird diejenige natürliche Zahl s verstanden, welche angibt, daß in der Reihe $L^{(0)} = L, L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots$, wo $L^{(i)}$ die Kommutatorgruppe von $L^{(i-1)}$ bedeutet, $L^{(s)} = 1$, aber $L^{(s-1)} \neq 1$ ist.

ist also nur durch solche Primzahlen teilbar, die gleichzeitig in der Ordnung des Zentrums und im Index der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ *aufgehen.*

4. *Die Restklassengruppe* Z/Z_1 *zerfällt in das direkte Produkt der „allgemeinen linearen Kongruenzgruppen"*

(3) $$GL(a_{i,k}, p_i) \text{ [15]} \quad (i = 1, \ldots, r, \; k = 1, 2, 3, \ldots);$$

für ihre Ordnung ergibt sich daher der explizite Ausdruck

(4) $$\frac{z}{z_1} = \prod_{i=1}^{r} \prod_{k=1}^{\infty} \psi(p_i, a_{i,k}) \qquad \text{(vgl. (1b)).}$$

Zum Beweis wende man Satz 5 und § 1, IV an. Hierbei beachte man, daß die in § 1, IV eingeführte Gruppe $\mathfrak{U}_{r_\lambda}$ unter den speziellen Voraussetzungen dieses Paragraphen zyklisch ist und eine Primzahlpotenz $p_\lambda^{e_\lambda}$ zur Ordnung hat. Der Endomorphismenring $\mathfrak{A}_\lambda$ von $\mathfrak{U}_{r_\lambda}$ ist daher mit $\mathfrak{g}/p_\lambda^{e_\lambda}$ isomorph, wobei $\mathfrak{g}$ den Ring der ganz rationalen Zahlen bedeutet, so daß der Restklassenkörper des Ringes $\mathfrak{A}_\lambda$ modulo seinem Radikal $\mathfrak{C}_\lambda$ (auf den es hier letztlich ankommt) mit dem Primkörper Ω_{p_λ} von der Charakteristik p_λ übereinstimmt; in unserem Spezialfall ist also

$$GL(g_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda/\mathfrak{C}_\lambda) = GL(g_\lambda, \Omega_{p_\lambda}) = GL(g_\lambda, p_\lambda) \text{ [15]}.$$

5. *Die Gruppen* $Z, Z_1, Z_2, Z_4, \ldots$ *sind Normalteiler der* ***vollen*** *Automorphismengruppe* G *von* $\mathfrak{G}$. Zwischen Z_{2^i} und $Z_{2^{i+1}}$ gibt es mindestens noch $2^i - 1$ voneinander verschiedene Gruppen $Z_{2^i+1}, \ldots, Z_{2^{i+1}-1}$, die ebenfalls Normalteiler von G sind und in der Beziehung

$$Z_{2^i} \supset Z_{2^i+1} \supset Z_{2^i+2} \supset \ldots \supset Z_{2^{i+1}-1} \supset Z_{2^{i+1}}$$

zueinander stehen. (Satz 3).

6. *Auflösbar ist die Gruppe* Z *der zentralen Automorphismen von* $\mathfrak{G}$ *stets dann und nur dann, wenn die Gruppen* (3) *auflösbar sind,* wenn also $a_{i,k}$ entweder $= 0$ oder $= 1$ oder $= 2$ und p_i im Falle $a_{i,k} = 2$ entweder $= 2$ oder $= 3$ ist. Sind alle $a_{i,k} = 0$, so ist Z sogar nach aufsteigenden Zentren auflösbar (vgl. Fußnote [11]), denn dann ist $Z = Z_1$.

---

[15]) Man vergleiche hierzu wieder das in Fußnote [12]) zitierte Buch von v. d. Waerden.

(Eingegangen am 31. 10. 1936.)

Zur Theorie der Charaktere Abelscher Gruppen.

Von

Béla v. Sz. Nagy in Szeged (Ungarn).

Einleitung.

Es seien $E, A, B, C, \ldots, P, \ldots$ die Elemente einer aus abzählbar unendlich vielen Elementen bestehenden Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$; E sei das Einheitselement. Ein System

$$\chi = \{\chi_E, \chi_A, \chi_B, \chi_C, \ldots\}$$

von komplexen Zahlen heißt bekanntlich ein (beschränkter) Charakter von $\mathfrak{G}$, falls die Beziehungen

$$\chi_P \cdot \chi_Q = \chi_{PQ} \quad \text{und} \quad |\chi_P| = 1$$

gelten. Es ist dann notwendig $\chi_E = 1$ und $\chi_{P^{-1}} = \bar{\chi}_P$. Mit χ ist ersichtlich auch

$$\chi^{-1} = \{\bar{\chi}_E, \bar{\chi}_A, \bar{\chi}_B, \ldots\}$$

und mit χ und χ' auch

$$\chi \cdot \chi' = \{\chi_E \chi'_E, \chi_A \chi'_A, \chi_B \chi'_B, \ldots\}$$

je ein Charakter.

Ein Satz von A. Haar besagt (in etwas abgeänderter, aber gleichwertiger Fassung) folgendes[1]):

Es gibt ein System

$$\chi_E(t), \chi_A(t), \chi_B(t), \ldots, \chi_P(t), \ldots$$

von komplexwertigen Funktionen, definiert auf einer abgeschlossenen Teilmenge T *der Strecke* $[0, 1]$, *ferner einen daselbst definierten Lebesgue-Stieltjesschen Maßbegriff (kurz: μ-Maß), mit den folgenden Eigenschaften:*

I. *Die* $\chi_P(t)$ *sind überall auf* T *stetig*

II. *Für jedes feste t liefert*

$$\chi(t) = \{\chi_E(t), \chi_A(t), \chi_B(t), \ldots\}$$

einen Charakter von $\mathfrak{G}$.

III. *Die Funktionen* $\chi_P(t)$ *bilden in bezug auf das μ-Maß ein (normiertes) Orthogonalsystem, d. h., es gilt*

$$\int_{\mathsf{T}} \chi_P(t)\, \overline{\chi_Q(t)}\, d\mu = \delta_{P,Q} = \begin{cases} 1 & \textit{für } P = Q \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

---

[1]) A. Haar, Math. Zeitschr. 33 (1931), S. 129—159; vgl. auch R. E. A. C. Paley und N. Wiener, Proc. Nat. Acad. 19 (1933), S. 253—257.

IV. *Das System der $\chi_P(t)$ ist im Raume $\mathfrak{L}_2$ der in bezug auf das μ-Maß samt ihren Quadraten integrierbaren Funktionen vollständig.*

V. *Es gibt zu jedem Punkte t_0 von* T *Funktionen $u(t)$ und $v(t)$, so daß die Gleichungen*

$$\chi(t)\cdot\chi(t_0) = \chi(u(t)) \quad \textit{und} \quad \chi(t)\cdot(\chi(t_0))^{-1} = \chi(v(t))$$

überall auf T, *mit etwaiger Ausnahme einer μ-Nullmenge, statthaben.*

VI. *Hat $\mathfrak{G}$ mindestens ein Element unendlicher Ordnung, so ist das μ-Maß stetig, d. i., sind die einzelnen Punkte von* T *vom μ-Maße Null.*

Für den Beweis dieses Satzes hat Haar die Theorie des Hilbertschen Raumes, insbesondere den tiefliegenden Satz über die simultane Spektraldarstellung vertauschbarer unitärer Transformationen zu Hilfe genommen. Wir wollen hier einen solchen Beweis mitteilen, der die Benutzung der Theorie des Hilbertschen Raumes ganz vermeidet und der uns auch sonst einfacher zu sein scheint.

Wir werden zugleich noch mehr gewinnen. Die von uns konstruierten Funktionensysteme und μ-Maß haben außer den obigen noch die folgenden Eigenschaften:

V*. *Es gibt zu einem beliebig gegebenen Charakter χ von $\mathfrak{G}$ zwei Funktionen $u(t)$ und $v(t)$, so daß die Gleichungen*

$$\chi(t)\cdot\chi = \chi(u(t)) \quad \textit{und} \quad \chi(t)\cdot\chi^{-1} = \chi(v(t))$$

überall auf T *bestehen.*

VI*. *Das μ-Maß ist für jede unendliche Gruppe $\mathfrak{G}$ stetig.*

VII. *Besteht $\mathfrak{G}$ nur aus Elementen endlicher Ordnung und ist $f(t)$ eine auf* T *stetige Funktion, so können wir sie beliebig genau durch Linearausdrücke der $\chi_P(t)$ gleichmäßig approximieren.*

VIII. *Ist P ein Element n-ter Ordnung, so ist*

$$\mu\,\mathsf{M}_t[\chi_P(t) = \eta] = \frac{1}{n}$$

für jede n-te Einheitswurzel η.[2])

IX. *Gilt für die Elemente $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ die Gleichung*

$$P_1^{n_1}\,P_2^{n_2}\,P_3^{n_3}\ldots P_k^{n_k} = E$$

nur für $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_k = 0$ und sind die B_j $(j = 1, 2, 3, \ldots, k)$ Bogen des komplexen Einheitskreises, so ist

$$\mu\,\mathsf{M}_t[\chi_{P_1}(t)\in\mathsf{B}_1;\ \chi_{P_2}(t)\in\mathsf{B}_2;\ \ldots;\ \chi_{P_k}(t)\in\mathsf{B}_k] = b_1\cdot b_2\cdots b_k,$$

wo b_j die durch 2π geteilte Länge des Bogens B_j bezeichnet.

Die Eigenschaften VI*, VIII, IX werden wir allein aus den Eigenschaften II und III ableiten können.

Der Beweis beruht auf dem folgenden Lemma.

---

[2]) $\mu\,\mathsf{M}_t$ bezeichnet das μ-Maß der Menge M_t.

§ 1.

Ein Lemma über die Charaktere.

Es sei jedem Element P von $\mathfrak{G}$ je eine komplexe Zahl c_P zugeordnet, doch sei nur für endlich viele P $c_P \neq 0$, und sei $c_E = 0$. Dann gibt es einen solchen Charakter χ von $\mathfrak{G}$, für welchen

$$\Re \sum_{P \in \mathfrak{G}} c_P \chi_P \leqq 0.$$

Es möge P_k $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchlaufen; es sei insbesondere $P_0 = E$. Sei $\mathfrak{H}_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ die durch $P_0, P_1, \ldots, P_n$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Wir werden den gesuchten Charakter durch Rekursion definieren. Es ist notwendig $\chi_{P_0} = 1$. Nehmen wir an, daß wir einen Charakter χ von $\mathfrak{H}_{n-1}$ schon gefunden haben, so daß für diesen

$$\Re \sum_{P \in \mathfrak{H}_{n-1}} c_P \chi_P \leqq 0$$

gilt. Wir werden zeigen, daß dann sich dieser Charakter von $\mathfrak{H}_{n-1}$ zu einem Charakter von $\mathfrak{H}_n$ erweitern läßt, und zwar so, daß

$$\Re \sum_{P \in \mathfrak{H}_n - \mathfrak{H}_{n-1}} c_P \chi_P \leqq 0, \quad \text{also auch} \quad \Re \sum_{P \in \mathfrak{H}_n} c_P \chi_P \leqq 0$$

gilt. Damit wird das Lemma bewiesen sein.

Wir können voraussetzen, daß P_n nicht in $\mathfrak{H}_{n-1}$ enthalten ist. Zwei Möglichkeiten (A oder B) können dann bestehen:

A. Es gibt eine ganze Zahl $m > 0$, für welche $P_n^m \in \mathfrak{H}_{n-1}$ (sie sei dann sogleich die kleinste solche Zahl). Die Elemente von $\mathfrak{H}_n$ lassen sich dann eindeutig in der Form $Q \cdot P_n^l$, mit $Q \in \mathfrak{H}_{n-1}$ und $0 \leqq l < m$, aufschreiben.

Es sei $\chi_{P_n^m} = e^{2\pi i \vartheta}$ (dies ist ja schon definiert); es sei ferner

$$f_1(x) = \sum_{Q \in \mathfrak{H}_{n-1}} \sum_{l=1}^{m-1} c_{Q \cdot P_n^l} \chi_Q \cdot e^{2\pi i l\left(\frac{\vartheta}{m} + x\right)}.$$

Da $f_1(x)$ ein trigonometrisches Polynom ohne konstantes Glied und höchstens von der $m - 1$-ten Ordnung ist, gibt es eine ganze Zahl k, $0 \leqq k < m$, so daß

$$\Re f_1\left(\frac{k}{m}\right) \leqq 0$$

ist[3]).

---

[3]) Es gilt ja bekanntlich folgendes: Ist die Ordnung eines trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = \sum_{\nu}' c_\nu e^{2\pi i \nu x}$$

Wir setzen dann $\chi_{Q\cdot P_n^l} = \chi_Q \cdot e^{2\pi i(\vartheta+k)\frac{l}{m}}$; damit haben wir in der Tat den Charakter von $\mathfrak{H}_{n-1}$ zu einem Charakter von $\mathfrak{H}_n$ erweitert und es gilt

$$\Re \sum_{P\in\mathfrak{H}_n-\mathfrak{H}_{n-1}} c_P\chi_P = \Re f_1\left(\frac{k}{m}\right) \leqq 0.$$

B. Es gibt keine solche ganze Zahl $m \neq 0$, für welche $P_n^m \in \mathfrak{H}_{n-1}$. Die Elemente von $\mathfrak{H}_n$ lassen sich dann eindeutig in der Form $Q\cdot P_n^l$, mit $Q \in \mathfrak{H}_{n-1}$ und $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, aufschreiben.

Es sei

$$f_2(x) = \sum_{Q\in\mathfrak{H}_{n-1}} \sum_{\substack{l=-\infty\\ l\neq 0}}^{\infty}{}' c_{Q\cdot P_n^l}\chi_Q\cdot e^{2\pi i l x},$$

dies ist (da nur endlich viele c_P von Null verschieden sind) ein trigonometrisches Polynom ohne konstantes Glied. Sei m eine die Ordnung von $f_2(x)$ übertreffende ganze Zahl. Dann gibt es eine ganze Zahl k, $0 \leqq k < m$, so daß

$$\Re f_2\left(\frac{k}{m}\right) \leqq 0.\text{[4]}$$

Wir setzen nun $\chi_{Q\cdot P_n^l} = \chi_Q\cdot e^{2\pi i k\frac{l}{m}}$; damit haben wir den Charakter von $\mathfrak{H}_{n-1}$ auch in diesem Falle zu einem solchen Charakter von $\mathfrak{H}_n$ erweitert, für welchen

$$\Re \sum_{P\in\mathfrak{H}_n-\mathfrak{H}_{n-1}} c_P\chi_P = \Re f_2\left(\frac{k}{m}\right) \leqq 0$$

gilt.

§ 2.

Konstruktion der Funktionen $\chi_P(t)$ und des Maßbegriffes.

Wir betrachten die perfekte Cantorsche Punktmenge Σ, bestehend aus allen Punkten s der Strecke $[0, 1]$, deren triadische Entwicklung ohne Benutzung der Ziffer 1 geschrieben werden kann. (Dann ist diese Entwicklung eindeutig bestimmt.) Es sei $s = [0, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots]_3$

---

ohne konstantes Glied kleiner als m, so ist $\sum_{n=0}^{m-1} p\left(\frac{n}{m}\right) = 0$; also gibt es gewiß eine solche ganze Zahl h, $0 \leqq h < m$, für welche $\Re\, p\left(\frac{h}{m}\right) \leqq 0$.

[4]) Vgl. Bemerkung [3]).

(die σ_k sind 0 oder 2), wir definieren dann Funktionen von s in der angedeuteten Weise:

$$\left.\begin{aligned} x_E(s) &= \left[0, \frac{\sigma_1}{2}\frac{\sigma_3}{2}\frac{\sigma_6}{2}\frac{\sigma_{10}}{2}\ldots\right]_2 \\ x_A(s) &= \left[0, \frac{\sigma_2}{2}\frac{\sigma_5}{2}\frac{\sigma_9}{2}\;.\;\ldots\right]_2 \\ x_B(s) &= \left[0, \frac{\sigma_4}{2}\frac{\sigma_8}{2}\;.\;.\;\ldots\right]_2 \\ x_C(s) &= \left[0, \frac{\sigma_7}{2}\;.\;.\;.\;\ldots\right]_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \qquad \text{(dyadische Entwicklungen!)}$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese Funktionen überall auf Σ stetig sind[5]). Durchläuft s die Menge Σ, so durchläuft die Folge

$$\{x_E(s), x_A(s), x_B(s), \ldots, x_P(s), \ldots\}$$

offenbar *alle* Punkte des abzählbar unendlich-dimensionalen Einheitswürfels

$$0 \leqq x_E \leqq 1,\; 0 \leqq x_A \leqq 1,\; 0 \leqq x_B \leqq 1, \ldots, 0 \leqq x_P \leqq 1, \ldots.$$

Diese Abbildung ist aber nicht auch umkehrbar eindeutig, da diejenigen Punkte des Würfels, die mindestens eine dyadisch-rationale Koordinate besitzen, mehreren Punkten von Σ zugeordnet sein können. (Dies folgt daraus, daß eine dyadisch-rationale Zahl auf zweierlei Weise dyadisch entwickelt werden kann.) Die übrigen Punkte des Würfels, die also in keiner Ebene mit einer „Gleichung" von der Form

$$x_P = d \qquad (d \text{ dyadisch-rational})$$

liegen, gehören aber zu je einem einzigen Punkte von Σ.

Bezeichne nun K^∞ den abzählbar unendlich-dimensionalen Torusraum aller Folgen

$$\varkappa = \{\varkappa_E, \varkappa_A, \varkappa_B, \varkappa_C, \ldots, \varkappa_P, \ldots\}$$

von *komplexen* Zahlen vom Absolutbetrage 1. Die Gesamtheit aller Charaktere von $\mathfrak{G}$ kann dann als eine Untermenge X von K^∞ aufgefaßt werden. Verstehen wir in K^∞ unter Konvergenz die „koordinatenweise" Konvergenz, so ist X offenbar eine *abgeschlossene* Untermenge von K^∞.

---

[5]) Sei nämlich $s^{(n)} = [0, \sigma_1^{(n)}\sigma_2^{(n)}\ldots]_3$ eine gegen $s^* = [0, \sigma_1^*\sigma_2^*\ldots]_3$ strebende Folge von Punkten aus Σ. Da die Punkte von Σ, die in die Strecke

$$[[0, \sigma_1^*\sigma_2^*\ldots\sigma_N^*\,0\,0\,0\ldots]_3,\; [0, \sigma_1^*\sigma_2^*\ldots\sigma_N^*\,2\,2\,2\ldots]_3]$$

fallen, von den übrigen Punkten von Σ einen Abstand $\geqq 3^{-N}$ haben, so muß von einem gewissen Index n_0 an $\sigma_1^{(n)} = \sigma_1^*, \sigma_2^{(n)} = \sigma_2^*, \ldots, \sigma_N^{(n)} = \sigma_N^*$ gelten. Hieraus folgt aber unmittelbar, daß $x_P(s^{(n)}) \to x_P(s^*)$.

Sei ϱ eine feste irrationale Zahl und sei

$$\varkappa_E(s) = e^{2\pi i(\varrho + x_E(s))},\ \varkappa_A(s) = e^{2\pi i(\varrho + x_A(s))},\ \ldots,\ \varkappa_P(s) = e^{2\pi i(\varrho + x_P(s))},\ \ldots.$$

Diese auf Σ definierten Funktionen sind offenbar auch überall stetig. Also ist

$$s \to \{\varkappa_E(s),\ \varkappa_A(s),\ \varkappa_B(s),\ \ldots,\ \varkappa_P(s),\ \ldots\}$$

eine stetige Abbildung von Σ auf K^∞.

Wir wollen die Menge der Punkte von K^∞, deren P-Koordinate, $\varkappa_P$, gleich $e^{2\pi i(\varrho + d)}$ ist (wo d eine dyadisch-rationale Zahl bedeutet), eine *Netzebene* nennen. Da es abzählbar unendlich viele Gruppenelemente und abzählbar unendlich viele dyadisch-rationale Zahlen d gibt, haben wir abzählbar unendlich viele Netzebenen. Die Punkte von K^∞, die auf keiner Netzebene liegen, sind offenbar je einem *einzigen* Punkte von Σ zugeordnet.

Bezeichne T diejenige, offenbar abgeschlossene, Teilmenge von Σ, für deren Punkte t gilt: $\varkappa(t) \in \mathsf{X}$. Wir definieren dann

$$\chi(t) = \{\chi_E(t),\ \chi_A(t),\ \chi_B(t),\ \ldots\} = \{\varkappa_E(t),\ \varkappa_A(t),\ \varkappa_B(t),\ \ldots\} = \varkappa(t).$$

Durchläuft t die Punkte von T, so bekommen wir also *alle* Charaktere von $\mathfrak{G}$.

Es sei χ ein beliebiger Charakter von $\mathfrak{G}$, dann sind für jedes t auch $\chi(t)\cdot\chi$ und $\chi(t)\cdot\chi^{-1}$ Charaktere. Es gibt also notwendig zwei solche Abbildungen $t' = u(t)$ und $t'' = v(t)$ von T auf Teilmengen von T, für welche identisch gilt:

$$\chi(t)\cdot\chi = \chi(u(t)) \quad \text{und} \quad \chi(t)\cdot\chi^{-1} = \chi(v(t)).$$

Damit sind für diese Funktionen die Eigenschaften I, II und V* bewiesen. Nun kommen wir zur Einführung des μ-Maßes und zum Beweis von III.

Die auf der abgeschlossenen Teilmenge T der Strecke [0, 1] stetigen Funktionen

$$\Re\chi_A(t),\ \Im\chi_A(t),\ \Re\chi_B(t),\ \Im\chi_B(t),\ \ldots \qquad (E \text{ ist ausgelassen!})$$

können wir leicht zu Funktionen

$$h'_A(s),\ h''_A(s),\ h'_B(s),\ h''_B(s),\ \ldots$$

erweitern, die schon auf der ganzen Strecke $0 \leqq s \leqq 1$ definiert, reellwertig und stetig sind. (Wir können sie z. B. so wählen, daß sie auf den einzelnen Intervallen, in welche ja die komplementäre Menge $\overline{\mathsf{T}}$ von T zerfällt, linear sind.) Ferner wählen wir eine auf [0, 1] stetige Funktion $h^*(s)$ derart, daß $h^*(s) > 0$ auf $\overline{\mathsf{T}}$, $h^*(s) = 0$ auf T sei (z. B. sei $h^*(s)$ gleich dem Abstand (s, T)).

Sei nun $l(s)$ eine beliebige, aus endlich vielen der Funktionen $h^*(s)$, $h'_A(s)$, $h''_A(s)$, $h'_B(s)$, $h''_B(s)$, ... mit reellen Koeffizienten gebildete Linearkomposition. Wir behaupten, daß

$$\min_{0 \leqq s \leqq 1} l(s) \leqq 0 \leqq \max_{0 \leqq s \leqq 1} l(s)$$

gilt.

Aus Symmetriegründen können wir uns auf den Beweis der ersten Ungleichung beschränken. Nun hat $l(s)$ für $s = t \in \mathsf{T}$ offenbar die Gestalt:

$$l(t) = \sum_{P \neq E} (a_P \mathfrak{R} \chi_P(t) + b_P \mathfrak{I} \chi_P(t)) = \mathfrak{R} \sum_{P \neq E} (a_P - i b_P) \chi_P(t).$$

Aus unserem Lemma folgt, daß es in der Tat ein t gibt, für welches $l(t) \leqq 0$.

Aus diesem Ergebnis folgt nach einem Satze von F. Riesz [6]), daß es eine monotone Funktion $g(s)$ auf $[0, 1]$ gibt, so daß die Gleichungen

$$\int_0^1 d\, g(s) = 1, \quad \int_0^1 h^*(s)\, d\, g(s) = \int_0^1 h'_A(s)\, d\, g(s) = \int_0^1 h''_A(s)\, d\, g(s) = \ldots = 0$$

bestehen.

Aus dem Verschwinden des Integrals der nirgends negativen Funktion $h^*(s)$ folgt, daß die Menge $\mathsf{M}_s[h^*(s) > 0] = \overline{\mathsf{T}}$ in bezug auf den durch die Belegungsfunktion $g(s)$ erzeugten positiven Lebesgue-Stieltjesschen Maßbegriff (kurz: μ-Maß) vom Maße Null ist. Wir dürfen daher in den obigen Relationen die Integrationsmenge $[0, 1]$ durch T ersetzen, und so bekommen wir (mit Rücksicht auf die Identität $\chi_E(t) \equiv 1$ auf T):

$$\int_{\mathsf{T}} \chi_E(t)\, d\mu = \int_{\mathsf{T}} d\mu = 1$$

und

$$\int_{\mathsf{T}} \chi_P(t)\, d\mu = \int_{\mathsf{T}} h'_P(t)\, d\mu + i \int_{\mathsf{T}} h''_P(t)\, d\mu = 0 \qquad (\text{für } P \neq E).$$

---

[6]) Der gemeinte Satz lautet wie folgt (siehe F. Riesz, Annales Éc. Norm. Sup. (3) **28** (1911), S. 33—62; insbesondere S. 55; vgl. noch, auch für weitere Literaturangaben, St. Banach, Théorie des opérations linéaires (Warszawa, 1932), S. 74—75): Das Momentenproblem $\int_0^1 h_k(s)\, d\, g(s) = r_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ mit gegebenen reellwertigen und auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen $h_k(s)$ und gegebenen reellen Zahlen r_k hat immer dann (und nur dann) eine monotone Belegungsfunktion $g(s)$ mit $g(1) - g(0) = 1$ zur Lösung, wenn die Ungleichungen

$$\min_{0 \leqq s \leqq 1} \sum_{k=1}^{n} a_k h_k(s) \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \leqq \max_{0 \leqq s \leqq 1} \sum_{k=1}^{n} a_k h_k(s)$$

für jede Wahl des ganzen n und der reellen a_k bestehen. (In unserem Falle sind alle Momente r_k gleich 0).

Wegen der Charaktereigenschaft folgt hieraus auch die Gleichung

$$\int_T \chi_P(t)\,\overline{\chi_Q(t)}\,d\mu = \delta_{P,Q} \qquad \text{(für beliebige } P, Q \text{ aus } \mathfrak{G}\text{)},$$

also die Eigenschaft III. Es sei hier noch bemerkt, daß offenbar auch die Gleichung

$$\int_T \chi'_P \cdot \chi_P(t)\,d\mu = \chi'_P \int_T \chi_P(t)\,d\mu = \chi'_P \cdot \delta_{P,E} = \delta_{P,E}$$

für einen beliebigen Charakter χ' von $\mathfrak{G}$ gilt.

§ 3.

Über die Werteverteilung und Vollständigkeit der $\chi_P(t)$.

Sei P ein Element n-ter Ordnung. Dann nimmt $\chi_P(t)$ (wegen Eigenschaft II) nur n-te Einheitswurzeln als Werte an. Sei η ein solcher Wert. Dann ist

$$\frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-1} \eta^{-h}(\chi_P(t))^h = f(t)$$

offenbar gleich der charakteristischen Funktion[7]) der Punktmenge $\mathsf{M}_t[\chi_P(t) = \eta]$. Das Integral von $f(t)$ ist aber (wegen der Eigenschaften II und III) offenbar gleich $\frac{1}{n}$, also gilt auch VIII.

Es sei nun Z eine „Zelle“ von K^∞, definiert durch die (endlich vielen!) Bedingungen

$$\varkappa_{P_1} \in \mathsf{B}_1, \quad \varkappa_{P_2} \in \mathsf{B}_2, \quad \ldots, \quad \varkappa_{P_k} \in \mathsf{B}_k,$$

wo die B_j gewisse Bogen des komplexen Einheitskreises bedeuten; b_j sei die durch 2π geteilte Länge von B_j.

Mittels des Weierstraßschen Approximationssatzes kann man leicht einsehen, daß es eine beschränkte Folge von Polynomen

$$\sum_{n=-m}^{m} c^{(m)}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\, \varkappa_{P_1}^{n_1} \varkappa_{P_2}^{n_2} \ldots \varkappa_{P_k}^{n_k} = p_m(\varkappa_{P_1}, \varkappa_{P_2}, \ldots, \varkappa_{P_k})$$

gibt, die für $m \to \infty$ überall auf K^∞ gegen die charakteristische Funktion von Z konvergiert. Dann ist aber die charakteristische Funktion $\varphi(t)$ der t-Menge

$$\mathsf{M}_t[\chi(t) \in \mathsf{Z}] = \mathsf{M}_t[\chi_{P_1}(t) \in \mathsf{B}_1;\ \chi_{P_2}(t) \in \mathsf{B}_2;\ \ldots;\ \chi_{P_k}(t) \in \mathsf{B}_k]$$

---

[7]) Die zu einer Teilmenge der Grundmenge gehörige charakteristische Funktion ist folgendermaßen definiert: Sie ist auf dieser Teilmenge überall gleich 1, auf ihrer Komplementärmenge aber überall gleich 0.

gleich dem Limes von

(1) $p_m(\chi_{P_1}(t), \chi_{P_2}(t), \ldots, \chi_{P_k}(t)) = \sum_{n=-m}^{m} c^{(m)}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \chi_{P(n_1, n_2, \ldots, n_k)}(t)$

für $m \to \infty$ (wo $P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = P_1^{n_1} P_2^{n_2} \ldots P_k^{n_k}$).

Ist $P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = E$ nur für $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 0$, so ist (wegen III)

(2) $$\int_{\mathsf{T}} \varphi(t)\, d\mu = \lim_{m \to \infty} c^{(m)}_{0, 0, \ldots, 0}.$$

Es ist andererseits auch

(3) $$\int p_m(e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \ldots, e^{2\pi i x_k})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_k = c^{(m)}_{0, 0, \ldots, 0},$$

wo das Integral über den k-dimensionalen Einheitswürfel ($0 \leqq x_j \leqq 1$; $j = 1, 2, \ldots, k$) zu nehmen ist. Nun ist aber der Limes dieses Integranden (für $m \to \infty$) gleich der charakteristischen Funktion desjenigen Teiles dieses Würfels, wo

$$e^{2\pi i x_1} \in \mathsf{B}_1,\ e^{2\pi i x_2} \in \mathsf{B}_2,\ \ldots,\ e^{2\pi i x_k} \in \mathsf{B}_k,$$

also ist

(4) $$\lim_{m \to \infty} \int p_m(e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \ldots, e^{2\pi i x_k})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_k = b_1 \cdot b_2 \cdots b_k.$$

Aus (2), (3), (4) ergibt sich endlich:

$$\mu\, \mathsf{M}_t[\chi(t) \in \mathsf{Z}] = b_1 \cdot b_2 \cdots b_k,$$

wie in IX behauptet wurde.

Die Menge N *derjenigen Punkte von* T, *für welche* $\chi(t)$ *auf Netzebenen von* K^∞ *fällt, ist vom* μ*-Maße Null.* Zum Beweis betrachten wir eine Netzebene $\varkappa_P = \eta$. Nehmen wir an, daß P ein Gruppenelement n-ter Ordnung ist, dann nimmt $\chi_P(t)$ nur n-te Einheitswurzeln als Werte an. Da η von der Form $e^{2\pi i(\varrho + d)}$ mit irrationalem ϱ und rationalem d ist, ist es keine n-te Einheitswurzel, also ist $\mathsf{M}_t[\chi_P(t) = \eta]$ leer. Ist P von unendlicher Ordnung, so folgt aus der soeben bewiesenen Eigenschaft IX, daß $\mu\, \mathsf{M}_t[\chi_P(t) = \eta]$ gleich Null ist, da wir η als einen Bogen der Länge Null auffassen dürfen. Da es nur abzählbar unendlich viele Netzebenen in K^∞ gibt, ist die obige Behauptung bewiesen.

Beweis der Vollständigkeit in $\mathfrak{L}_2$. Sei $\mathfrak{L}$ diejenige (im μ-Quadratintegral-Mittel) abgeschlossene Linearmannigfaltigkeit, die durch die Funktionen $\chi_P(t)$ aufgespannt wird.

Ist Z eine beliebige Zelle in K^∞, so ist nach (1) die charakteristische Funktion der Menge $\mathsf{M}_t[\chi(t) \in \mathsf{Z}]$ Limes einer beschränkten Folge von Linearausdrücken der $\chi_P(t)$, sie gehört also zu $\mathfrak{L}$.

Es sei nun Σ' derjenige Teil von Σ, der im Intervall

$$\left[[0, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_N\, 0000 \ldots]_3,\ [0, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_N\, 2222 \ldots]_3\right]$$

liegt ($\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$ sind gegebene Zahlen, die 0 oder 2 sein dürfen). Die Punkte von Σ' haben also eine triadische Entwicklung von der Form

$$[0, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_N * * * * \ldots]_3,$$

wo die Stellen $*$ beliebig durch Nullen und Zweien ausgefüllt sein können. Aus der Definition der Funktionen $x_P(s)$ und $\varkappa_P(s)$ folgt dann leicht, daß die Abbildung $\Sigma \to \mathsf{K}^\infty$ die Untermenge Σ' in eine Zelle Z' von K^∞ überführt. Wir haben aber die Gleichung

$$\mathsf{M}_t[\chi(t) \in \mathsf{Z}'] = \Sigma' \cdot \mathsf{T} + \mathsf{N}',$$

wo N' eine Untermenge von N bedeutet, also ist $\mu \mathsf{N}' = 0$. Hieraus folgt, daß die charakteristische Funktion der Menge $\Sigma' \cdot \mathsf{T}$ ebenfalls zu $\mathfrak{L}$ gehört. Da aber die charakteristischen Funktionen aller Mengen von der Form $\Sigma' \cdot \mathsf{T}$ in $\mathfrak{L}_2$, d. h. im Raume *aller* in bezug auf das μ-Maß meßbaren und quadratisch integrierbaren Funktionen, offenbar überall dicht liegen, so ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_2$, w. z. b. w.

§ 4.

Die Stetigkeit des μ-Maßes und die Approximationseigenschaft.

Es sei Z eine beliebige Zelle in K^∞, wie in § 3, und es sei χ ein gegebener Charakter von $\mathfrak{G}$. Wir behaupten, daß dann gilt:

$$\mu \mathsf{M}_t[\chi(t) \in \mathsf{Z}] = \mu \mathsf{M}_t[\chi(t) \cdot \chi^{-1} \in \mathsf{Z}].$$

Ist nämlich die charakteristische Funktion der ersteren Menge gleich dem Limes von

$$\sum_{n=-m}^{m} c^{(m)}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \chi_{P(n_1, n_2, \ldots, n_k)}(t) \qquad \text{für } m \to \infty,$$

(vgl. (1)), so ist die der letzteren gleich dem Limes von

$$\sum_{n=-m}^{m} c^{(m)}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \chi_{P(n_1, n_2, \ldots, n_k)}(t) \cdot \overline{\chi_{P(n_1, n_2, \ldots, n_k)}}.$$

Da diese beschränkten Folgen gliedweise integrierbar sind und da die Integrale der einzelnen Glieder übereinstimmen (vgl. die Bemerkung am Ende von § 2), so haben auch die beiden charakteristischen Funktionen gleiches Integral, w. z. b. w.

Es durchlaufe nun $\mathsf{Z}^{(n)}$ eine Folge ineinandergeschachtelter Zellen mit dem einzigen gemeinsamen Punkte $1 = \{1, 1, 1, \ldots\}$. Wenn wir die soeben bewiesene Gleichung auf jede Zelle $\mathsf{Z}^{(n)}$ anwenden und dann zur Grenze übergehen, so erhalten wir

$$\mu \mathsf{M}_t[\chi(t) = 1] = \mu \mathsf{M}_t[\chi(t) \cdot \chi^{-1} = 1].$$

Anders ausgedrückt: es ist

$$\mu \mathsf{M}_t[\chi(t) = \chi]$$

von der Wahl des Charakters χ unabhängig.

Da eine unendliche Gruppe unendlich viele verschiedene Charaktere hat[8]) und da T vom μ-Maße 1 ist, so muß notwendig

$$\mu \mathsf{M}_t[\chi(t) = \chi] = 0$$

sein.

Daraus folgt aber *a fortiori* die behauptete Eigenschaft VI*.

Endlich zum Beweis der Approximationseigenschaft VII!

Hat die Gruppe $\mathfrak{G}$ nur Elemente endlicher Ordnung, so liegt kein Punkt der Menge X auf Netzebenen von K^∞ (vgl. § 3, Beweis der Gleichung $\mu \mathsf{N} = 0$). Hieraus folgt, daß die Abbildung $\mathsf{T} \to \mathsf{X}$ in diesem Falle eindeutig umgekehrt werden kann. Die umgekehrte Abbildung $g(\varkappa) = t$ ist offenbar überall auf X auch stetig.

Ist $f(t)$ eine auf T definierte stetige Funktion, so ist auch $f(g(\varkappa))$ auf X stetig. Aus den topologischen Eigenschaften des Raumes K^∞ folgt[9]), daß diese stetige Funktion von der abgeschlossenen Teilmenge X auf den ganzen Raum K^∞ stetig erweitert werden und die erweiterte Funktion für jedes positive ε durch eine stetige, nur von endlich vielen $\varkappa_P$ abhängige Funktion $h(\varkappa_{P_1}, \varkappa_{P_2}, \ldots, \varkappa_{P_k})$ mit der Genauigkeit $\varepsilon/2$ gleichmäßig approximiert werden kann. Wegen des Weierstraßschen Approximationssatzes kann man dann diese letzte Funktion durch ein Polynom $p(\varkappa_{P_1}, \varkappa_{P_2}, \ldots, \varkappa_{P_k})$ mit der Genauigkeit $\varepsilon/2$ gleichmäßig approximieren. Dann gilt aber offenbar auf T:

$$|f(t) - p(\chi_{P_1}(t), \chi_{P_2}(t), \ldots, \chi_{P_k}(t))| \leqq \varepsilon,$$

woraus die Behauptung VII folgt.

---

[8]) Diese wohlbekannte Tatsache folgt auch aus unseren bisherigen Ergebnissen. Angenommen, es gäbe nur n Charaktere $\chi^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, so müßte (damit das Gesamtmaß 1 für T herauskommt) jedes $\mathsf{M}_t[\chi(t) = \chi^{(k)}]$ vom μ-Maße $1/n$ sein. Dies hätte aber die (unmögliche) Folge, daß die *unendlich vielen* Vektoren

$$\mathfrak{v}_E = \{\chi_E^{(1)}, \chi_E^{(2)}, \ldots, \chi_E^{(n)}\}, \mathfrak{v}_A = \{\chi_A^{(1)}, \chi_A^{(2)}, \ldots, \chi_A^{(n)}\}, \ldots, \mathfrak{v}_P = \{\chi_P^{(1)}, \chi_P^{(2)}, \ldots, \chi_P^{(n)}\}, \ldots$$

wegen

$$\delta_{P,Q} = \int_{\mathsf{T}} \chi_P(t) \overline{\chi_Q(t)}\, d\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_P^{(k)} \overline{\chi_Q^{(k)}}$$

ein (zu $n^{\frac{1}{2}}$ normiertes) Orthogonalsystem im n-dimensionalen Vektorraume bilden.

[9]) Und zwar aus der Bikompaktheit von K^∞; vgl. z. B. B. Jessen, Acta Math. 63 (1934), S. 249—323, insbesondere S. 252—257; ferner P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie, Bd. I (Berlin, 1935), S. 73 und 89.

Bemerkung. Man könnte die Beweisführung auch so einrichten, daß der Übergang $\mathsf{K}^\infty \to \Sigma$ bzw. $\mathsf{X} \to \mathsf{T}$ erst am Ende des Beweises vollzogen wird. Man könnte nämlich statt der Funktionen $\chi_P(t)$ die für $\varkappa \in \mathsf{X}$ definierten Funktionen $\chi_P(\varkappa) = \varkappa_P$ betrachten und das μ-Maß statt auf T auf X einführen. Diese Beweisführung hätte auch den Vorteil, daß sie auch im Falle nichtabzählbarer Abelscher Gruppen teilweise angewandt werden kann (natürlich ist dann der Torusraum K^∞ auch unabzählbar viel-dimensional und es ist kein solcher Übergang $\mathsf{K}^\infty \to \Sigma$ mehr möglich). Das Lemma wird ja auch in diesem Falle gelten, da im Beweis desselben die gewöhnliche Rekursion durch transfinite ersetzt werden kann. Wir wollen aber auf diese Erweiterungsmöglichkeiten nicht näher eingehen.

(Eingegangen am 13. 12. 1936.)

Über Moduln und Gruppenbilder.

Von

Hans-Georg Schumann in Marburg (Lahn)*).

Einleitung.

Im folgenden wird in Anlehnung an die Theorie der Homotopiekettenringe[1]) eine Theorie der Kettengruppen von Gruppenbildern mit Operatoren entwickelt.

§ 1 enthält zunächst eine Darstellung der allgemeinen Begriffsbildungen für Moduln in bezug auf einen Ring. In den §§ 2 und 3 werden sodann spezielle Selbstabbildungen eines Gruppenbildes $\mathfrak{C}$ einer Gruppe $\mathfrak{F}$ zur Einführung von Operatoren in die Kettengruppen von $\mathfrak{C}$ benutzt. Durch den Zusammenhang der von einem Punkt ausgehenden Wege von $\mathfrak{C}$ mit den Elementen einer freien Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden lassen sich zu jeder auf $\mathfrak{F}$ homomorph abbildbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ zwei Gruppen $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}/\mathfrak{R}_r$ und $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{R}_0/\mathfrak{R}_r$ mit Operatoren definieren, die mit $\mathfrak{G}$ invariant verknüpft sind. $\mathfrak{H}_0$ ist dabei zulässige Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Die gruppentheoretische Bedeutung dieser beiden Gruppen wird in den §§ 4 und 5 untersucht.

Ist nun $H(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ der Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{F}$, so läßt sich für kommutative Gruppen $\mathfrak{L}$ die Kennzeichnung von $\mathfrak{G}$ mit ihrem Homomorphismus H auf die Kennzeichnung der Gruppe $\mathfrak{H}$ mit Operatoren und ihrem Operatorhomomorphismus $R(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0$ auf die allein durch $\mathfrak{F}$ bestimmte Gruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0$ zurückführen (§ 6). Dieses Verfahren steht in engem Zusammenhang mit der Schreierschen[2]) Theorie der Gruppenerweiterungen (§ 7). Die Kennzeichnung von $\mathfrak{H}$ und R wird in § 8 auf ein Matrizenäquivalenzproblem zurückgeführt. Schließlich wird in § 9 eine spezielle Invariante von $\mathfrak{H}$, das annullierende Ideal, untersucht. Durch eine einfache Hilfsüberlegung läßt sich aus einem dieser Sätze der Hauptidealsatz der Klassenkörpertheorie folgern.

Herrn Prof. Reidemeister bin ich für mannigfaltige Anregungen zu großem Dank verpflichtet.

---

*) Diese Arbeit ist von der philosophischen Fakultät der Universität Marburg als Dissertation angenommen worden.

[1]) Vgl. K. Reidemeister, Homotopiegruppen von Komplexen, Hamb. Abh. **10** (1934).

[2]) Vgl. O. Schreier, Über die Erweiterung von Gruppen I, Monatshefte f. Math. und Phys. **34**.

§ 1.

Über Gruppen mit Operatoren.

Wir verstehen unter einer *Gruppe* $\mathfrak{H}$ *mit Operatoren* eine Gesamtheit von Elementen h, die den folgenden Axiomen genügt:

1. $\mathfrak{H}$ ist ein Modul, d. h. eine additiv geschriebene abelsche Gruppe.

2. $\mathfrak{H}$ gestattet die Elemente r eines Ringes $\mathfrak{R}$ als Linksmultiplikatoren; diese genügen den Rechengesetzen:

$$r(h+h') = rh + rh',$$
$$(r+r')h = rh + r'h,$$
$$(rr')h = r(r'h).$$

3. $\mathfrak{R}$ besitzt ein Einheitselement, welches Einheitsoperator von $\mathfrak{H}$ ist und mit 1 bezeichnet wird: $1h = h$.

4. $\mathfrak{H}$ ist ein endlicher $\mathfrak{R}$-Modul, d. h. es lassen sich seine Elemente in der Gestalt

(1) $$r_1 h_1 + r_2 h_2 + \ldots + r_n h_n,$$

als Linearkombinationen von endlich vielen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ darstellen. Die Elemente h_i heißen „*Erzeugende*" von $\mathfrak{H}$.

Wir nennen einen Ausdruck (1), der das Nullelement von $\mathfrak{H}$ darstellt, eine „*Relation*" in den Erzeugenden h_i. Besitzt $\mathfrak{H}$ ein Erzeugendensystem $h_1, h_2, \ldots, h_n$, das nur die triviale Relation $0h_1 + \ldots + 0h_n$ gestattet, so heißt $\mathfrak{H}$ eine freie Gruppe mit Operatoren.

Es sei $\mathfrak{D}$ eine abelsche Gruppe mit einer Automorphismengruppe Δ. Verstehen wir unter $\mathfrak{R}$ den ganzzahligen Gruppenring von Δ, d. h. den Ring aus allen hyperkomplexen Zahlen

$$m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \ldots + m_q\delta_q = r,$$

mit ganzen rationalen Zahlen m_i, beliebigen Elementen δ_i aus Δ und endlichem q, dann kann $\mathfrak{D}$ als Gruppe mit dem Operatorenring $\mathfrak{R}$ aufgefaßt werden. Zunächst bedeute nämlich $\delta \cdot d$ das Bild von d bei Anwendung des Automorphismus δ. Ist m eine ganze rationale Zahl, so bedeute $m\delta d$ das Element $m \cdot (\delta d)$, und

$$r \cdot d = (m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \ldots + m_q\delta_q) \cdot d$$

das Element

$$m_1\delta_1 d + m_2\delta_2 d + \ldots + m_q\delta_q d$$

von $\mathfrak{D}$. Dann erfüllt $\mathfrak{D}$ das erste und dritte Axiom, und man folgert die Gültigkeit des zweiten Axiomes aus den für die Gruppenzahlen r gültigen Rechenregeln. Dagegen ist die Endlichkeitsforderung des vierten Axioms nur in Spezialfällen erfüllt.

Ist $\mathfrak{Z}$ eine „*zulässige*" Untergruppe einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{H}$ mit dem Operatorenring $\mathfrak{R}$, d. h. eine Untergruppe, die mit jedem Element z

auch alle Elemente $r \cdot z$ mit r aus $\mathfrak{R}$ enthält, so ist die Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z}$ wiederum eine Gruppe mit dem Operatorenring $\mathfrak{R}$. Die das Element h aus $\mathfrak{H}$ enthaltende Restklasse $[h]$ nach $\mathfrak{Z}$ enthält nämlich gerade alle Elemente $h + z$ mit z aus $\mathfrak{Z}$. Da nun mit z auch rz zu $\mathfrak{Z}$ gehört, liegen die Elemente $rh + rz$ wieder alle in derselben Restklasse $[rh]$ von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{Z}$. Wir können daher durch

(2) $$r[h] = [rh]$$

die Anwendung des Operators r auf die Elemente von $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z}$ erklären. Aus dieser Festsetzung folgt sofort die Gültigkeit unserer Axiome, bis auf die erste Rechenregel des zweiten Axioms. Da aber für zwei Restklassen $[h]$ und $[h']$ einerseits

$$r([h] + [h']) = r[h + h'] = [r(h + h')],$$

und andererseits

$$r[h] + r[h'] = [rh] + [rh'] = [rh + rh'] = [r(h + h')]$$

gilt, so ist auch diese Rechenregel in $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z}$ erfüllt.

Wir verstehen nun unter einem *Operatorhomomorphismus* einer Gruppe $\mathfrak{H}$ mit dem Operatorenring $\mathfrak{R}$ auf eine Gruppe $\mathfrak{H}^*$ mit demselben Operatorenring eine eindeutige Abbildung der Elemente h von $\mathfrak{H}$ auf die Elemente h^* von $\mathfrak{H}^*$ derart, daß mit $h_1 \to h_1^*$ und $h_2 \to h_2^*$ auch immer $h_1 + h_2 \to h_1^* + h_2^*$ und $rh_i \to rh_i^*$ für beliebiges r aus $\mathfrak{R}$ stattfindet. Ist diese Abbildung eineindeutig, so nennen wir sie einen *Operatorisomorphismus*.

Zunächst läßt sich eine Gruppe $\mathfrak{H}$ mit Operatoren auf jede ihrer Faktorgruppen $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z}$ nach einer zulässigen Untergruppe $\mathfrak{Z}$ operatorhomomorph abbilden. Man bildet nämlich einfach die Elemente von $\mathfrak{H}$ auf diejenige Restklasse nach $\mathfrak{Z}$ ab, in denen sie vorkommen, und bestätigt dann aus der Festsetzung (2) unsere beiden Forderungen. Umgekehrt ist jede Gruppe $\mathfrak{H}^*$ mit dem Operatorenring $\mathfrak{R}$, auf die sich $\mathfrak{H}$ operatorhomomorph abbilden läßt, zu einer Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{H}$ operatorisomorph. Werden nämlich die Elemente h_1, h_2 von $\mathfrak{H}$ auf das Nullelement von $\mathfrak{H}^*$ abgebildet, so auch die Elemente $h_1 + h_2$ und rh_i. Die Gesamtheit der auf das Nullelement von $\mathfrak{H}^*$ abgebildeten Elemente von $\mathfrak{H}$ bildet daher eine zulässige Untergruppe $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{H}$. Durch $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^*$ werden gerade alle Elemente einer Restklasse von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{Z}$ auf dasselbe Element von $\mathfrak{H}^*$ abgebildet, so daß ein Operatorhomomorphismus $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z} \to \mathfrak{H}^*$ durch $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^*$ induziert wird. Da diese Abbildung in bezug auf das Nullelement eineindeutig ist, ist sie es für alle Elemente. Also sind $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{H}^*$ operatorisomorph. — Es sei nun $\mathfrak{H}$ eine Gruppe mit dem Operatorenring $\mathfrak{R}$ und den Erzeugenden $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Ferner sei $\mathfrak{T}$ die von den Symbolen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ erzeugte freie Gruppe mit demselben Operatoren-

ring. Bilden wir dann das Element $r_1 h_1 + r_2 h_2 + \ldots + r_n h_n$ aus $\mathfrak{T}$ auf das gleichgeschriebene in $\mathfrak{H}$ ab, so ist damit ein Operatorhomomorphismus von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{H}$ definiert. Mithin ist $\mathfrak{H}$ operatorisomorph zu der Faktorgruppe $\mathfrak{T}/\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{T}$ nach einer zulässigen Untergruppe $\mathfrak{Z}$, die aus allen denjenigen Elementen von $\mathfrak{T}$ besteht, die in $\mathfrak{H}$ Relationen sind. Demnach definiert ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{H}$ eine Darstellung von $\mathfrak{H}$ als Faktorgruppe $\mathfrak{T}/\mathfrak{Z}$ einer freien Gruppe $\mathfrak{T}$ mit demselben Operatorenring. Läßt sich $\mathfrak{Z}$ durch endlich viele Elemente $z_1, z_2, \ldots, z_m$ erzeugen, so bilden diese z_i ein System von „*definierenden*" Relationen von $\mathfrak{H}$. Wir lassen im folgenden jedoch auch solche Untergruppen $\mathfrak{Z}$ zu, die nicht durch endlich viele Elemente erzeugt werden können.

Wir können jetzt die Frage nach allen Erzeugendensystemen einer Gruppe mit Operatoren untersuchen und betrachten zunächst die beiden elementaren Übergänge von einem Erzeugendensystem zu einem anderen, die durch Hinzunehmen oder Fortlassen überflüssiger Erzeugender bewirkt werden.

Zu den Erzeugenden $h_1, h_2, \ldots, h_n$ von $\mathfrak{H}$ kann man jedes beliebige Element $h_{n+1} = r_1 h_1 + r_2 h_2 + \ldots + r_n h_n$ hinzufügen. Dadurch gelangt man zu einer Darstellung von $\mathfrak{H}$ als Faktorgruppe $\mathfrak{T}^*/\mathfrak{Z}^*$ einer freien Gruppe $\mathfrak{T}^*$ mit Operatoren und den Erzeugenden $h_1, \ldots, h_n, h_{n+1}$. Die Gruppe $\mathfrak{Z}^*$, die ja aus allen Relationen von $\mathfrak{H}$ in den $h_1, \ldots, h_{n+1}$ besteht, enthält alle Elemente z aus $\mathfrak{Z}$ und außerdem auch die Relation

$$h = -r_1 h_1 - \ldots - r_n h_n + h_{n+1}.$$

Bezeichnen wir die von den z und h in $\mathfrak{T}^*$ erzeugte zulässige Untergruppe mit $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}' \subset \mathfrak{Z}^*$, so ist der Durchschnitt von $\mathfrak{Z}'$ mit $\mathfrak{T}$ gerade $\mathfrak{Z}$. Daher kommen in jeder Restklasse von $\mathfrak{T}^*$ nach $\mathfrak{Z}'$ mit dem Element $h^* = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{r}_i h_i$ auch ein Element $h^* - \bar{r}_{n+1} h = t$ aus $\mathfrak{T}$ und gerade alle Elemente $t + z$ einer Restklasse von $\mathfrak{T}$ nach $\mathfrak{Z}$ vor. Die Zuordnung der die gleichen Elemente aus $\mathfrak{T}$ enthaltenden Restklassen von $\mathfrak{T}/\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{T}^*/\mathfrak{Z}'$ ist nun ein Operatorisomorphismus, so daß $\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{Z}'$ ist

Umgekehrt kann auch eine der Erzeugenden h_i, etwa h_n, überflüssig sein, da sie sich mittels der anderen ausdrücken läßt. In diesem Fall ist also $\mathfrak{H}$ auch Faktorgruppe $\mathfrak{T}^{**}/\mathfrak{Z}^{**}$ der freien Gruppe $\mathfrak{T}^{**}$ mit Operatoren und den Erzeugenden $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$. Die zulässige Untergruppe $\mathfrak{Z}^{**}$ von $\mathfrak{T}^{**}$ ist der Durchschnitt von $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{T}^{**}$. Wir können nun weiter zeigen:

Satz 1: *Zwei Darstellungen einer Gruppe $\mathfrak{H}$ mit dem Operatorenring $\mathfrak{R}$ als Faktorgruppe von freien Gruppen mit demselben Operatorenring lassen sich durch Hinzunehmen und Fortlassen überflüssiger Erzeugender in endlich vielen Schritten ineinander überführen.*

Seien uns zwei solche Darstellungen von $\mathfrak{H}$ gegeben: durch die Erzeugenden $h_1, \ldots, h_n$ als $\mathfrak{T}/\mathfrak{Z}$ und durch die Erzeugenden $h_1^*, \ldots, h_m^*$ als $\mathfrak{T}^*/\mathfrak{Z}^*$. Durch die Operatorisomorphie zwischen beiden Faktorgruppen entspricht der Restklasse $[h_i]$ von $\mathfrak{T}/\mathfrak{Z}$ eine etwa durch das Element $t_i^* = r_{i1}^* h_1^* + \ldots + r_{im}^* h_m^*$ aus $\mathfrak{T}^*$ repräsentierte Restklasse $[t_i^*]$ in $\mathfrak{T}^*/\mathfrak{Z}^*$. Ebenso möge der Restklasse $[h_j^*]$ die durch $t_j = r_{j1} h_1 + \ldots + r_{jn} h_n$ aus $\mathfrak{T}$ repräsentierte Restklasse $[t_j]$ von $\mathfrak{T}/\mathfrak{Z}$ entsprechen. Wir nehmen nun sukzessive die Elemente t_j zu den Erzeugenden h_i hinzu und gelangen zu einer Darstellung von $\mathfrak{H}$ als Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{T}}/\overline{\mathfrak{Z}}$ mit den Erzeugenden $h_1, \ldots, h_n, t_1, \ldots, t_m$. Durch Hinzunahme der Elemente t_j^* zu den Erzeugenden h_j^* erhalten wir eine Darstellung von $\mathfrak{H}$ als Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{T}}^*/\overline{\mathfrak{Z}}^*$ mit den Erzeugenden $h_1^*, \ldots, h_m^*, t_1^*, \ldots, t_n^*$. Die Zuordnung

(3) $$h_i \longleftrightarrow t_i^*, \qquad t_j \longleftrightarrow h_j^*$$

definiert offenbar einen Operatorisomorphismus zwischen $\overline{\mathfrak{T}}$ und $\overline{\mathfrak{T}}^*$. Andererseits ist nach unserer Bestimmung der t_i^* und t_j die Abbildung

$$[h_i] \longleftrightarrow [t_i^*] \quad \text{und} \quad [t_j] \longleftrightarrow [h_j^*]$$

ein Operatorisomorphismus zwischen $\overline{\mathfrak{T}}/\overline{\mathfrak{Z}}$ und $\overline{\mathfrak{T}}^*/\overline{\mathfrak{Z}}^*$. Ist also

$$z = \sum_{i=1}^{n} r_i h_i + \sum_{j=1}^{m} r_j^* t_j^*$$

ein zu $\overline{\mathfrak{Z}}$ gehöriges Element, also $[z] = [0]$ in $\overline{\mathfrak{T}}/\overline{\mathfrak{Z}}$, so gilt für das Element

$$z^* = \sum_{i=1}^{n} r_i t_i^* + \sum_{j=1}^{m} r_j^* h_j^*$$

aus $\mathfrak{T}^*$: $[z^*] = [0]$ in $\overline{\mathfrak{T}}^*/\overline{\mathfrak{Z}}^*$, so daß also z^* in $\overline{\mathfrak{Z}}^*$ liegt. Ebenso gilt das Umgekehrte. Demnach entstehen die Darstellungen $\overline{\mathfrak{T}}/\overline{\mathfrak{Z}}$ und $\overline{\mathfrak{T}}^*/\overline{\mathfrak{Z}}^*$ von $\mathfrak{H}$ auseinander durch die Einführung anderer Bezeichnungen gemäß (3). Insgesamt kann somit die Darstellung $\mathfrak{T}/\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{T}^*/\mathfrak{Z}^*$ übergeführt werden durch: 1. Hinzunahme der Erzeugenden t_j zu den h_i, 2. Umbezeichnung der Erzeugenden gemäß (3), 3. Fortlassen der Erzeugenden t_i^*. Damit ist der Satz bewiesen. Wir können ihm noch die andere Fassung geben[2a]):

Satz 2: *Man gelangt von einem Erzeugendensystem $h_1, \ldots, h_n$ einer Gruppe $\mathfrak{H}$ mit Operatoren zu einem anderen $h_1^*, \ldots, h_m^*$, indem man es durch m Nullen ergänzt und mit einer invertierbaren Matrix M transformiert und in dem so gewonnenen Erzeugendensystem die überflüssigen n Nullen fortstreicht.*

Zunächst geht nämlich das Erzeugendensystem $h_1, \ldots, h_{n+m}$ mit $h_{n+1} = \ldots = h_{n+m} = 0$ mit Hilfe der Matrix

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ r_{ji} & E_m \end{pmatrix},$$

[2a]) Vgl. auch: H. Fitting, Die Determinantenideale eines Moduls. Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 46 (1936).

in der E_k eine k-zeilige quadratische Einheitsmatrix bedeutet, in das Erzeugendensystem $h_1, \ldots, h_n, t_1, \ldots, t_m$ oder $t_1^*, \ldots, t_n^*, h_1^*, \ldots, h_m^*$ über. Dieses System geht dann durch die zu

$$\overline{\overline{M}} = \begin{pmatrix} r_{ji}^* & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix}$$

inverse Matrix $\overline{\overline{M}}^{-1}$ in das System $h_{m+1}^*, \ldots, h_{m+n}^*, h_1^*, \ldots, h_m^*$ mit $h_{m+1}^* = \ldots = h_{m+n}^* = 0$ über. Durch die invertierbare Matrix $M = \overline{\overline{M}}^{-1} \overline{M}$ wird also $h_1, \ldots, h_{m+n}$ nach $h_{m+1}^*, \ldots, h_{m+n}^*, h_1^*, \ldots, h_m^*$ übergeführt.

§ 2.

Homotopieketten von Gruppenbildern.

Es sei eine Gruppe $\mathfrak{F}$ vorgelegt, die sich durch n Elemente $S_1, S_2, \ldots, S_n$ erzeugen läßt, also Faktorgruppe der freien Gruppe $\mathfrak{S}$ der freien Erzeugenden S_i ist. Zur Gruppe $\mathfrak{F}$ und ihren speziellen Erzeugenden S_i konstruieren wir einen *Streckenkomplex* $\mathfrak{C}$ als ihr *Gruppenbild*. Jedem Element F von $\mathfrak{F}$ möge in $\mathfrak{C}$ eineindeutig ein mit Fp bezeichneter Punkt entsprechen. $\mathfrak{C}$ besitze ferner n Klassen von Strecken $[s_i]$, die bzw. den Erzeugenden S_i zugeordnet sind. Jedem Element F von $\mathfrak{F}$ entspreche in jede Klasse $[s_i]$ genau eine Strecke und ihr Inverses. Die Strecken der Klasse $[s_i]$ können daher eindeutig durch Symbole Fs_i^ε mit $\varepsilon = \pm 1$ bezeichnet werden. Fs_i beginne im Punkte Fp und endige im Punkte FS_ip, und Fs_i^{-1} sei die zu ihr inverse Strecke. Im Punkte Fp beginnen also die n Strecken Fs_i und endigen die n Strecken $FS_i^{-1}s_i$. Falls kein S_i gleich 1 ist in $\mathfrak{F}$, sind diese Strecken sämtlich voneinander verschieden, und man kann sagen: von jedem Punkt Fp gehen $2n$ Strecken Fs_i und $FS_i^{-1}s_i^{-1}$ aus, die sich zu Paaren auf die Streckenklassen $[s_i]$ verteilen. Wir können daher in folgender Weise *Selbstabbildungen von* $\mathfrak{C}$ definieren, *die die Strecken jeder Klasse auf sich abbilden*:

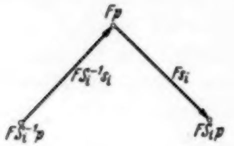


Fig. 1.

Ist F' ein beliebiges Element aus $\mathfrak{F}$, so gehe Fp in $F'Fp$ und die in Fp beginnende Strecke Fs_i in die in $F'Fp$ beginnende Strecke $F'Fs_i$ über; entgegengesetzt gleiche Strecken mögen auf ebensolche abgebildet werden.

Da nämlich der Endpunkt FS_ip von Fs_i hierbei in den Endpunkt $F'FS_ip$ von $F'Fs_i$ übergeht, bleiben alle Berandungsbeziehungen erhalten und unsere Festsetzung ist tatsächlich eine Selbstabbildung von $\mathfrak{C}$. *Offenbar bilden diese Selbstabbildungen eine zu* $\mathfrak{F}$ *isomorphe Gruppe*, und die zu F' definierte Selbstabbildung kann mit F' bezeichnet werden.

Wir können jetzt in der abelschen *Gruppe* $\mathfrak{K}$ *aller* 1-*Ketten von* $\mathfrak{C}$, die im allgemeinen unendlich viele Erzeugende besitzt, mit Hilfe der von den Selbstabbildungen F von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{K}$ induzierten Automorphismen Operatoren einführen. Dadurch wird $\mathfrak{K}$ zu einer Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und dem Gruppenring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{F}$ als Operatorenring. Ebenso verfahren wir mit der Gruppe der 0-Ketten von $\mathfrak{C}$. Wir sprechen sodann von den „*Homotopieketten*“ des Gruppenbildes $\mathfrak{C}$ in Anlehnung an die von Herrn Reidemeister[3]) eingeführte Bezeichnungsweise.

Wir nennen eine Gesamtheit von Punkten und Strecken einen *Fundamentalbereich von* $\mathfrak{C}$, wenn jeder Punkt und jede Strecke von $\mathfrak{C}$ aus genau einem der Punkte bzw. Strecken des Fundamentalbereichs mittels einer eindeutig bestimmten Selbstabbildung hervorgeht. Offenbar enthält jeder Fundamentalbereich von $\mathfrak{C}$ genau einen Punkt Fp, sowie je ein Streckenpaar $F_i s_i$, $F'_i s_i^{-1}$ aus jeder Streckenklasse $[s_i]$. Wir verabreden nun, daß wir das Einheitselement von $\mathfrak{F}$ mit 1 bezeichnen und vor den Symbolen p und $s_i^{\pm 1}$ fortlassen wollen. Dann werden wir speziell den aus dem Punkte p und den Strecken $s_1^{\pm 1}, \ldots, s_n^{\pm 1}$ gebildeten Fundamentalbereich benutzen.

Indem wir nun der Strecke $F s_i^{\varepsilon}$ die Kette $\varepsilon \cdot F s_i$ zuordnen, erhalten wir die Gesamtheit der 1-Ketten von $\mathfrak{C}$ in der Form

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ji}\, s_i$$

mit Koeffizienten r_{ji} aus dem Gruppenring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{F}$. Entsprechend erhält man die Gesamtheit der 0-Ketten von $\mathfrak{C}$ in der Gestalt

$$r p$$

mit r aus $\mathfrak{R}$.

Die Summe zweier 1-Ketten c_1 und c_2 ist die Kette c_3 mit

$$r_{3i} = r_{1i} + r_{2i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Außerdem können wir zu einer 1-Kette c und einem Ringelement r die 1-Kette $c' = rc$ durch

$$r'_i = r\, r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definieren; dann geht bei einer Selbstabbildung F von $\mathfrak{C}$ die 1-Kette c tatsächlich in Fc über. Offenbar ist die Gruppe $\mathfrak{K}$ eine freie Gruppe mit dem Operatorenring $\mathfrak{R}$ und den Erzeugenden s_i.

Wir betrachten nun die Operation der *Randbildung* in unserer Bezeichnungsweise. Jeder 1-Kette c ist eine 0-Kette rp als ihr „*Rand*“ zugeordnet und es ist

$$R(c_1 + c_2) = R(c_1) + R(c_2). \tag{4}$$

[3]) Vgl. K. Reidemeister, Homotopiegruppen von Komplexen, Hamb. Abh. 10 (1934), S. 211.

Da die Selbstabbildungen F die Inzidenzbeziehungen nicht stören, ist weiterhin

$$R(Fc) = F R(c)$$

und mittels (4) folgt sogar

$$R(rc) = r R(c). \tag{5}$$

Im folgenden wird es die Sprechweise erleichtern, wenn wir statt der 0-Kette rp das Ringelement r allein als „*Rand*" von c auffassen. Nach (4) und (5), die natürlich auch jetzt noch gelten, bestimmt dann die Randoperation R eine Abbildung der Kettengruppe $\mathfrak{K}$ auf ein *Linksideal* $\mathfrak{r}$ *des Gruppenringes* $\mathfrak{R}$. Es gilt nun weiter

$$R(\sum_{i=1}^{n} r_i s_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i R(s_i). \tag{6}$$

Da nun die Strecke s_i in p beginnt und in $S_i p$ endet, so ist:

$$R(s_i) = (1 - S_i). \tag{7}$$

Schließlich erwähnen wir noch für spätere Betrachtungen, daß eine Kette c_w, die dem von p nach Fp führenden Weg w entspricht, den Rand

$$R(c_w) = (1 - F) \tag{8}$$

besitzt. Einem geschlossenen Weg entspricht demnach eine Kette mit dem Rande 0. Wir nennen Ketten mit dem Rande 0 allgemein „*geschlossen*". Die Gesamtheit der geschlossenen Ketten von $\mathfrak{C}$ bildet dann wegen (4) und (5) eine zulässige Untergruppe $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$, so daß die Faktorgruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ wieder eine Gruppe mit Operatoren ist.

Die zur Konstruktion eines Gruppenbildes $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{F}$ notwendige Verwendung eines Erzeugendensystems $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathfrak{F}$ ermöglicht eine eineindeutige Zuordnung der Worte W der freien Gruppe $\mathfrak{S}$ zu den in einem fest gewählten Punkt beginnenden Wegen von $\mathfrak{C}$. Als diesen Aufpunkt benutzen wir den Punkt p und haben alsdann festzusetzen: Ist

$$w = (F_1 s_{i_1}^{\varepsilon_1}) \cdot (F_2 s_{i_2}^{\varepsilon_2}) \cdot \ldots \cdot (F_k s_{i_k}^{\varepsilon_k}) \qquad (\varepsilon_j = \pm 1)$$

ein in p beginnender Weg in $\mathfrak{C}$, so ersetze man jede Strecke $F_j s_{i_j}^{\varepsilon_j}$ aus w formal durch das Element $S_{i_j}^{\varepsilon_j}$ von $\mathfrak{S}$, so daß dem Weg w eindeutig das Wort

$$W = S_{i_1}^{\varepsilon_1} S_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots S_{i_k}^{\varepsilon_k}$$

von $\mathfrak{S}$ entspricht. Ist umgekehrt W gegeben, so ersetze man jeden Faktor $S_{i_j}^{\varepsilon_j}$ formal durch eine Strecke $F_j s_{i_j}^{\varepsilon_j}$ von $\mathfrak{C}$, wobei F_j so zu wählen ist, daß der Anfangspunkt von $F_j s_{i_j}^{\varepsilon_j}$ mit dem Endpunkt von $F_{j-1} s_{i_{j-1}}^{\varepsilon_{j-1}}$ übereinstimmt und $F_1 s_{i_1}^{\varepsilon_1}$ in p beginnt; diese Bestimmung der F_j ist ein-

deutig, da in jedem Punkte von $\mathfrak{C}$ genau zwei Strecken $F s_i$ und $F' s_i^{-1}$ derselben Streckenklasse beginnen. Man erkennt, daß, wenn dem Weg w nach dieser Vorschrift das Wort W aus $\mathfrak{S}$ entspricht, dem Wort W von $\mathfrak{S}$ wiederum der Weg w von $\mathfrak{C}$ entspricht. Die in p beginnenden Wege von $\mathfrak{C}$ und die Worte von $\mathfrak{S}$ sind daher eineindeutig einander zugeordnet.

Durch Induktion beweist man weiter, daß der Endpunkt des dem Worte W zugeordneten Weges w der Punkt Wp ist; dabei hat man in dem Symbol Wp unter W ein in den Erzeugenden S_i geschriebenes Element von $\mathfrak{F}$ zu verstehen. Größerer Klarheit halber verabreden wir: den Homomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir mit $h(\mathfrak{S}) = \mathfrak{F}$. Dann haben wir bewiesen:

Satz 3: *Unsere Vorschrift ordnet die Worte von $\mathfrak{S}$ und die in p beginnenden Wege von $\mathfrak{C}$ einander eineindeutig zu. Der dem Wort W von $\mathfrak{S}$ entsprechende Weg w endigt in $h(W)p$.*

Insbesondere *entsprechen* demnach *den Relationen von $\mathfrak{F}$ die geschlossenen in p beginnenden Wege von $\mathfrak{C}$ und umgekehrt.* Berücksichtigen wir nun, daß den Wegen von $\mathfrak{C}$ eindeutig bestimmte 1-Ketten entsprechen, so sind den Worten von $\mathfrak{S}$ eindeutig bestimmte 1-Ketten von $\mathfrak{C}$ zugeordnet, insbesondere den Relationen von $\mathfrak{F}$ geschlossene Ketten aus $\mathfrak{K}_0$.

Es seien nun zwei Worte W und $\overline{W}$ aus $\mathfrak{S}$ gegeben, denen bzw. die Wege w und $\overline{w}$, sowie die Ketten c bzw. $\overline{c}$ entsprechen mögen. Aus unserer Vorschrift entnimmt man, daß dem Wort $W\overline{W}$ von $\mathfrak{S}$ der Weg $w\,(h(W)\overline{w})$ von $\mathfrak{C}$ entspricht, da nämlich w in $h(W)p$ endigt. Man hat also den Weg $\overline{w}$ durch eine Selbstabbildung von $\mathfrak{C}$ so zu verschieben, daß sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt von w übereinstimmt, und den verschobenen Weg $h(W)\overline{w}$ an w anzuhängen. Mithin:

Satz 4: *Gemäß unserer Vorschrift entspricht dem Wort S_i aus $\mathfrak{S}$ die Kette s_i, dem Wort S_i^{-1} die Kette $-h(S_i^{-1})s_i$. Entsprechen den Worten W_i die Ketten c_i, so entspricht dem Wort $W_1 W_2$ die Kette*

$$c_1 + h(W_1)c_2 = c_1 + (1 - R(c_1))c_2 \tag{9}$$

aus $\mathfrak{K}$.

Nach diesen Angaben ist die zu einem Wort aus $\mathfrak{S}$ gehörige Kette formal berechenbar.

Wir bestimmen jetzt die Gesamtheit der den Worten aus $\mathfrak{S}$ zugeordneten Ketten. Da sie den von p nach einem Punkt Fp von $\mathfrak{C}$ führenden Wegen entsprechen, haben sie den speziellen Rand (8), und wir zeigen umgekehrt:

Satz 5: *Eine Kette aus $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann einem Wort aus $\mathfrak{S}$ zugeordnet, wenn sie einen Rand der Form* (8) *besitzt.*

Ist eine Kette c vorgelegt, die die Bedingung (8) erfüllt, so müssen wir beweisen, daß es einen in p beginnenden Weg w gibt, zu dem die Kette c gehört. Zu diesem Zweck bezeichnen wir jede in c vorkommende Strecke $\pm F s_j$ mit einem Symbol $+t_{\alpha_i}$; dann können wir schreiben: $c = \sum_i n_i t_{\alpha_i}$ mit ganzen positiven n_i. Die durch c eindeutig bestimmte Zahl $\sum_i n_i$ nennen wir die „Länge" der Kette c und benutzen sie zu einem Induktionsschluß. Es ist

$$R(t_{\alpha_i}) = F_{a\alpha_i} - F_{e\alpha_i},$$

also

$$R(c) = \sum_i n_i (F_{a\alpha_i} - F_{e\alpha_i}),$$

und die Bedingung (8) lautet daher

$$\sum_i n_i (F_{a\alpha_i} - F_{e\alpha_i}) = 1 - F. \tag{10}$$

Ist nun $F \neq 1$, so muß es ein i geben, so daß $F_{a\alpha_i} = 1$ ist. Dies sei etwa für $i = 1$ der Fall. Dann erfüllt die Kette $c' = c - t_{\alpha_1}$ die Identität

$$\sum_i n'_i (F_{a\alpha_i} - F_{e\alpha_i}) = F_{e\alpha_1} - F.$$

Nehmen wir wieder $F_{e\alpha_1} \neq F$ an, so erfüllt die um Eins „kürzere" Kette $F_{e\alpha_1}^{-1} c'$ wieder eine Identität der Form (10). Ist für diese Kette bereits der gesuchte Weg aufgewiesen, so gibt es zu c' auch einen Weg w'; er beginnt in $F_{e\alpha_1} p$. Zu c gehört dann einfach der Weg $w = t_{\alpha_1} w'$. Zur Anwendung von Induktion nach der Kettenlänge ist also nur noch die Behandlung des Falles $F = 1$ in (10) notwendig. In diesem Falle ist es gleichgültig, welches der t_{α_i} wir von c abziehen, sagen wir etwa wieder t_{α_1}. Dann erhält man für $c' = c - t_{\alpha_1}$ die Identität

$$\sum_i n'_i (F_{a\alpha_i} - F_{e\alpha_i}) = F_{e\alpha_1} - F_{a\alpha_1},$$

und $F_{e\alpha_1}^{-1} c'$ ist wieder kürzer als c und erfüllt ebenfalls eine Identität der Form (10). Da nun der zu c' gehörige Weg w' in $F_{e\alpha_1} p$ beginnen und in $F_{a\alpha_1} p$ enden muß, kann man zu c den Weg $w^* t_{\alpha_1} w' w^{*-1}$ angeben, wobei w^* ein beliebiger Weg von p nach $F_{a\alpha_1} p$ sein darf. Damit ist der Satz 5 bewiesen und insbesondere gezeigt:

Satz 6: *Zu jeder Kette aus $\mathfrak{K}_0$ existiert wenigstens ein in p beginnender geschlossener Weg, dem sie entspricht.*

Da nun weiterhin mit dem geschlossenen Weg w auch jedem transformierten geschlossenen Weg $\bar{w} w \bar{w}^{-1}$ dieselbe Kette c_w aus $\mathfrak{K}_0$ entspricht, so gilt:

Satz 7: *Den Relationen von $\mathfrak{F}$ entsprechen die sämtlichen Ketten aus $\mathfrak{K}_0$.*

Wir machen von jetzt an die weitere *Voraussetzung, daß die Gruppe* $\mathfrak{F}$ mit den Erzeugenden S_i *ein endliches System von definierenden Relationen*

$$R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_\alpha$$

besitzt. Den R_i mögen die geschlossenen Wege $w_1, w_2, \ldots, w_\alpha$ von $\mathfrak{C}$ entsprechen und diesen die Ketten $c_1, c_2, \ldots, c_\alpha$ von $\mathfrak{K}_0$. Wir behaupten nun den

Satz 8: *Die den definierenden Relationen* R_i *von* $\mathfrak{F}$ *entsprechenden Ketten* $c_1, \ldots, c_\alpha$ *erzeugen die zulässige Untergruppe* $\mathfrak{K}_0$ *von* $\mathfrak{K}$.

Wir haben nach Satz 7 nur noch zu zeigen, daß den Relationen von $\mathfrak{F}$ nur Ketten der Form $r_1 c_1 + r_2 c_2 + \ldots + r_\alpha c_\alpha$ zugeordnet sind. Zunächst entsprechen den Elementen $W R_k^{\pm 1} W^{-1}$ von $\mathfrak{S}$ gewisse Wege $w\ (h(W) \cdot w_k^{\pm 1}) \cdot w^{-1}$ von $\mathfrak{C}$ und daher die geschlossenen Ketten $\pm h(W) c_k$. Dem Produkt zweier Relationen von $\mathfrak{F}$ entspricht aber gemäß (9) die Summe der den Faktoren zugeordneten Ketten.

Aus Satz 8 erkennt man auch, daß $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ ein endliches System von definierenden Relationen, bestehend aus den Ketten c_i, besitzt. — Zum Abschluß dieser Untersuchungen über die Homotopieketten eines Gruppenbildes wenden wir uns der Frage zu, wie sich die Faktorgruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ beim Wechsel der Erzeugenden von $\mathfrak{F}$ verhält.

Macht man ein beliebiges Element von $\mathfrak{F}$ zur neuen Erzeugenden S_{n+1} unter gleichzeitiger Hinzunahme der neuen definierenden Relation

$$R_{\alpha+1} = S_{n+1} \cdot S_{n+1}^{-1}(S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

so muß man durch Einführung einer neuen Streckenklasse $[s_{n+1}]$ von $\mathfrak{C}$ zu einem Gruppenbild $\mathfrak{C}'$ übergehen; die neuen Strecken werden sinngemäß mit $F s_{n+1}^{\pm 1}$ bezeichnet. Die Gruppe $\mathfrak{K}'$ aller Ketten von $\mathfrak{C}'$ geht dann aus $\mathfrak{K}$ durch Hinzunahme einer neuen Erzeugenden s_{n+1} hervor; ebenso gelangt man nach Satz 8 von $\mathfrak{K}_0$ zu $\mathfrak{K}_0'$ durch Hinzunahme einer neuen Erzeugenden $c_{\alpha+1}$, nämlich der dem Wort $R_{\alpha+1}$ in $\mathfrak{C}'$ entsprechenden Kette. Wie man aus der besonderen Gestalt von $R_{\alpha+1}$ entnimmt, hat $c_{\alpha+1}$ die Form

$$c_{\alpha+1} = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i + s_{n+1}.$$

Nach den Untersuchungen des § 1 ist demnach $\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}_0'$ nur eine andere Darstellung von $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ als Faktorgruppe einer freien Gruppe mit Operatoren. Also sind $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}_0'$ operatorisomorph. Läßt man andererseits in $\mathfrak{F}$ eine eliminierbare Erzeugende fort, so muß man von $\mathfrak{C}$ zu einem Gruppenbild $\mathfrak{C}''$ übergehen. Der Übergang von $\mathfrak{C}''$ nach $\mathfrak{C}$ ist dann aber vom Typus des eben behandelten von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{C}'$. Also sind auch $\mathfrak{K}''/\mathfrak{K}_0''$ und $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ operatorisomorph. Damit haben wir bewiesen:

Satz 9: *Die Gruppe* $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ *mit dem Operatorenring* $\mathfrak{R}$ *ist der Gruppe* $\mathfrak{F}$ *invariant zugeordnet.*

§ 3.

Über Bilder von Gruppenpaaren.

Wir wollen das angewendete Verfahren zur Konstruktion von $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ verallgemeinern, indem wir den eindimensionalen Komplex $\mathfrak{C}$ in geeigneter Weise zu einem zweidimensionalen Komplex $\mathfrak{C}_2$ erweitern. Wir definieren den *Flächenkomplex* $\mathfrak{C}_2$ durch folgende Axiome:

1. Der in $\mathfrak{C}_2$ enthaltene Streckenkomplex sei identisch mit dem Gruppenbild $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{F}$ und den Erzeugenden S_i.

2. Die den Relationen $R_1, R_2, \ldots, R_\beta$, $\beta \leqq \alpha$, von $\mathfrak{F}$ entsprechenden Wege $w_1, w_2, \ldots, w_\beta$ von $\mathfrak{C}$ beranden je ein Flächenstück f_i von $\mathfrak{C}_2$; ebenso berandet jeder aus den Wegen $w_1, \ldots, w_\beta$ durch eine Selbstabbildung F von $\mathfrak{C}$ hervorgehende Weg $F w_i$ ein Flächenstück $F f_i$. Außer den angegebenen Flächenstücken $F f_i$ enthält $\mathfrak{C}_2$ nur noch die zu ihnen inversen $F f_i^{-1}$.

3. Die durch die Selbstabbildungen F von $\mathfrak{C}$ zu jedem Flächenstück f_i definierte Klasse $[f_i]$ von Flächenstücken $F f_i^{\pm 1}$ enthalte lauter verschiedene Elemente: $F f_i^\varepsilon \neq F' f_i^\varepsilon$, wenn $F \neq F'$.

Man erkennt, daß sich jede Selbstabbildung F' von $\mathfrak{C}$ zu einer *fixelementfreien Selbstabbildung* von $\mathfrak{C}_2$ erweitern läßt, bei der das Flächenstück $F f_i^\varepsilon$ in das Flächenstück $F' F f_i^\varepsilon$ derselben Klasse $[f_i]$ übergeht. $\mathfrak{C}_2$ besitzt also ebenfalls eine zu $\mathfrak{F}$ isomorphe Gruppe von Selbstabbildungen.

Der Flächenkomplex $\mathfrak{C}_2$ gewinnt nun dadurch eine gruppentheoretische Bedeutung, daß er offenbar zu einem *Gruppenpaar* $\mathfrak{G}, \mathfrak{F}$ konstruiert ist, in welchem $\mathfrak{G}$ die Gruppe mit den Erzeugenden $S_1, \ldots, S_n$ und den definierenden Relationen $R_1, \ldots, R_\beta$ bedeutet. Da die Worte $R_1, \ldots, R_\beta$ auch Relationen von $\mathfrak{F}$ sind, *ist* $\mathfrak{G}$ *homomorph auf* $\mathfrak{F}$ *abgebildet*. $\mathfrak{C}_2$ gehört also zu einem Paar homomorpher Gruppen $\mathfrak{G}, \mathfrak{F}$.

Wir führen jetzt in $\mathfrak{C}_2$ 2-Ketten ein, indem wir dem Flächenstück $F f_i^\varepsilon$ die 2-Kette $\varepsilon F f_i$ zuordnen, und erhalten dann die Gesamtheit aller 2-Ketten in der Form

$$f = \sum_{i=1}^{\beta} r_i f_i$$

mit Koeffizienten r_i aus $\mathfrak{R}$. Die 2-Ketten mit Operatoren bilden dann eine freie Gruppe mit dem Operatorenring $\mathfrak{R}$ und den freien Erzeugenden f_i.

Weiter erklären wir den Rand einer 2-Kette, indem wir setzen

$$R(f_i) = c_i,$$

wobei c_i die einem Randweg von f_i entsprechende Kette ist. Da alle Randwege von f_i aus w_i durch zyklische Vertauschungen der Faktoren von w_i entstehen, ist c_i von der Auswahl des Randweges von f_i unabhängig

und mit der zu dem Wort R_i in § 2 bestimmten Kette c_i identisch. Weiter setzen wir:

$$R\left(\sum_{i=1}^{\beta} r_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{\beta} r_i R(f_i) = \sum_{i=1}^{\beta} r_i c_i.$$

Hiernach entspricht die einem beliebigen Flächenstück $F f_i^{\pm 1}$ zugeordnete Randkette $\pm F c_i$ einem Randweg dieses Flächenstücks. Es gilt

$$R(r \cdot f) = r \cdot R(f) \quad \text{und} \quad R(f + f') = R(f) + R(f').$$

Die Gesamtheit der *berandenden* 1-Ketten von $\mathfrak{C}_2$ bildet also eine zulässige Untergruppe $\mathfrak{K}_r$ von $\mathfrak{K}$, die durch die Ketten $c_1, \ldots, c_\beta$ erzeugt wird und in $\mathfrak{K}_0$ enthalten ist.

Wir können daher jetzt die Faktorgruppen $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$ mit dem Operatorenring $\mathfrak{R}$ bilden und ihre Bedeutung für das Gruppenpaar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ untersuchen. Im Spezialfall $\alpha = \beta$, also $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$, ist nach Satz 8 $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_r$ und daher die bisher nur betrachtete Gruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ gleich $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$.

Wie im Beweise zu Satz 8 erkennen wir wieder, daß den Folgerelationen der $R_1, \ldots, R_\beta$ die sämtlichen Potenzprodukte von Wegen $w_F (F w_i) w_F^{-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, \beta)$ entsprechen, in denen w_F ein beliebiger von p nach $F p$ führender Weg ist. Da aber dem Weg $w_F (F w_i) w_F^{-1}$ die Kette $F c_i$ entspricht, so gilt auch:

S a t z 10: *Die Gruppe $\mathfrak{K}_r$ aller berandenden 1-Ketten von $\mathfrak{C}_2$ wird durch die den Relationen $R_1, \ldots, R_\beta$ von $\mathfrak{G}$ entsprechenden Ketten $c_1, \ldots, c_\beta$ erzeugt, und besteht aus allen denjenigen 1-Ketten von $\mathfrak{K}$, die Relationen von $\mathfrak{G}$ zugeordnet sind.*

Die endlich vielen Ketten c_i sind also „*definierende*" Relationen von $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$.

Wir betrachten jetzt die Abänderungen der Schreibweise von $\mathfrak{G}$ durch Erzeugende und definierende Relationen und verfolgen ihre Wirkung auf $\mathfrak{C}_2$. Nach dem Satz von Tietze[4]) kann man den Übergang zu einer anderen Schreibweise von $\mathfrak{G}$ in elementaren Schritten ausführen, die vom Typus der nachstehend behandelten vier Umformungen sind. Da in unserer Konstruktion von $\mathfrak{C}_2$ die Erzeugenden und Relationen von $\mathfrak{G}$ auch solche von $\mathfrak{F}$ sind, haben wir die Umformungen der Schreibweise von $\mathfrak{G}$ simultan mit der von $\mathfrak{F}$ vorzunehmen.

U_1. Nimmt man zu den Relationen $R_1, \ldots, R_\beta$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ eine ihrer Folgerelationen $R_{\alpha+1}$ hinzu, so werden in einen Weg $w_{\alpha+1}$ von $\mathfrak{C}$, der Potenzprodukt der Wege $w_F (F w_i) w_F^{-1}$ $(i = 1, \ldots, \beta)$ ist, und in alle Wege $F w_{\alpha+1}$ neue Flächenstücke $F f_{\alpha+1}^{\pm 1}$ eingespannt, die zusammen eine neue Flächenklasse $[f_{\alpha+1}]$ bilden.

U_2. Wird eine der Relationen $R_1, \ldots, R_\beta$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ als Folgerelation der übrigen fortgelassen, etwa R_β, so werden in $\mathfrak{C}_2$ alle Flächen-

[4]) Vgl. H. Tietze, Mon. f. Math. u. Phys. **19**, S. 1.

stücke der Klasse $[f_\beta]$ fortgelassen; es ist dabei w_β ein Potenzprodukt von Wegen $w_F(F w_i) w_F^{-1}$ $(i = 1, \ldots, \beta - 1)$.

U_3. Nimmt man zu den Erzeugenden $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ eine neue S_{n+1} hinzu, und gleichzeitig zu den definierenden Relationen beider Gruppen die Relation

$$R_{\alpha+1} = S_{n+1} \cdot S_{n+1}^{-1} (S_1, \ldots, S_n),$$

durch die S_{n+1} definiert wird, so erhält $\mathfrak{C}_2$ eine neue Streckenklasse $[s_{n+1}]$ und eine neue Flächenklasse $[f_{\alpha+1}]$; jedes neue Flächenstück besitzt auf seinem Rande genau eine der neuen Strecken, und jede neue Strecke liegt auf dem Rande genau eines neuen Flächenstücks.

U_4. Kommt die Erzeugende S_n nur in der einen definierenden Relation

$$R_\beta = S_n \cdot S_n^{-1} (S_1, \ldots, S_{n-1})$$

von $\mathfrak{G}$ vor, und soll sie mit R_β zusammen fortgelassen werden, so verliert $\mathfrak{C}_2$ eine Flächenklasse und eine Streckenklasse, deren Berandungsrelationen dieselben wie unter U_3 sind.

Nennen wir nun zwei Bilder von Gruppenpaaren *äquivalent*, wenn sie sich durch endlich viele Umformungen vom Typus der eben abgeleiteten ineinander überführen lassen, so erkennt man, daß äquivalente Bilder von Gruppenpaaren zu demselben Gruppenpaar konstruiert sind, und daß umgekehrt zu zwei Schreibweisen eines Gruppenpaares auch äquivalente Bilder gehören.

Wir vergleichen nun die zu äquivalenten Bildern gehörigen Gruppen $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ bzw. $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$.

Die Operation U_1 läßt die Gruppen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$ offenbar ungeändert; da nun der neue berandende Weg $w_{\alpha+1}$ Potenzprodukt von Wegen $w_F(F w_i) w_F^{-1}$ $(i = 1, \ldots, \beta)$ ist, kommt zu $\mathfrak{K}_r$ eine neue Erzeugende $c_{\alpha+1}$ hinzu, die sich durch die alten ausdrücken läßt. Mithin bleibt $\mathfrak{K}_r$ und damit auch $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$ ungeändert. Der zu U_1 inverse Prozeß U_2 ändert demgemäß auch keine der Gruppen.

Die Umformung U_3 bewirkt den Übergang von $\mathfrak{K}$ zu einer Gruppe $\mathfrak{K}'$, die eine neue Erzeugende s_{n+1} mehr besitzt wie $\mathfrak{K}$. Zu $\mathfrak{K}_r$ kommen als Erzeugende alle diejenigen Ketten neu hinzu, die den die neuen Flächenstücke $F f_{\alpha+1}$ berandenden Wegen $F w_{\alpha+1}$ entsprechen. Die dem Weg $w_{\alpha+1}$ entsprechende Kette $c_{\alpha+1}$ ist der neuen Relation $R_{\alpha+1}$ von $\mathfrak{G}$ zugeordnet und hat daher die Form $c_{\alpha+1} = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i + s_{n+1}$. Alle übrigen neuen Erzeugenden von $\mathfrak{K}'$ erhält man als $F c_{\alpha+1}$. Mithin entsteht $\mathfrak{K}'_r$ aus $\mathfrak{K}_r$ durch Hinzunahme der einzigen neuen Erzeugenden $c_{\alpha+1}$, die der Relation $R_{\alpha+1}$ in $\mathfrak{C}'_2$ entspricht. Nach den Entwicklungen in § 1 sind daher $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}'_r$ operatorisomorph.

U_4 ist der zu U_3 inverse Prozeß, und ändert daher $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ ebenfalls nicht.

Mit Hilfe der schon in § 2 erkannten Invarianz von $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ folgt gleichzeitig die Invarianz von $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$, so daß wir bewiesen haben:

Satz 11: *Das Bild $\mathfrak{C}_2$ des Gruppenpaares $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ ordnet diesem die Gruppen $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$ in invarianter Weise zu.*

§ 4.

Die gruppentheoretische Konstruktion der Gruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$.

Die im vorigen Paragraphen vorgenommene Verbindung des Gruppenpaares $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ mit einem Flächenkomplex $\mathfrak{C}_2$ führte zur Bestimmung zweier mit dem Paar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ invariant verknüpfter Gruppen $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$ mit Operatoren. Wir wollen jetzt zeigen, wie sich beide Gruppen auch auf rein gruppentheoretischem Wege gewinnen lassen.

Zunächst weisen wir nach, daß die Gruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ operatorisomorph zu einer von Herrn Reidemeister[5]) zum selben Gruppenpaar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ konstruierten Gruppe $\overline{\mathfrak{J}}$ ist. Wir beschreiben dazu das zitierte Verfahren.

Wir gehen von einem geordneten Gruppenpaar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ aus; zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ möge ein Homomorphismus $H(\mathfrak{G}) = \mathfrak{F}$ gegeben sein, durch den die Erzeugenden $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathfrak{G}$ auf die Erzeugenden $H(S_1), \ldots, H(S_n)$ von $\mathfrak{F}$ abgebildet sind. Die definierenden Relationen von $\mathfrak{G}$ seien die Worte $R_1, \ldots, R_\beta$. Man bilde nun das *freie Produkt* $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ und darin die durch die Elemente $G \cdot H(G^{-1})$ mit beliebigem G aus $\mathfrak{G}$ erzeugte invariante Untergruppe $\mathfrak{J}$. Durchläuft F alle Elemente von $\mathfrak{F}$, so lassen sich die Elemente

$$F S_i H(S_i^{-1}) F^{-1} = F T_i F^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

als Erzeugende und die in ihnen geschriebenen Worte

$$F R_i F^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, \beta)$$

als definierende Relationen von $\mathfrak{J}$ verwenden.

Da die Faktorgruppe $\mathfrak{P}/\mathfrak{J}$ zu $\mathfrak{F}$ isomorph ist, können wir in der Faktorkommutatorgruppe $\overline{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}/\mathfrak{K}(\mathfrak{J})$ von $\mathfrak{J}$ die durch Transformation mit Elementen aus $\mathfrak{F}$ induzierten Automorphismen zur Einführung der Elemente des Gruppenringes $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{F}$ als allgemeiner Exponenten verwenden, indem wir setzen:

$$F T F^{-1} = T^F \quad \text{und} \quad T^{F_1} T^{F_2} = T^{F_1 + F_2}.$$

[5]) K. Reidemeister und H.-G. Schumann, *L*-Polynome von Verkettungen, Hamb. Abh. 10 (1934), S. 258.

Die Gruppe $\overline{\mathfrak{J}}$ wird dadurch zu einer (multiplikativ geschriebenen) Gruppe mit Operatoren. Sie wird durch die Elemente

$$T_i = S_i H(S_i^{-1}) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

erzeugt, ist also Faktorgruppe $\mathfrak{T}/\mathfrak{T}_r$ der freien durch die Symbole T_i erzeugten Gruppe $\mathfrak{T}$ mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{R}$. Die zulässige Untergruppe $\mathfrak{T}_r$ wird durch die in den T_i ausgedrückten Worte $R_1, \ldots, R_\beta$

$$\overline{R}_i = \prod_{j=1}^{n} T_j^{r_{ij}} \qquad (i = 1, \ldots, \beta)$$

erzeugt.

Wir vergleichen nun $\mathfrak{T}/\mathfrak{T}_r$ mit der zu demselben Gruppenpaar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ konstruierten Gruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$.

Zunächst sei $\mathfrak{G}$ die freie Gruppe $\mathfrak{S}$ der S_i; dann wird der Homomorphismus H identisch mit dem in § 2 definierten Homomorphismus $h(\mathfrak{S}) = \mathfrak{F}$. Weiter ist in diesem Falle $\beta = 0$, so daß $\mathfrak{T}_r^*$ und $\mathfrak{K}_r^*$ nur das Einheitselement von $\mathfrak{T}$ bzw. $\mathfrak{K}$ enthalten. Mithin sind in diesem Falle $\mathfrak{T}/\mathfrak{T}_r^* = \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r^* = \mathfrak{K}$ freie Gruppen mit demselben Operatorenbereich $\mathfrak{R}$ und mit gleich viel freien Erzeugenden. Die eineindeutige Abbildung

$$\sum_{i=1}^{n} r_i s_i \longleftrightarrow \prod_{i=1}^{n} T_i^{r_i} \tag{11}$$

stellt dann einen Operatorisomorphismus zwischen $\mathfrak{T}/\mathfrak{T}_r^*$ und $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r^*$ her.

Innerhalb unserer Konstruktion von $\mathfrak{T}$ zum Gruppenpaar $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{F}$ kann man jedem Element W aus $\mathfrak{S}$ das Element $W \cdot H(W^{-1})$ von $\mathfrak{J}^*$, und diesem wieder die ihm entsprechende Restklasse von $\mathfrak{T} = \mathfrak{J}^*/\mathfrak{K}(\mathfrak{J}^*)$ eindeutig zuordnen. So entspricht jedem Element W von $\mathfrak{S}$ eindeutig ein Element T von $\mathfrak{T}$. Da nun in $\mathfrak{T}$ gilt:

$$S_i^{-1} H(S_i) = [H(S_i^{-1}) \cdot S_i H(S_i^{-1}) \cdot H(S_i)]^{-1} = T_i^{-H(S_i^{-1})},$$

so gilt insbesondere

$$\begin{cases} \text{dem Wort } S_i \text{ von } \mathfrak{S} \text{ entspricht das Element } T_i \text{ von } \mathfrak{T}, \\ \text{dem Wort } S_i^{-1} \text{ von } \mathfrak{S} \text{ entspricht das Element } T_i^{-H(S_i^{-1})} \text{ von } \mathfrak{T}. \end{cases} \tag{12}$$

Ist fernerhin $T = W \cdot H(W^{-1})$ und $\overline{T} = \overline{W} \cdot H(\overline{W}^{-1})$ in $\mathfrak{T}$, so gilt:

$$\begin{aligned} W\overline{W} \cdot H(\overline{W}^{-1} W^{-1}) &= W \cdot H(W^{-1}) \cdot H(W) \cdot [\overline{W} \cdot H(\overline{W}^{-1})] \cdot H(W^{-1}) \\ &= T\, \overline{T}^{H(W)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Wenn wir nun berücksichtigen, daß die Homomorphismen H und h identisch sind, so erkennt man aus dem Vergleich von (12) und (13) mit den Aussagen von Satz 4, daß die dem Wort W von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{K}$ zugeordnete Kette c mittels (11) in das dem Wort W soeben in $\mathfrak{T}$ zugeordnete Element T übergeht.

Der Relation R_i der Gruppe $\mathfrak{G}$ entspricht nun nach unserer Vorschrift in $\mathfrak{J}^*$ das Element $R_i H(R_i^{-1}) = R_i$, also in $\mathfrak{T}$ gerade das Element $\overline{R}_i$, während ihm in $\mathfrak{K}$ die Kette c_i entspricht. Demnach werden durch (11) die zu den Relationen $R_1, \ldots, R_\beta$ von $\mathfrak{G}$ bestimmten Erzeugenden $c_1, \ldots, c_\beta$ von $\mathfrak{K}_r$ bzw. auf die Erzeugenden $\overline{R}_1, \ldots, \overline{R}_\beta$ von $\mathfrak{T}_r$ abgebildet: $c_i \longleftrightarrow \overline{R}_i$. Mithin ist durch (11) gleichzeitig ein Operatorisomorphismus der zu $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ konstruierten Gruppen $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{T}/\mathfrak{T}_r$ definiert. Wir haben also bewiesen:

Satz 12: *Die zu einem Gruppenpaar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ konstruierten Gruppen $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{T}/\mathfrak{T}_r$ sind operatorisomorph.*

§ 5.

Die gruppentheoretische Konstruktion von $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$.

Wir untersuchen jetzt die Bedeutung von $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$ und erinnern zunächst daran, daß die Faktorkommutatorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}(\mathfrak{L})$ einer invarianten Untergruppe $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$ eine zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ homomorphe Automorphismengruppe besitzt, und sich daher als Gruppe mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{N}$, dem Gruppenring der Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$, auffassen läßt. Wir beweisen nun:

Satz 13: *Besteht zwischen den Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ die Homomorphie*

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{L} \cong \mathfrak{F},$$

so ist die zu $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ konstruierte Gruppe $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$ operatorisomorph zu $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}(\mathfrak{L})$.

Den Beweis dieses Satzes erbringen wir in drei Schritten. Ist zunächst

$$\mathfrak{S}/\mathfrak{M} \cong \mathfrak{F},$$

also $\mathfrak{M}$ die von allen Relationen von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{S}$ gebildete invariante Untergruppe, und daher $h(\mathfrak{M}) = 1$, so zeigen wir:

Satz 14: *Die zu dem Gruppenpaar $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{F}$ konstruierte Gruppe $\mathfrak{K}_0$ ist operatorisomorph zu $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$.*

Gemäß Satz 7 entsprechen den Worten aus $\mathfrak{M}$ die sämtlichen Ketten aus $\mathfrak{K}_0$. Wie man nun weiter aus (9) entnimmt, entspricht dem Produkt $M\overline{M}$ zweier Elemente M und $\overline{M}$ aus $\mathfrak{M}$ die Summe $c_0 + \bar{c}_0$ der den Faktoren zugeordneten geschlossenen Ketten c_0 und $\bar{c}_0$. Demnach definiert die Zuordnung von Ketten zu den Worten aus $\mathfrak{M}$ eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf die abelsche Gruppe $\mathfrak{K}_0$. Da $\mathfrak{K}_0$ abelsch ist, muß hierbei jedem Element aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ die leere Kette zugeordnet sein. Wir zeigen nun, daß auch nur den Elementen aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ die leere Kette entspricht.

Es sei w_0 der dem Wort M_0 aus $\mathfrak{M}$ entsprechende Weg von $\mathfrak{C}$, und w_0 entspreche die leere Kette. Wir bezeichnen die von w_0 der Reihe

nach durchlaufenen Strecken mit t_i, also $w_0 = t_1 \cdot t_2 \ldots t_q$. Jeden von w_0 berührten Punkt von $\mathfrak{C}$ verbinden wir durch einen Hilfsweg mit p. Aus w_0 und diesen endlich vielen Hilfswegen bestimmen wir einen Weg w_0', der zu demselben reduzierten Wort von $\mathfrak{S}$ gehört wie w_0. Und zwar schieben wir zwischen je zwei Strecken t_i und t_{i+1} den zum Endpunkt von t_i gewählten Hilfsweg nach p und dessen Inverses ein: $t_i w w^{-1} t_{i+1}$; w_0' besteht daher aus q geschlossenen Teilwegen $w_i = \bar{w}^{-1} t_i w$, welche in p beginnen und bzw. die Strecken t_i durchlaufen. Ist $t_i = t_j$, so ist auch $w_i = w_j$; ist $t_i t_j$ auf einen Punkt reduzierbar, so ist $w_i w_j$ auf den Punkt p reduzierbar. Da nun w_0 jede von ihm durchlaufene Strecke gleich oft in beiden Richtungen passieren muß, damit ihm die leere Kette entspricht, so lassen sich die Teilwege w_i von w_0' in einer solchen Reihenfolge zu einem Weg w_0'' zusammensetzen, daß w_0'' auf den Punkt p reduzierbar ist.

Ist nun M_i das dem Weg w_i entsprechende Wort aus $\mathfrak{M}$, so gilt $M_0 = M_1 M_2 \ldots M_q$. Dem Weg w_0'' entspricht dann ein Wort $\bar{M}_0$ von $\mathfrak{M}$, welches mit M_0 in derselben Restklasse von $\mathfrak{M}$ nach $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ liegt, und welches in $\mathfrak{M}$ gleich dem Einheitselement ist. Mithin gehört M_0 zu $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$, wie behauptet worden war.

Ist W ein beliebiges Element aus $\mathfrak{S}$, und M ein solches aus $\mathfrak{M}$, so ist die Abbildung

$$M \to W M W^{-1}$$

ein Automorphismus von $\mathfrak{M}$, der auch in $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ einen solchen induziert. Gehört W zu $\mathfrak{M}$, so ist der in $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ induzierte Automorphismus die Identität. Also besitzt $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ eine zu $\mathfrak{S}/\mathfrak{M} \cong \mathfrak{F}$ homomorphe Gruppe von Automorphismen. Da nun $\mathfrak{M}$ durch die mit allen W aus $\mathfrak{S}$ zu bildenden Elemente $W R_1 W^{-1}, \ldots, W R_a W^{-1}$ erzeugt wird, läßt sich $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ als Gruppe mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{R}$ und endlich vielen Erzeugenden auffassen. Entspricht nun dem Element $\mathfrak{M}$ die Kette c_0, so entspricht dem Element $W M W^{-1}$ die Kette $h(W) c_0$, während ihm in $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ das Element $M^{h(W)}$ zugeordnet ist. Mithin sind $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ und $\mathfrak{K}_0$ sogar operatorisomorph.

Es sei jetzt weiter

$$\mathfrak{S}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{G},$$

also $\mathfrak{N}$ die von den Relationen von $\mathfrak{G}$ gebildete invariante Untergruppe von $\mathfrak{S}$, und daher $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}$; es enthält nach Satz 10 die Gruppe $\mathfrak{K}_r$ die sämtlichen den Elementen von $\mathfrak{N}$ zugeordneten Ketten. Das heißt: die Gruppe $\mathfrak{N}$ wird bei dem Homomorphismus $\mathfrak{M} \to \mathfrak{K}_0$ auf $\mathfrak{K}_r$ abgebildet. Da nun $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ isomorph sind, so ist $\mathfrak{K}_r$ zu

$$\mathfrak{N}/(\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \frown \mathfrak{N}) \quad \text{oder} \quad [\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{N}]/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$$

isomorph, wobei $\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{N}$ den Durchschnitt und $\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{N}$ das Kompositum der Gruppen $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ und $\mathfrak{N}$ bezeichnen. Daraus folgen dann die Isomorphien:

$$(14) \qquad \mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r \cong [\mathfrak{M}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})]/[\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{N}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})] \cong \mathfrak{M}/[\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{N}].$$

Zum endgültigen Beweis unseres Satzes 13 benötigen wir noch den folgenden

Hilfssatz: Ist $\mathfrak{N}$ invariante Untergruppe einer Gruppe $\mathfrak{M}$, so gilt $\mathfrak{K}(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}) = [\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{N}]/\mathfrak{N}$.

Durchlaufen M_1, M_2 ganz $\mathfrak{M}$, so erzeugen die Elemente

$$M_1 \mathfrak{N} M_2 \mathfrak{N} \mathfrak{N} M_1^{-1} \mathfrak{N} M_2^{-1} = M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1} \mathfrak{N}$$

die Gruppe $\mathfrak{K}(\mathfrak{M}/\mathfrak{N})$. Da auch $\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{N} / \mathfrak{N}$ von den Elementen

$$M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1} N \mathfrak{N} = M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1} \mathfrak{N}$$

erzeugt wird, folgt die Behauptung.

Da nun $\mathfrak{L} \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ ist, so ist

$$\mathfrak{L}/\mathfrak{K}(\mathfrak{L}) \cong [\mathfrak{M}/\mathfrak{N}]/\mathfrak{K}(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}) \cong [\mathfrak{M}/\mathfrak{N}]/[\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{N} / \mathfrak{N}] \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{N},$$

woraus zusammen mit (14) die Isomorphie der Gruppen $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}(\mathfrak{L})$ und $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$ folgt.

Entspricht nun der Restklasse $M \cdot \mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ die Restklasse $[c_0]$ von $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$, so entspricht der Restklasse $W M W^{-1} \cdot \mathfrak{N}$ die Restklasse $[h(W)\, c_0]$. Mithin ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}(\mathfrak{L}) \cong \mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$ eine Operatorisomorphie.

Der Satz 14 verschafft uns auch die Kenntnis der zum Gruppenpaar $\mathfrak{G}$, 1 konstruierten Gruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$. Da hier $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}$ ist, so ist $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$. Da weiterhin $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}$ ist, so sind die Erzeugenden s_i von $\mathfrak{K}$ geschlossene Ketten, mithin $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0$. Es gilt also hier

$$\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r \cong \mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G}).$$

§ 6.

Über die Kennzeichnung der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Nachdem die gruppentheoretische Bedeutung der Gruppe $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ und ihrer zulässigen Untergruppe $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$ erkannt ist, wollen wir uns nun mit der Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0 \cong \mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ beschäftigen, die nach § 2 allein durch $\mathfrak{F}$ bestimmt ist.

Zunächst bemerken wir, daß ein Ring mit Einselement als abelsche Gruppe in bezug auf die Addition seine eigenen Elemente als (Links-) Multiplikatoren gestattet. Er kann daher als *Gruppe mit Operatoren* aufgefaßt werden. Seine Linksideale sind die zulässigen Untergruppen.

Wir haben nun in § 2 die Elemente von $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ eineindeutig auf die Elemente eines Linksideales $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$ abgebildet. Aus den für diese Ab-

bildung gültigen Regeln (4) und (5) entnimmt man, daß es sich dabei um einen Operatorisomorphismus gehandelt hat.

Das Ideal $\mathfrak{r}$ wurde in § 2 als ein Linksideal mit der Basis

$$(1-S_1),\ (1-S_2),\ \ldots,\ (1-S_n)$$

definiert. Da sich nun wegen

$$F(1-F') = (1-FF') - (1-F)$$

jedes Element von $\mathfrak{r}$ in der Form $\sum_i m_i(1-F_i)$ mit F_i aus $\mathfrak{F}$ und ganzen Zahlen m_i schreiben läßt, und

$$(1-F')F = (1-F'F) - (1-F)$$

auch diese Form hat, ist $\mathfrak{r}$ ein invariant durch $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{R}$ definiertes zweiseitiges Ideal. $\mathfrak{r}$ ist dasjenige Ideal von $\mathfrak{R}$, welches durch den Hauptcharakter $\chi(\mathfrak{F}) = 1$, der $\mathfrak{R}$ auf den Ring der ganzen Zahlen abbildet, in das Nullideal übergeführt wird. Wir nennen dieses ausgezeichnete Ideal $\mathfrak{r}$ das „*Grundideal*" von $\mathfrak{R}$ und haben den

Satz 15: *Die Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0$ ist operatorisomorph zum Grundideal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$.*

Da die Gruppe $\mathfrak{K}_r$ nur geschlossene Ketten enthält, kann man die Randoperation R von $\mathfrak{K}$ auch auf $\mathfrak{H}$ übertragen. Die „geschlossenen" Elemente von $\mathfrak{H}$ bilden dann offenbar die Untergruppe $\mathfrak{H}_0$. Also bedeutet R einen *Operatorhomomorphismus von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0$*:

$$R(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0 \cong \mathfrak{r}.$$

Wir wollen uns jetzt mit dem Problem der *Kennzeichnung von $\mathfrak{G}$* durch die Gruppen des Gruppenbildes beschäftigen. Da wir in unserer Konstruktion von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_0$ wesentlich den Homomorphismus $H(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ benutzt haben, werden wir sinngemäß nach einer Kennzeichnung von $\mathfrak{G}$ einschließlich diesem Homomorphismus H fragen.

Zunächst entnehmen wir aus Satz 14, daß denjenigen Elementen der freien Gruppe $\mathfrak{S}$, die zu $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ gehören, und nur diesen, die leere Kette zugeordnet ist. Fügen wir also zu den Relationen von $\mathfrak{G}$ die Worte aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ hinzu, so ändern sich dadurch die Gruppen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_r$ nicht. Da nun nach unserm Hilfssatz gilt:

(15) $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{L}) = [\mathfrak{S}/\mathfrak{N}]/\mathfrak{K}(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}) \cong [\mathfrak{S}/\mathfrak{N}]/[\mathfrak{K}(\mathfrak{M})\cdot\mathfrak{N}/\mathfrak{N}] \cong \mathfrak{S}/[\mathfrak{K}(\mathfrak{M})\cdot\mathfrak{N}]$,

lassen sich die Gruppen $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{L}) \cong \mathfrak{S}/[\mathfrak{K}(\mathfrak{M})\cdot\mathfrak{N}]$ durch die Gruppen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_r$ nicht mehr unterscheiden. Für die weiteren Betrachtungen nehmen wir daher $\mathfrak{K}(\mathfrak{L}) = 1$ an.

Es sei jetzt $\mathfrak{H}$ die zum Gruppenpaar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{L} \cong \mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{K}(\mathfrak{L}) = 1$ konstruierte Gruppe und R der sich dabei ergebende Operatorhomo-

morphismus von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{r}$. Dann setzen wir aus den Elementen $[c]$ von $\mathfrak{H}$, die durch R auf Gruppenzahlen der Form $(1 - F)$ abgebildet werden, eine *Gruppe* $\mathfrak{W}$ zusammen, deren Elemente gemäß der Vorschrift

$$[c] \cdot [c'] = [c] + (1 - R([c])) \cdot [c'] \tag{16}$$

verknüpft werden. Da für geschlossene Elemente von $\mathfrak{H}$ diese Verknüpfung in die gewöhnliche Addition von $\mathfrak{H}$ übergeht, ist $\mathfrak{H}_0$ in $\mathfrak{W}$ als Untergruppe (ohne Operatoren) enthalten.

Wir behaupten nun, daß $\mathfrak{W}$ zu $\mathfrak{G}$ isomorph ist. Und zwar läßt sich $\mathfrak{W}$ derart auf $\mathfrak{G}$ isomorph abbilden, daß dabei $\mathfrak{H}_0$ in $\mathfrak{L}$ übergeht. Wenn wir dies gezeigt haben, ist der Satz bewiesen:

Satz 16: *Die Gruppe $\mathfrak{H}$ mit dem Operatorhomomorphismus R von $\mathfrak{H}$ auf das Grundideal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{N}$ kennzeichnet im Falle $\mathfrak{K}(\mathfrak{L}) = 1$ die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit ihrem Homomorphismus $H(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}/\mathfrak{L} \cong \mathfrak{F}$. Die Elemente $[c]$ von $\mathfrak{H}$, für die $R([c])$ von der Form $(1 - F)$ ist, bilden gemäß der Verknüpfung* (16) *eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{W}$, die $\mathfrak{H}_0 \cong \mathfrak{L}$ als Untergruppe enthält.*

Zum Beweis dieses Satzes müssen wir nochmals auf unsere Gruppenbildmethode zurückgreifen.

Aus § 2 entnehmen wir, daß die in p beginnenden Wege von $\mathfrak{C}$ gemäß der dort beschriebenen Verknüpfung eine zu $\mathfrak{S}$ isomorphe Gruppe bilden. Gehen wir von diesen Wegen zu den ihnen entsprechenden Ketten über — nach Satz 5 sind das gerade alle Ketten mit dem speziellen Rand $(1 - F)$ —, so bilden diese gemäß der Verknüpfung (9) eine zu $\mathfrak{S}$ homomorphe Gruppe $\mathfrak{B}$, für die nach Satz 14: $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{S}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ gilt. Da für geschlossene Ketten die Verknüpfung (9) in die gewöhnliche Kettenaddition übergeht, enthält $\mathfrak{B}$ die Gruppen $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_r$ als invariante Untergruppen. Wegen $\mathfrak{K}_r \cong (\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{N})/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ und (15) folgt daher:

$$\mathfrak{B}/\mathfrak{K}_r \cong \mathfrak{S}/(\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{N}) \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{G}.$$

Einer Kette c von $\mathfrak{K}$ entspricht nun in $\mathfrak{H}$ die aus allen Ketten $c_r + c$ mit c_r aus $\mathfrak{K}_r$ gebildete Restklasse $[c]$. Andererseits entspricht dem Element c von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}/\mathfrak{K}_r$ die von allen Elementen $c_r + c$ mit c_r aus $\mathfrak{K}_r$ gebildete Restklasse, also gerade das Element $[c]$ von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{W}$. Da nun die Verknüpfung (16) mit der für Restklassen von $\mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{K}_r$ verstandenen Verknüpfung (9) identisch ist, sind $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{B}/\mathfrak{K}_r$ isomorph. Schließlich ist die in Satz 4 definierte Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{S}/\mathfrak{K}(\mathfrak{M})$ derart beschaffen, daß dabei $\mathfrak{K}_0$ in $\mathfrak{N}/(\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \frown \mathfrak{N})$ übergeht; mithin geht bei der hierdurch induzierten isomorphen Abbildung von $\mathfrak{W}$ auf $\mathfrak{G}$ die Gruppe $\mathfrak{H}_0$ in $\mathfrak{L}$ über.

§ 7.

Beziehungen zur Theorie der Gruppenerweiterungen.

Durch die Aussage des Satzes 13 über die Untergruppe $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$ wird ein interessanter Zusammenhang der hier behandelten Methode mit der Schreierschen Theorie der *Gruppenerweiterungen*[6]) hergestellt. Auch diese Theorie gestattet eine Kennzeichnung von $\mathfrak{G}$ (wir setzen wieder $\mathfrak{K}(\mathfrak{L}) = 1$ voraus) einschließlich dem Homomorphismus $H(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}/\mathfrak{L} \cong \mathfrak{F}$. Und zwar geschieht dies durch die Gruppe $\mathfrak{H}_0$ und eine als „*Faktorsystem*" von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_0$ bezeichnete Gesamtheit D von Elementen von $\mathfrak{H}_0$. Es stehen sich also gegenüber: die Kennzeichnung von $\mathfrak{G}$ mit H einmal durch $\mathfrak{H}$ und den Operatorhomomorphismus R von $\mathfrak{H}$ auf das Grundideal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$, und das andere Mal durch $\mathfrak{H}_0$ und ein Faktorsystem D von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_0$. Es müssen daher $\mathfrak{H}_0$ und D durch $\mathfrak{H}$ und R, und umgekehrt $\mathfrak{H}$ und R durch $\mathfrak{H}_0$ und D bestimmt sein. Diese Überführung der einen Angabe in die andere ist nun für endliche Gruppen $\mathfrak{F}$ der Ordnung ω beidemal unter Vermeidung des Umweges über die Gruppe $\mathfrak{G}$ möglich.

Das Faktorsystem D wird aus einem Repräsentantensystem der Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{L}$ bestimmt. Nun bilden die Elemente

$$d_{F_1},\ d_{F_2},\ \ldots,\ d_{F_{\omega-1}},\ d_E$$

von $\mathfrak{H}$, die in $\mathfrak{r}$ auf die Gruppenzahlen

$$R(d_{F_i}) = 1 - F_i$$

abgebildet werden, ein Repräsentantensystem der Restklassen von $\mathfrak{W} \cong \mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}_0 \cong \mathfrak{L}$. Wir erhalten also ein Faktorsystem D von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_0$ durch die Elemente

$$D_{F,F'} = (d_F)\cdot(d_{F'})\cdot(d_{F\,F'})^{-1} = d_F + F\,d_{F'} - d_{F\,F'}.$$

Zur Lösung der umgekehrten Aufgabe zeigen wir zunächst, daß $\mathfrak{H}$ als gewöhnliche abelsche Gruppe ohne Operatoren allein durch $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{F}$ bestimmt ist.

Es sei $\mathfrak{A}$ die von den oben definierten Elementen

$$d_{F_i},\ (i = 1, \ldots, \omega - 1)$$

in $\mathfrak{H}$ erzeugte Untergruppe ohne Operatoren. Da das Grundideal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$ aus allen Elementen $\sum_i m_i(1 - F_i)$ mit ganzen Zahlen m_i besteht, ist $\mathfrak{A}$ eine freie abelsche Gruppe von $\omega - 1$ freien Erzeugenden und daher

[6]) O. Schreier, Über die Erweiterung von Gruppen I, Monatshefte f. Math. u. Phys. 34.

allein durch ω bestimmt. Aus der gleichen Eigenschaft von $\mathfrak{r}$ folgt, daß die Elemente von $\mathfrak{A}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Restklassen von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{H}_0$ bilden. Also ist $\mathfrak{H}$ das direkte Produkt von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{H}_0$.

Mit Hilfe des schon oben bestimmten Faktorsystems von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_0$ können wir nun Operatoren in dem direkten Produkt $\mathfrak{A} \times \mathfrak{H}_0$ einführen, indem wir setzen:

$$(d_{F'})^F = -d_F + d_{F F'} + D_{F, F'}.$$

Denn es ist dann

$$(d_{F'})^F = -d_F + d_{F F'} + d_F + F d_{F'} - d_{F F'} = F d_{F'}.$$

Es sei noch erwähnt, daß diese Konstruktion von $\mathfrak{H}$ aus $\mathfrak{H}_0$ mit Hilfe eines Faktorsystems D von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_0$ identisch ist mit der Konstruktion einer Gruppe $\overline{\mathfrak{U}}$ über $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{H}_0$, die von Herrn Iyanaga [7]) in seinem Beweis des Hauptidealsatzes vorgenommen wird.

Das Faktorsystem der Gruppe $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_0$ ist nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr lassen sich aus jedem Repräsentantensystem der Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{L}$ Faktorsysteme von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_0$ gewinnen. Innerhalb $\mathfrak{H}_0$ stehen diese Faktorsysteme miteinander in kompliziertem Zusammenhang. Erst die aus ihnen allen gebildete Klasse $[D]$ von Faktorsystemen ist dann eine Invariante, die $\mathfrak{G}$ und den Homomorphismus

$$H(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}/\mathfrak{L} \cong \mathfrak{F}$$

kennzeichnet. Die Einbettungsmethode hat demgegenüber den Vorteil, daß der Homomorphismus $R(\mathfrak{H}) = \mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{G}$ und H eindeutig bestimmt ist.

Die Faktorsysteme von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_0$ sind dadurch ausgezeichnet, daß sie die Identitäten

$$(17) \qquad D_{F, F'} + D_{F F', F''} = F D_{F', F''} + D_{F, F' F''}, \quad D_{1, F} = D_{F, 1} = 0$$

erfüllen. Umgekehrt kann auch jedes Lösungssystem $D_{F, F'}$ dieser Identitäten zur Konstruktion einer Erweiterungsgruppe von $\mathfrak{H}_0$ benutzt werden. Die Frage nach allen Erweiterungsgruppen der Gruppe $\mathfrak{H}_0$ mit Operatoren ist also durch die Bestimmung aller Faktorsysteme von $\mathfrak{H}_0$ zu lösen. Allerdings ist es höchstens für endliche Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{F}$ möglich, die sämtlichen Lösungen der Identitäten (17) anzugeben.

In Parallele zur Frage nach allen Erweiterungsgruppen von $\mathfrak{H}_0$ steht in unserer Methode die Frage nach allen in $\mathfrak{H}$ *einbettbaren* Gruppen $\mathfrak{W}$. Sie ist offenbar identisch mit der Frage nach allen Operatorhomomorphismen R von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{r}$. Im nächsten Paragraphen werden wir auf diese Aufgabe noch einmal zurückkommen.

---

[7]) S. Iyanaga, Zum Beweis des Hauptidealsatzes, Hamb. Abh. 10, S. 350.

§ 8.

Die Bestimmung von Invarianten von $\mathfrak{G}$ und H.

Der Invarianzsatz 11 ermöglicht uns die Bestimmung von *Invarianten* der Gruppe $\mathfrak{G}$ und ihres Homomorphismus $H(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ durch Kennzeichnung der Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_0$. Hierfür kommt zunächst nur die Gruppe $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ in Frage, da sie bereits durch Erzeugende und definierende Relationen dargestellt ist.

Nach Satz 10 besitzt $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ die definierenden Relationen:

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, s_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, \beta).$$

$\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ ist also durch Angabe der Matrix

$$\mathsf{M} = (r_{ik}) \quad (i = 1, \ldots, \beta;\ k = 1, \ldots, n)$$

mit Komponenten aus dem Gruppenring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{F}$ bestimmt. Die Ermittlung von Invarianten der Matrix M gegenüber den Abänderungen der Schreibweise von $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ durch Erzeugende und definierende Relationen ist eine der gewöhnlichen Elementarteilertheorie verwandte Aufgabe. Man zeigt leicht, daß die sogenannten „Determinantenideale" von M Invarianten von $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ sind, aber die Gruppe im allgemeinen nicht kennzeichnen. Unter dem i-ten Determinantenideal d_i der $\mathfrak{R}$-Matrix M wird dabei das von allen denjenigen Unterdeterminanten von M erzeugte Ideal in $\mathfrak{R}$ verstanden, die durch Streichen von i Spalten und $(\beta - n + i)$ Zeilen entstehen. Man setzt $d_i = (1)$ für $i \geqq n$.

Herr Burau[8]) hat im Falle freier abelscher Gruppen $\mathfrak{F}$ auch die Gruppe $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$ durch Erzeugende und definierende Relationen dargestellt und nachgewiesen, daß die Determinantenideale mit gleichem Index von $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_r$ miteinander übereinstimmen. Dieses Resultat wirft ein Licht auf die im vorigen Paragraphen behandelte Frage, wieweit sich $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_0$ gegenseitig bestimmen.

Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, die Gruppe $\mathfrak{H}$ einschließlich dem Operatorhomomorphismus R von $\mathfrak{H}$ auf das Grundideal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$ algebraisch zu charakterisieren.

Da der Homomorphismus R bekannt ist, wenn man die Bilder der Erzeugenden s_i von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{r}$ kennt, läßt sich R durch eine Matrix

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_i)$$

mit $a_i = R(s_i)$ vollständig beschreiben. Die Gruppe $\mathfrak{H}$ und ihr Homomorphismus R sind also durch das Matrizenpaar M, P bestimmt. Zwischen

---

[8]) W. Burau, Über Verkettungsgruppen, Hamb. Abhdl. 11, S. 171.

M und P besteht wegen der Geschlossenheit der Relationen von $\mathfrak{H}$ die Beziehung:

(18) $$\mathsf{M} \cdot \mathsf{P} = 0.$$

Wir ermitteln jetzt die durch Abänderungen der Schreibweise von $\mathfrak{H}$ definierte Äquivalenzklasse [M, P] des Matrizenpaares M, P. Sie ist dann eine die Gruppe $\mathfrak{H}$ mit ihrem Operatorhomomorphismus R kennzeichnende Invariante. Wegen Satz 16 kennzeichnet [M, P] auch die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit ihrem Homomorphismus $H(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}/\mathfrak{L} \cong \mathfrak{F}$.

Zunächst ist in M die Reihenfolge der Zeilen beliebig; die Reihenfolge der Spalten von M darf nur gleichzeitig mit der Reihenfolge der Zeilen von P geändert werden.

Die Abänderungen der Schreibweise von $\mathfrak{H}$, soweit sie nur die Relationen von $\mathfrak{H}$ betreffen, lassen P unverändert. Sie können offenbar auf die beiden elementaren Prozesse zurückgeführt werden: Hinzunehmen und Fortlassen von Folgerelationen der übrigen. Folgerelationen sind aber Linearkombinationen, so daß es sich um den Übergang

$$(r_{ik}) \to \begin{pmatrix} r_{ik} \\ \sum\limits_{j=1}^{\beta} r_j r_{jk} \end{pmatrix}$$

und den dazu inversen handelt.

Durch Hinzunahme einer neuen Erzeugenden s_{n+1} zu den s_i erhält M eine neue Spalte mit lauter Nullen und P eine neue Zeile. Die Definitionsrelation

$$c_{\beta+1} = r_{\beta+1,1} s_1 + \dots + r_{\beta+1,n} s_n + s_{n+1}$$

vermehrt M um die neue Zeile $(r_{\beta+1,1}, \dots, r_{\beta+1,n}, 1)$. Im Ganzen geht

$$\mathsf{M} = (r_{ik}) \text{ in } \mathsf{M}' = \begin{pmatrix} r_{ik} & 0 \\ r_{\beta+1,k} & 1 \end{pmatrix}$$

und gleichzeitig

$$\mathsf{P} = (a_i) \quad \text{in} \quad \mathsf{P}' = \begin{pmatrix} a_i \\ -\sum\limits_{j=1}^{n} r_{\beta+1,j} \cdot a_j \end{pmatrix}$$

über. Enthält umgekehrt M eine Spalte mit lauter Nullen und einer 1, so darf diese Spalte, die ihr entsprechende Zeile in P und die die 1 enthaltende Zeile in M fortgelassen werden.

Nach Satz 1 ist durch diese Übergänge [M, P] bestimmt. — Man erkennt, daß sich in $\mathfrak{H}$ stets solche Erzeugende einführen lassen, daß P die Gestalt

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

annimmt, in der $a_1, \ldots, a_n$ ein beliebiges Erzeugendensystem des Linksideales $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$ darstellt, zu welchem noch eine unbestimmte Anzahl Nullen hinzukommt.

Hiernach ist es leicht möglich, die Gesamtheit der zur festen Gruppe $\mathfrak{F}$ konstruierbaren Gruppen $\mathfrak{H}$ mit dem Operatorenring $\mathfrak{R}$ zu ermitteln. Ist nämlich $a_1, \ldots, a_n$ ein System von Erzeugenden von $\mathfrak{r}$, das keine überflüssigen Elemente enthält, so läuft diese Bestimmung auf eine Klassifikation aller Gruppenringmatrizen $\mathsf{M} = \|r_{ij}\|$ mit endlicher Zeilen- und Spaltenzahl, letztere $\geqq n$, nach der Gültigkeit der homogenen Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} a_j = 0$$

heraus. Denn durch

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist ein Operatorhomomorphismus von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{r}$ definiert, der die Konstruktion einer Gruppe $\mathfrak{W}$ gestattet, zu welcher $\mathfrak{H}$ mit Hilfe von $\mathfrak{F}$ bestimmt werden kann.

Wir kommen nun noch einmal auf die in § 7 aufgeworfene Frage nach allen Operatorhomomorphismen einer festen Gruppe $\mathfrak{H}$ auf das Grundideal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$ zurück. Offenbar hat man dazu alle einspaltigen Lösungsmatrizen P der Matrizengleichung (18), d. h. alle Lösungssysteme $a_1, \ldots, a_n$ der linearen homogenen Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} a_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, \beta)$$

im ganzzahligen Gruppenring $\mathfrak{R}$ zu bestimmen, und unter diesen diejenigen auszusondern, die eine Basis für das Linksideal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{R}$ bilden. Für abelsche Gruppen $\mathfrak{F}$ existieren Methoden zur Behandlung dieser Aufgabe.

§ 9.

Über das annullierende Ideal der Gruppe $\mathfrak{H}$.

Wir wollen uns nun mit einer speziellen Invariante von Gruppen mit Operatoren beschäftigen, die man das *annullierende Ideal* $\mathfrak{o}$ der Gruppe nennt. $\mathfrak{o}$ ist für beliebige Operatorenringe $\mathfrak{R}$ erklärt und besteht aus allen denjenigen Elementen r von $\mathfrak{R}$, die jedes Gruppenelement $[c]$ annullieren: $r \cdot [c] = 0$. Im Falle nichtkommutativer Operatorenringe ist $\mathfrak{o}$ für Linksmoduln ein *Linksideal*.

Über das annullierende Ideal $\mathfrak{o}$ unser Gruppe $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ können wir zunächst einige Aussagen machen, die allein aus der Existenz des Homomorphismus R folgen:

Satz 17: *Für unendliche Gruppen $\mathfrak{F}$ ist das annullierende Ideal der Gruppe $\mathfrak{H}$ das Nullideal. Ist $\mathfrak{F}$ dagegen endlich, so gilt:*

$$\mathfrak{o} = \{m \cdot \sum_F F\},$$

wobei m eine ganze Zahl und $\sum_F F$ *die Summe über sämtliche Elemente von $\mathfrak{F}$ bedeutet.*

Haben wir $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ mit den Erzeugenden s_i dargestellt, so gehört r dann und nur dann zu $\mathfrak{o}$, wenn rc für jedes Element c von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}_r$ gehört. rc muß daher geschlossen sein. Wählen wir nun c so, daß $R(c) = 1 - F'$ ist, und setzen $r = \sum_F n_F F$ mit endlich vielen von 0 verschiedenen ganzzahligen Koeffizienten n_F, dann muß gelten:

$$\sum_F n_F F (1 - F') = 0.$$

Hat nun $\mathfrak{F}$ unendlich viele Elemente, so kann man offenbar F' derart wählen, daß für ein in r auftretendes F'' das Element $F''F'$ von allen F in r verschieden ist. Daraus folgt $n_{F''} = 0$ und durch Induktion $r = 0$, also der erste Teil der Behauptung.

Ist dagegen $\mathfrak{F}$ endlich, so muß

$$\sum_F (n_F - n_{FF'^{-1}}) F = 0,$$

also $n_F = n_{FF'^{-1}}$ sein, für alle F' aus $\mathfrak{F}$. Demnach müssen alle n_F gleich einer ganzen Zahl m sein, wie behauptet wurde.

Wir bestimmen jetzt m in Spezialfällen des Homomorphismus H von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{F}$.

Satz 18: *Das Grundideal $\mathfrak{r}$ des Gruppenringes $\mathfrak{R}$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{F}$ besitzt das annullierende Ideal*

$$\mathfrak{o} = \{\sum_F F\}.$$

Da nämlich jedes Element von $\mathfrak{r}$ in der Form $\sum_F n_F (1 - F)$ geschrieben werden kann und offenbar $(\sum_F F)(1 - F') = 0$ ist, folgt die Behauptung.

Wir behandeln nun noch den für die Anwendung wichtigsten Fall, daß $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ist.

Satz 19: *Ist $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe, deren Faktorkommutatorgruppe $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ endlich ist, so ist das annullierende Ideal der zum Gruppenpaar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ konstruierten Gruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_r$ gleich*

$$\mathfrak{o} = \{\sum_F F\}.$$

Da $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ von endlicher Ordnung e ist, müssen in $\mathfrak{G}$ Relationen der Form

$$R_i = \prod_{j=1}^{n} S_j^{\gamma_{ij}} G_{0i} \qquad (i = 1, \ldots, \beta)$$

mit G_{0i} aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ und der Determinante $|\gamma_{ij}| = e$ existieren. Entspricht nun dem Wort R_i aus $\mathfrak{S}$ die Kette $c_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} s_j$ von $\mathfrak{R}_r$, so liegen auch alle Ketten $D s_1, D s_2, \ldots, D s_n$ mit $D = |r_{ij}|$ in $\mathfrak{R}_r$, da sie sich aus den c_i linear kombinieren lassen. Also gehört D zu $\mathfrak{o}$ und hat daher die Form $D = m \sum_F F$.

Ist $c = \sum_{i,j} m_{ij} F_i s_j$ die dem Wort W von $\mathfrak{S}$ entsprechende Kette, so entnimmt man aus (9), daß darin $\sum_i m_{ij}$ die Summe der Exponenten der Erzeugenden S_j im Wort W bedeutet. Setzen wir also in der Kette c_i alle Elemente F aus $\mathfrak{F}$ gleich 1, d. h. betrachten wir $\mathfrak{R}$ modulo $\mathfrak{r}$, so geht c_i in $\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} s_i$ über, also D in e. Andererseits geht $D = m \sum_F F$ hierbei in $m e$ über, so daß $m = 1$ sein muß, wie behauptet wurde.

Der Satz 19 hat für das Problem der Gruppenkennzeichnung den negativen Inhalt, daß das annullierende Ideal der zum Gruppenpaar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ konstruierten Gruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_r$ *allein durch* $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ *bestimmt ist.* Er gewinnt aber dadurch an Interesse, daß sich aus ihm mittels einer leichten Hilfsüberlegung der sogenannte *Hauptidealsatz der Zahlentheorie* folgern läßt.

Bekanntlich[9]) läßt sich dieser Satz auf die folgende Aussage über metabelsche Gruppen zurückführen:

Satz 20: *Es sei* $\mathfrak{G}$ *eine metabelsche Gruppe mit den Erzeugenden* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *und endlicher Faktorkommutatorgruppe* $\mathfrak{F}$. *Besitzt dann das Element* S *aus* $\mathfrak{G}$ *die Ordnung* v *über* $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$, *so gilt*

$$V = \prod_T T S^v T^{-1} = 1 \quad \text{in } \mathfrak{G},$$

wenn T *ein Repräsentantensystem von* $\mathfrak{G}$ *nach dem von* $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ *und* S *erzeugten Normalteiler durchläuft.*

Da V zu $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ gehört, können wir die Aussage des Satzes 20 in eine Aussage über die zum Gruppenpaar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ konstruierte Gruppe $\mathfrak{R}_0/\mathfrak{R}_r$ verwandeln, die wegen $\mathfrak{K}(\mathfrak{K}(\mathfrak{G})) = 1$ zu $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ isomorph ist. Wir haben also nur das Wort V in eine Kette c von K_0 zu übersetzen und zu zeigen, daß c zu $\mathfrak{R}_r$ gehört.

---

[9]) Vgl. z. B. S. Iyanaga, a. a. O.

Ist s die dem Element S entsprechende Kette, so gehört nach Satz 4 zu S^{ν} die Kette

$$(1 + h(S) + \ldots + h(S^{\nu-1}))\,s$$

und daher zum Wort V die Kette

$$c = \sum_{T} h(T)\,(1 + h(S) + \ldots + h(S^{\nu-1}))\,s.$$

Die Elemente $h(TS^{i})$ durchlaufen aber alle Elemente von $\mathfrak{F}$ gerade einmal, so daß $c = (\sum_{F} F)\,s$ ist. Und diese Kette liegt nach Satz 19 tatsächlich in $\mathfrak{R}_r$.

Der Zusammenhang dieses Beweises mit demjenigen von Herrn Iyanaga[7]) ist durch die Bemerkung aus § 7 geklärt, daß die dort angegebene Konstruktion der Gruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_r$ aus $\mathfrak{R}_0/\mathfrak{R}_r$ mit Hilfe eines Faktorsystems von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{R}_0/\mathfrak{R}_r$ identisch mit der Konstruktion der Gruppe $\overline{\mathfrak{U}}$ aus $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{R}_0/\mathfrak{R}_r$ bei Herrn Iyanaga ist.

(Eingegangen am 17. 11. 1936.)

Gewebe und Gruppen.

(Topologische Fragen der Differentialgeometrie 65.)

Von

G. Bol in Hamburg.

Die folgenden Untersuchungen knüpfen an die schönen Ergebnisse von K. Reidemeister und G. Thomsen über die Axiomatik der Gewebe[1]) an. Ein Gewebe ist nach Thomsen eine Menge von zweierlei Elementen, „Punkten" und „Geraden", wobei die Geraden in drei Klassen, die man „Scharen" nennt, eingeteilt sind. Für die Elemente gelten die beiden Axiome:

I. Durch jeden „Punkt" geht eine „Gerade" jeder Schar.

II. Zwei Geraden aus derselben Schar haben keinen, zwei Geraden aus verschiedenen Scharen genau einen Punkt gemeinsam.

Als einfachstes Beispiel erwähnen wir das Gewebe, das besteht aus drei Büscheln von parallelen Geraden in der affinen Ebene, hier prüft man die Gültigkeit von I. und II. sofort nach. Allgemeiner und axiomatisch wichtiger ist aber folgendes Beispiel:

Sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe mit Einheitselement e, die endlich oder unendlich sein darf. Dann ordnen wir jedem geordneten Tripel von Elementen $\{a_1, a_2, a_3\}$ von $\mathfrak{G}$, wofür

$$a_1 a_2 a_3 = e, \tag{1}$$

einen „Punkt" zu. Diejenigen Punkte, für die a_1 einen festen „Wert" hat, sollen eine „Gerade" der ersten Schar bilden, diejenigen, für die a_2 fest ist, eine der zweiten Schar, und diejenigen, für die a_3 denselben Wert hat, eine Gerade der dritten Schar. Gibt man also den „allgemeinen" Punkt an durch $\{x_1, x_2, x_3\}$, so werden die Geraden der ersten Schar dargestellt durch eine Gleichung $x_1 = a$, die der zweiten durch $x_2 = b$, die der dritten Schar durch $x_3 = c$.

Diese „Punkte" und „Geraden" genügen nun offenbar den Axiomen I und II: durch den Punkt $\{a_1, a_2, a_3\}$ gehen die Schargeraden $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$. Daß zwei Geraden derselben Schar keinen Punkt ge-

[1]) K. Reidemeister: Gewebe und Gruppen, Topologische Fragen der Differentialgeometrie 5, Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 427; G. Thomsen: Gewebe und Gruppen, Topologische Fragen der Differentialgeometrie 12, Hamb. Abhdl. 7 (1929); K. Reidemeister, Grundlagen der Geometrie, Berlin und Leipzig 1930; H. Kneser, Gewebe und Gruppen, Topologische Fragen der Differentialgeometrie 43, Hamb. Abhdl. 9 (1932).

meinsam haben, ist nach ihrer Definition selbstverständlich, und etwa die Geraden $x_1 = a$, $x_2 = c$ haben genau den Punkt $\{a, a^{-1}c^{-1}, c\}$ gemeinsam.

Sie bilden also ein Gewebe im Thomsenschen Sinne. Wählt man für $\mathfrak{G}$ die Translationsgruppe einer reellen Geraden, so erhält man als Spezialfall offenbar unser erstes Beispiel.

In einem Gewebe können gewisse Schließungssätze gelten, man kann etwa fordern, daß die Fig. 1, die einer Würfelprojektion gleicht, — die „Reidemeisterfigur", die wir kurz mit R andeuten — sich immer schließt. Ein Sonderfall wäre, zu fordern, daß nur solche R-Figuren geschlossen sein sollen, bei denen A und B zusammenfallen, d. h. daß das Sechseck der Fig. 2 stets geschlossen sein soll. Als drittes Beispiel erwähnen wir

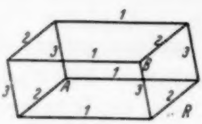


Fig. 1.

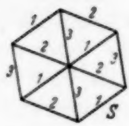


Fig. 2.

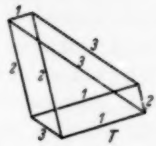


Fig. 3.

die Fig. 3, das „Thomsensche Dreieck" T. Sämtliche Figuren schließen sich offenbar in dem Gewebe, das aus drei Parallelenbüscheln besteht.

Von Thomsen stammt nun der schöne Satz: Wenn in einem Gewebe R stets geschlossen ist, so kann man dem Gewebe eine Gruppe zuordnen, derart, daß den Punkten des Gewebes eineindeutig die Elementetripel der Gruppe entsprechen, die (1) genügen, und die Geraden durch die Gleichungen

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c \tag{2}$$

dargestellt werden. Das Gewebe läßt sich also dann stets als „Gruppengewebe" im obigen Sinne erklären. Umgekehrt ist in einem Gruppengewebe R stets geschlossen. Schließt sich auch noch T, so ist die Gruppe kommutativ, umgekehrt ist in einem Gewebe, das zu einer kommutativen Gruppe gehört, T stets geschlossen. Als Ergänzung schließlich: Wenn T geschlossen ist, so ist auch R stets geschlossen. Es genügt also schon, daß T geschlossen ist, damit sich das Gewebe durch eine kommutative Gruppe erklären läßt.

Da es nichtkommutative Gruppen gibt, so folgt aus der Geschlossenheit von R sicher *nicht* die von T. Ob nicht vielleicht aus der Geschlossenheit des Sechsecks schon die von R folgt, darüber läßt sich zunächst nichts aussagen.

In dieser Arbeit wollen wir diese Frage im verneinenden Sinne beantworten, indem wir die Figur heranziehen, die in Fig. 4 dargestellt ist. Sie ist offenbar ein Sonderfall von R, und entsteht, wenn A und B auf derselben 1-Geraden liegen, wir wollen sie deshalb mit U_1 bezeichnen. Offenbar spielt in dieser Figur, anders wie bei R, S, T, die Schar 1 eine besondere Rolle. Die Figur U_2, die entsteht, wenn A und B auf derselben 2-Geraden liegen, ist von ihr wesentlich verschieden, und wenn U_1 geschlossen ist, so braucht sich U_2 durchaus nicht stets zu schließen. Von beiden Figuren verschieden ist U_3, die entsteht, wenn A und B auf einer Geraden 3 liegen. Offenbar sind sämtliche U-Figuren in R als Sonderfall enthalten, und jede einzelne enthält S als Sonderfall.

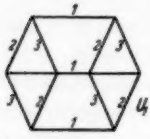


Fig. 4.

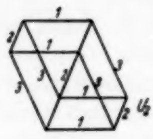


Fig. 5.

Wir wollen nun Gewebe untersuchen, wo die Figuren U_1, U_2, U_3 sämtlich geschlossen sind. Es wird sich herausstellen, daß diese sich ähnlich, wie oben die Gruppengewebe, erzeugen lassen mit Hilfe gruppenähnlicher Bereiche, für die aber das Assoziativgesetz nicht mehr allgemein gilt. An die Stelle dieses Gesetzes tritt vielmehr die Regel:

$$a\,(b\,(c\,b)) = ((a\,b)\,c)\,b. \tag{3}$$

Das ist also eine Teilaussage des Assoziativgesetzes, die gestattet, bei gewissen Produkten die Beklammerung zu ändern.

Bemerkenswert ist dabei, daß man nur zwei der Figuren U braucht: Wenn U_1 und U_2 geschlossen sind, so schließt sich stets auch U_3.

Die Frage: „Folgt aus U_1, U_2, U_3 schon R?" ist nun gleichbedeutend mit dieser: „Gibt es Bereiche mit einem Einheitselement und eindeutig umkehrbarer Multiplikation, wo (3) gilt, aber nicht das volle Assoziativgesetz?"

Beide Fragen lassen sich durch Angabe eines Beispiels in bejahendem Sinne beantworten. Zunächst stellt sich nämlich heraus, daß in jedem distributiven Ringe, wo die „Alternativgesetze"

$$a\,(b\,a) = (a\,b)\,a, \quad a\,(a\,b) = (a\,a)\,b, \quad (b\,a)\,a = b\,(a\,a) \tag{4}$$

gelten, das Gesetz (3) stets erfüllt ist. Nun hat Dickson[2]) derartige Ringe, die sogenannten „Alternativkörper" angegeben, die nullteilerfrei sind. Offenbar gelten also in dem multiplikativen Bereich, der sich einem solchen Alternativkörper entnehmen läßt, die Gesetze (3), ohne daß der Bereich assoziativ ist.

[2]) L. E. Dickson: Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich und Leipzig 1927, S. 264.

Die Alternativkörper haben nach einem Satze von Artin und Wedderburn[3]), falls sie nicht assoziativ sind, stets unendlich viele Elemente. Wir geben deshalb noch ein anderes Beispiel — das von Herrn H. Zassenhaus stammt — von einem nichtassoziativen Bereich mit eindeutig umkehrbarer Multiplikation, in dem (3) gilt, und der sogar die Eigenschaft hat, kommutativ zu sein.

Bereiche der hier betrachteten Art wurden, wie ich erst nach Fertigstellung dieser Arbeit erfuhr, 1935 von Frl. R. Moufang angegeben, und Quasigruppen genannt[4]).

Ich möchte hier noch darauf hinweisen, daß die von Frl. Moufang getroffene Unterscheidung zwischen Quasigruppen Q^* und Quasigruppen Q^{**} unwesentlich ist. In den Quasigruppen Q^{**} soll nämlich außer (3), und der daraus leicht zu beweisenden entsprechenden Regel

(3a) $$((bc)b)a = b(c(ba)),$$

noch die Regel gelten

(3b) $$(ba)(cb) = \{b(ac)\}b = b\{(ac)b\}.$$

Diese Regel läßt sich aber aus (3) und (3a) folgern, so daß jede Quasigruppe Q^* schon eine Quasigruppe Q^{**} ist[5]).

Dafür wäre aber eine andere Unterscheidung möglich, indem man auch solche Bereiche betrachtet, wo statt (3) die Gleichung (8) gilt. Es ist mir zwar nicht gelungen zu zeigen, daß es Bereiche gibt, wo (8) gilt, ohne daß (3) erfüllt ist[6]), doch erscheint das aus geometrischen Gründen wahrscheinlich. (8) bedeutet ja die Geschlossenheit *einer* U-Figur, und es ist schlecht zu sehen, wie daraus das Geschlossensein der anderen gefolgert werden könnte.

Auf einen einfachen Beweis des Hauptergebnisses von Frl. Moufang — wenn in einer Quasigruppe drei Elemente a, b, c sich assoziativ multiplizieren $[a(bc) = (ab)c]$, so erzeugen sie einen assoziativen Teilbereich —, sowie auf eine Verallgemeinerung dieses Satzes hoffe ich bald zurückzukommen. Durchführbar scheint die Aufstellung aller endlichen kommu-

[3]) M. Zorn: Theorie der alternativen Ringe. Hamb. Abhdl. 8 (1930).

[4]) R. Moufang, Zur Theorie der Alternativkörper, Math. Annalen 110 (1934), S. 416—430; den Hinweis auf diese Arbeit verdanke ich Herrn O. Blumenthal.

[5]) Es ist

$$b(ac) = b\big(a(b(b^{-1}c))\big) = ((ba)b)(b^{-1}c) \qquad \text{(nach (3a))},$$

also

$$\{b(ac)\}b = \{((ba)b)(b^{-1}c)\}b = (ba)\{b((b^{-1}c)b)\} = (ba)(cb).$$

Dabei sind außer (3) und (3a) die in jeder Quasigruppe gültigen Regeln (12) und (17) benutzt worden.

[6]) Nach der Drucklegung ist es Herrn Zassenhaus gelungen, auch hierfür ein Beispiel zu finden. Vgl. den Nachtrag.

tativen Quasigruppen zu sein, diese sind genau wie im kommutativen Fall direktes Produkt von p-Quasigruppen. Für $p \neq 3$ sind diese assoziativ, also gewöhnliche Abelsche Gruppen, nur $p = 3$ macht noch Schwierigkeiten.

§ 1.

Gewebe und Normbereiche.

Zeigen wir zunächst, wie sich nach Thomsen in jedem Gewebe eine Multiplikation erklären läßt (Fig. 6). Dazu wählen wir in unserem Gewebe eine feste Gerade ε, etwa der ersten Schar, und darauf den festen Punkt E. Dann wird jedem Punkte unserer Geraden ein Symbol zugeordnet, so soll zu B das Symbol b gehören, zu A das Symbol a. Dann läßt sich mit Hilfe unseres Gewebes eine Multiplikation dieser Symbole

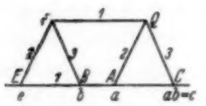


Fig. 6.

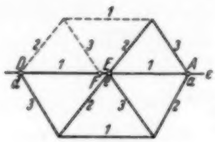


Fig. 7.

so definieren, wie es die Fig. 6 angibt, man bestimmt zuerst den Schnittpunkt P von 2 durch E und 3 durch B, dann Q als Schnittpunkt von 2 durch A und 1 durch F und sodann C als Schnittpunkt von 3 durch Q mit ε. Ist dann c das C zugeordnete Symbol, so wollen wir c das Produkt von a und b in dieser Reihenfolge nennen:

$$c = a \cdot b.$$

Offenbar ist das E zugeordnete Symbol e das Einheitselement dieser Multiplikation, es gilt für jedes x:

$$e x = x \cdot e = x.$$

Denn wenn man in der Fig. 6 etwa B mit E zusammenfallen läßt, so fallen auch A und C zusammen.

Unsere Multiplikation ist auch *eindeutig umkehrbar*, denn wenn man sich in Fig. 6 B und C gegeben denkt, so ist dadurch schon A eindeutig bestimmt, und wenn A und C gegeben sind, so ist dadurch auch B festgelegt. Das besagt aber genau, daß sich die beiden Gleichungen

$$(5) \qquad m \cdot x = n, \qquad y \cdot m = n$$

bei gegebenen m und n stets eindeutig nach x bzw. y auflösen lassen. Insbesondere ist in Fig. 7 angegeben, wie man zu einem vorgegebenen

Element das Inverse konstruiert. Liegen die Punkte A und D, wie in in der Figur durch die ausgezogenen Linien angegeben ist, so ist offenbar

$$a \cdot d = e,$$

d ist dann das „Rechtsinverse“ von a. Daraus braucht aber nicht zu folgen, daß nun auch $d \cdot a = e$ wird, es entspricht ja dem Symbol $d \cdot a$ der Punkt F in unserer Figur. Dafür, daß d auch Linksinverses ist, ist also notwendig, daß ein gewisses Sechseck S geschlossen ist.

Natürlich darf man *nicht* sagen: Wenn bei unserer Multiplikation jedes Rechtsinverse auch Linksinverses ist, so ist S stets geschlossen, man könnte das nur behaupten für solche Sechsecke, die ihren Mittelpunkt in E haben. Es gilt aber offenbar der Satz:

Wenn bei jeder im Gewebe — durch verschiedene Wahl von ε und E — erklärbaren Multiplikation Rechtsinverse auch linksinvers sind, so ist S stets geschlossen.

Wichtig für das folgende ist, daß man unsere Symbole auch eineindeutig den Punkten der Geraden 2 durch E, wir wollen sie ε_2 nennen, zuordnen kann. Liegt nämlich der Punkt B^* von ε_2 mit dem Punkte B von ε auf einer Geraden 3, so wollen wir auch B^* das Symbol b zuordnen (Fig. 8). Man kann dann für unsere Symbole eine neue Multiplikation definieren, indem man die Scharen 2 und 1 durchaus die Rollen vertauschen läßt. So ist in der Figur das neue Produkt der beiden Symbole a und b, daß wir mit $a * b$ andeuten, konstruiert, dieses Produkt ist also dasjenige unserer Symbole, das dem Punkte C^*, also dem Punkte C zugeordnet ist. Wie hängt dieses neue Produkt mit dem alten zusammen? Aus der Figur liest man ab, daß nach der alten Definition $b \cdot a = c$ ist. Wir haben also:

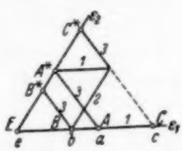


Fig. 8.

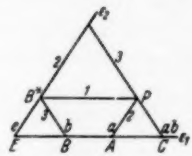


Fig. 9.

$$(6) \qquad a * b = b \cdot a.$$

Diese Regel wird uns noch manchmal von Nutzen sein.

Wir wollen nun folgenden Satz beweisen:

Wenn in einem beliebigen Gewebe die Multiplikation wie oben definiert wird, so kann man die Punkte des Gewebes eineindeutig abbilden auf die geordneten Paare $\{a_1, a_2\}$ unserer Symbole, so daß a_1 für die Punkte einer Geraden 1 *konstant ist, a_2 für die Punkte einer Geraden* 2 *fest ist, und für diejenigen, die auf einer Geraden* 3 *liegen, das Produkt $a_2 a_1$ konstant ist.*

Der Beweis ist sehr einfach (Fig. 9). Wir ordnen nämlich dem Punkte P das Paar $\{b, a\}$ unserer Symbole zu. Diese Zuordnung ist

offenbar eineindeutig, auf einer Geraden 1 ist B fest, also b, auf einer Geraden 2 ist a fest, und für die Punkte einer Geraden 3 ist C immer derselbe Punkt, also das Produkt $a \cdot b$ fest.

Dieser Satz läßt sich aber auch umkehren:

Sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiger multiplikativer Bereich mit einem zweiseitigen Einheitselement e und eindeutig umkehrbarer Multiplikation. Das heißt also, daß für jedes x aus $\mathfrak{A}$

(7) $$x \cdot e = e \cdot x = x$$

gelten soll, und daß die Gleichungen (5) bei beliebiger Wahl von m und n aus $\mathfrak{A}$ eindeutig lösbar sein sollen. Wir wollen einen solchen Bereich $\mathfrak{A}$ einen Normbereich nennen.

Nennt man dann jedes geordnete Elementepaar $\{a_1, a_2\}$ von $\mathfrak{A}$ einen Punkt, und setzt fest, daß solche Punkte, für die a_1 denselben Wert hat, eine Gerade 1 *bilden sollen, solche, wo a_2 fest ist, eine Gerade* 2, *und solche, wo das Produkt $a_2 a_1$ fest ist, eine Gerade* 3, *so bilden diese Punkte und Geraden ein Gewebe.*

Daß Axiom I erfüllt ist, ist wieder nach Definition klar, ebenso, daß zwei Geraden derselben Schar keinen Punkt gemeinsam haben. Den letzten Teil von Axiom II bestätigt man sofort: die Geraden $x_1 = a$ und $x_2 = b$ haben offenbar genau den Punkt $\{a, b\}$ gemeinsam, die Geraden $x_1 = a$, $x_2 x_1 = c$ genau den Punkt $\{a, d\}$, wo d die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $x \cdot a = c$ darstellt, und schließlich die Geraden $x_2 = b$, $x_2 x_1 = c$ genau den Punkt $\{f, b\}$, wenn f die Lösung der Gleichung $b \cdot y = c$ darstellt [7]).

Der einem vorgegebenen Gewebe zugeordnete Bereich $\mathfrak{A}$ ist offenbar erst dann eindeutig bestimmt, wenn noch E festgelegt ist. Ändert man E, so entsteht ein neuer Bereich, der zu dem alten im allgemeinen *nicht isomorph* ist, wie sich später an Beispielen noch genau herausstellen wird.

§ 2.

Die Figuren U_i.

Es bedeutet nun offenbar jeder Schließungssatz im Gewebe eine neue Aussage für die Multiplikation in $\mathfrak{A}$. Wir haben schon gesehen: wenn S geschlossen ist, so ist (bei beliebiger Wahl von E) in $\mathfrak{A}$ jedes Rechtsinverse auch linksinvers. Das gilt also auch, wenn irgendeine der Figuren U_1, U_2, U_3 geschlossen ist, denn diese enthalten S als Sonderfall.

[7]) Offenbar kann man die Punkte $\{a_1, a_2\}$ in vielfacher Weise so zu Geraden zusammenfassen, daß die Gewebeaxiome erfüllt sind. So kann man auch festsetzen, daß auf der dritten Schar $a_1 \cdot a_2$ fest sein soll. Doch wollen wir uns hier nur mit der angegebenen Definition beschäftigen.

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Regeln in $\mathfrak{A}$ gelten, wenn die Figur U_1 geschlossen ist:

Wenn in einem Gewebe U_1 geschlossen ist, so gilt in jedem zugehörigen Normbereich die Regel:

$$a((bc)b) = ((ab)c)b. \tag{8}$$

Also insbesondere, wenn man $a \cdot b = d$ und $b = c^{-1}$ setzt:

$$(d \cdot c) \cdot c^{-1} = d. \tag{9}$$

Zum Beweis betrachten wir die Fig. 10. Da sind bei beliebiger Wahl von a, b, c die den beiden Seiten von (8) entsprechenden Punkte konstruiert (ausgezogen), wir müssen aus der Geschlossenheit von U_1 folgern, daß sie zusammenfallen, also daß Q und R auf einer Geraden 3 liegen. Setzen wir nun auf den beiden Strecken von b nach bc und von ab nach

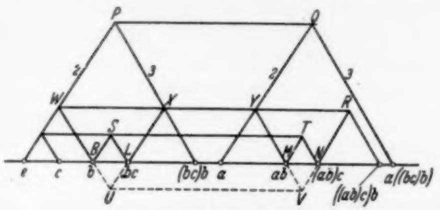


Fig. 10.

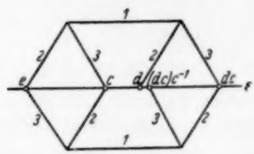


Fig. 11.

$(ab)c$ auch nach unten Dreiecke auf, so bilden die beiden Vierecke $SLUB$ und $TNVM$ den Anfang einer Figur U_1, so daß durch U und V eine Gerade 1 gehen muß. Dann aber bilden auch die acht Punkte $PXUW$, $QRVY$ schon fast eine Figur U_1, und da diese geschlossen sein soll, muß durch Q und R wirklich eine Gerade 3 gehen. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Die Gleichung (9) hätte man statt als Sonderfall von (8) auch leicht direkt beweisen können, der Beweis geht aus der Fig. 11 hervor, die wohl keiner Erläuterung mehr bedarf. (9) ist vor allem nützlich, um Gleichungen lösen zu können; wenn (9) gilt, so ist die Lösung der Gleichung $x \cdot m = n$ offenbar $x = (x \cdot m)m^{-1} = n \cdot m^{-1}$. Das werden wir noch oft verwenden.

Wir beweisen gleich die Umkehrung unseres Satzes:

Wenn in einem Normbereich (8) *gilt, so ist in dem zugehörigen Gewebe U_1 geschlossen.*

Setzt man nämlich zunächst: $a \cdot b = e$, $b \cdot c = e$, so besagt (8): $c \cdot b = e$. Also ist in (8) die Aussage enthalten, daß jedes Linksinverse auch rechtsinvers ist. Setzt man $a \cdot b = d$, $b = c^{-1}$, so folgt wieder (9).

In der Fig. 12 sind nun acht Punkte eingezeichnet, durch die Gleichheit der entsprechenden Koordinaten ist schon ausgedrückt, daß sie auf den angegebenen Geraden 1 und 2 liegen. Sie liegen auch paarweise auf den eingezeichneten Geraden 3, wenn die Bedingungen gelten:

$$(10) \qquad b_1 a_2 = b_2 a_3, \qquad b_1 a_1 = b_2 a_2, \qquad c_1 a_2 = c_2 a_3.$$

Bewiesen muß werden, daß die so angefangene Figur U_1 sich schließt, also die Pfeile dieselbe Gerade 3 darstellen, d. h., daß $c_1 a_1 = c_2 a_2$.

Aus den beiden ersten Gleichungen (10) folgt nun mit Hilfe von (9) zunächst

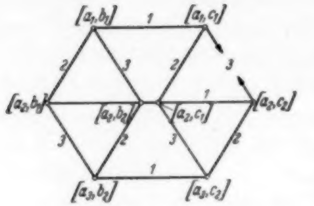


Fig. 12.

$$b_2 = (b_1 a_1) a_2^{-1} = (b_1 a_2) a_3^{-1}.$$

Daraus durch Rechtsmultiplikation mit a_2 nach (9) und (8):

$$b_1 a_1 = ((b_1 a_2) a_3^{-1}) a_2 = b_1((a_2 a_3^{-1}) a_2),$$

und wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung $b_1 x = n$:

$$a_1 = (a_2 a_3^{-1}) a_2.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir links mit c_1 und wenden wieder (8) an, jetzt in umgekehrter Richtung. Dann ergibt sich:

$$c_1 a_1 = c_1((a_2 a_3^{-1}) a_2) = ((c_1 a_2) a_3^{-1}) a_2.$$

Hier setzen wir rechts nach der dritten Gleichung (10) ein. Dann ergibt sich mit (9) tatsächlich

$$c_1 a_1 = ((c_2 a_3) a_3^{-1}) a_2 = c_2 a_2,$$

also gerade die zu beweisende Gleichung. Damit ist der Satz bewiesen.

Es ist nun leicht zu sehen, was die Geschlossenheit von U_2 für unseren Normbereich $\mathfrak{A}$ bedeutet. Denn in U_2 sind offenbar gegenüber U_1 die Rollen der Scharen 1 und 2 vertauscht, und U_2 spielt also bei der „Sternmultiplikation", die wir früher auf der Geraden der Schar 2 durch E erklärt haben, genau die Rolle, die U_1 für die gewöhnliche Gewebemultiplikation innehat. Wenn also in einem Gewebe U_2 geschlossen ist, so gilt

$$a * ((b * c) * b) = ((a * b) * c) * b.$$

Das bedeutet aber nach (6):

Wenn in einem Gewebe U_2 geschlossen ist, so gilt im zugehörigen Bereich $\mathfrak{A}$ die Regel:

$$(11) \qquad (b(cb))a = b(c(ba)).$$

Insbesondere, wenn man $ba = d$ und $b = c^{-1}$ setzt:

$$(12) \qquad c^{-1}(c \cdot d) = d.$$

Genau so wie beim vorigen Satz beweist man die Umkehrung:

Wenn in einem Normbereich (11) — *also* (12) — *gilt, so ist in dem zugehörigen Gewebe U_2 geschlossen.*

Es ist nicht so einfach, auch für U_3 die algebraische Bedeutung anzugeben. Das liegt offenbar daran, daß aus dem Geschlossensein von U_3 keine Regel wie (9) oder (12) folgt. Wir erwähnen nur eine Aussage, die man leicht nachprüft: Wenn U_3 geschlossen ist, so gilt

(13) $$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} a^{-1}.$$

Das läßt sich sofort aus der Fig. 13 ablesen: setzt man auf den Strecken von $a b$ nach e und von e nach $b^{-1} a^{-1}$ die Dreiecke auf, so folgt aus der Geschlossenheit von U_3, daß ihre Spitzen auf einer Geraden 1 liegen. Darin ist die Aussage enthalten.

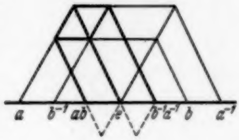


Fig. 13.

Diese Bedingung ist aber nicht notwendig und hinreichend für die Geschlossenheit von U_3. Eine notwendige und hinreichende Bedingung läßt sich scheinbar nicht in der Form *einer* Gleichung angeben.

Interessant ist, daß, wenn U_2 geschlossen ist, das Gewebe noch in anderer Weise algebraisch dargestellt werden kann.

Wir wollen nämlich dem Gewebepunkt P statt, wie früher, das Elementepaar $\{b, a\}$ jetzt das Elementetripel $\{b^{-1}, a^{-1}, a b\}$ zuordnen. Nun ist nach (12)

$$b^{-1}(a^{-1}(a b)) = e,$$

wir haben also jedem Punkte P des Gewebes ein geordnetes Tripel $\{b_1, b_2, b_3\}$ von Elementen des Bereiches $\mathfrak{A}$ zugeordnet, wofür

(14) $$b_1 (b_2 \cdot b_3) = e.$$

Offenbar ist b_1 auf den Geraden 1 fest; b_2 auf den Geraden 2 und $b_3 = a b$ auf den Geraden 3. Die Zuordnung ist offenbar wieder eineindeutig. Daher lassen sich die letzten Sätze auch so formulieren:

Wenn in einem Gewebe U_2 geschlossen ist, so kann man die Punkte des Gewebes eineindeutig beziehen auf solche Elementetripel $\{b_1, b_2, b_3\}$ *eines Normbereiches* $\mathfrak{A}$, *für die* (14) *gilt. In* $\mathfrak{A}$ *gelten die Regeln* (11) *und* (12).

Wenn in einem Normbereich $\mathfrak{A}$ (11) *und* (12) *gelten, so bilden die geordneten Elementetripel aus* $\mathfrak{A}$, *für die* (14) *gilt, die Punkte eines Gewebes, wenn man die Geraden durch* $b_1 =$ konst.; $b_2 =$ konst.; $b_3 =$ konst. *erklärt*[8]); *in diesem Gewebe ist U_2 geschlossen.*

Diese Darstellung durch Elementetripel, die für Gruppen von Kneser stammt, ist also nicht in jedem Gewebe ohne weiteres möglich.

[8]) Das ist offenbar dasselbe Gewebe, das wir früher durch die Elementepaare dargestellt hatten, nur in anderer Bezeichnungsweise.

§ 3.

Gewebe und Quasigruppen.

Wir wollen nun noch die Gewebe charakterisieren, in denen sämtliche U-Figuren geschlossen sind. Das wird erleichtert durch den Satz:

Wenn in einem Gewebe die Figuren U_1 und U_2 geschlossen sind, so schließt sich stets auch U_3.

Zum Beweis betrachten wir die Fig. 14. Wir wollen zeigen, daß durch C und G eine Gerade 3 geht. Dazu bestimmen wir zunächst die Schnittpunkte K, L und M von FG mit AB, CD und AE und setzen auf KM und LF die beiden Dreiecke KNM und LOF auf. Da U_1 geschlossen ist, liegen N und O auf einer Geraden 1. Ziehen wir KN und LO durch, wobei wir die Schnittpunkte P und Q finden, so bilden $NOQP$, $MFHE$ eine Figur U_2, also liegen P und Q auf einer Geraden 1. Dann bilden aber die Punkte $KBFP$, $LCGQ$ wiederum eine Figur U_1, so daß tatsächlich durch C und G eine Gerade 3 geht. Damit ist der Satz bewiesen.

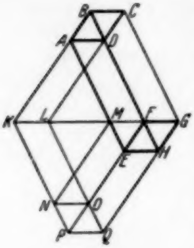


Fig. 14.

Jetzt können wir aber sofort den Satz aussprechen:

In einem Gewebe sind dann und nur dann sämtliche U-Figuren geschlossen, wenn in dem zugehörigen Normbereich die Regeln (8) *und* (11) *gelten.*

Daß die Bedingungen notwendig sind, ist ja nach den Ergebnissen von § 2 klar. Wenn aber umgekehrt im Normbereich (8) und (11) gelten, so schließt sich nach § 2 zunächst U_1 und U_2 und dann nach dem eben bewiesenen Satze auch U_3, die Bedingung ist also auch hinreichend.

Wir wollen einen Normbereich, in dem (8) und (11) gelten, mit Frl. R. Moufang eine *Quasigruppe* nennen. Dann kann man unser Ergebnis etwas ausführlicher auch so formulieren:

Wenn in einem Gewebe die Figuren U_1, U_2, U_3 sämtlich geschlossen sind, so ist der zugehörige Normbereich $\mathfrak{A}$ bei jeder Wahl des Einheitspunktes eine Quasigruppe. Für das Gewebe gibt es eine Knesersche Darstellung in $\mathfrak{A}$, wobei die Punkte eineindeutig bezogen sind auf diejenigen geordneten Elementetripel $\{b_1, b_2, b_3\}$ aus $\mathfrak{A}$, wofür

$$b_1\, b_2\, b_3 = e, \tag{15}$$

und die Geraden dargestellt werden durch $b_1 =$ konst., $b_2 =$ konst., $b_3 =$ konst.

Sei umgekehrt eine beliebige Quasigruppe gegeben. Nennt man dann jedes geordnete Elementetripel $\{b_1, b_2, b_3\}$ dieser Quasigruppe, wofür (15) *gilt, einen Punkt, und erklärt die Geraden durch* $b_i =$ konst., *so bilden diese Punkte und Geraden ein Gewebe, in dem sämtliche U-Figuren geschlossen sind.*

Wir brauchen nur noch zu beweisen, daß die in (15) weggelassenen Klammern tatsächlich unwesentlich sind, also daß, wenn für drei Elemente b_1, b_2, b_3 einer Quasigruppe (14) gilt, tatsächlich auch $(b_1 b_2) b_3 = e$ wird, und umgekehrt. Das ist einfach, wenn man berücksichtigt, daß in einer Quasigruppe die aus (8) und (11) als Sonderfälle hervorgehenden Regeln (9) und (12) gelten. Aus (14) folgt nämlich zunächst

$$b_2 b_3 = b_1^{-1}$$

und daraus nach (9)

$$b_2 = b_1^{-1} b_3^{-1}$$

und mit (12)

$$b_1 b_2 = b_1 (b_1^{-1} b_3^{-1}) = b_3^{-1}.$$

Das ist aber genau die zu beweisende Gleichung.

Die Definition der Quasigruppe läßt sich noch vereinfachen, wir behaupten nämlich: *Ein Normbereich $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann eine Quasigruppe, wenn in ihm die Regel gilt:*

(16) $$a(b(cb)) = ((ab)c)b \text{ für beliebige } a, b, c \subset \mathfrak{A}.$$

Einerseits folgt nämlich aus (8), wenn man $a = b^{-1}$ setzt,

$$b^{-1}((bc)b) = cb$$

und daraus durch Linksmultiplikation mit b nach (12)

(17) $$b(cb) = (bc)b.$$

Setzt man das in (8) ein, so folgt die Regel (16), die so in jeder Quasigruppe gilt.

Gilt umgekehrt in einem Normbereich die Regel (16), so folgt, wenn man $a = e$ setzt, die Regel (17); und durch Einsetzen von (17) in (16) zunächst (8), also insbesondere (9). Setzt man in (16) $a = b^{-1}$, $cb = d$, so ist mit c auch d ein beliebiges Element aus $\mathfrak{A}$, und es gilt also für beliebige d, b aus $\mathfrak{A}$ die Gleichung $b^{-1}(bd) = d$. Damit ist auch (12) bewiesen, es fehlt nur noch der Nachweis von (11).

Wir zeigen zunächst, daß für zwei beliebige Elemente a, b gilt:

(18) $$(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}.$$

Das ist einfach: aus $a^{-1}(ab) = b$ folgt durch Rechtsmultiplikation mit $(ab)^{-1}$ unter Benutzung von (9): $a^{-1} = b(ab)^{-1}$, und daraus, wenn man links mit b^{-1} multipliziert und (12) berücksichtigt, die obige Gleichung. (18) lehrt auch, wie man von Produkten mehrerer Faktoren das Inverse zu bilden hat. Nach (8) hat man nun für beliebige a, b, c

$$a^{-1}((b^{-1}c^{-1})b^{-1}) = ((a^{-1}b^{-1})c^{-1})b^{-1};$$

geht man hier links und rechts zum Inversen über unter wiederholter Benutzung von (18), so findet man

$$(b(cb))a = b(c(ba));$$

also genau die Gleichung (11). Damit ist alles bewiesen [9]).

§ 4.

Eine kommutative, nichtassoziative Quasigruppe.

Und jetzt ein Beispiel für eine nichtassoziative, endliche und sogar kommutative Quasigruppe. Unsere Quasigruppe besteht aus den Vierervektoren der Form

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \tag{19}$$

wo jedes a_i die drei Werte 0, 1 oder 2 haben kann. Für diese Vektoren sei zunächst eine Addition erklärt, und zwar soll diese mod 3 durchgeführt werden. So läßt sich je zwei Vektoren unseres Bereiches stets im Bereich eine Summe zuordnen. Die Multiplikation sei jetzt so erklärt: nennen wir $A \cdot B = C$, so soll sein:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + b_1, \\ c_2 &= a_2 + b_2, \\ c_3 &= a_3 + b_3, \\ c_4 &= a_4 + b_4 + (a_3 - b_3)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{20}$$

Auch hier soll mod 3 gerechnet werden. Das Produkt zweier Elemente ist also wieder einer unserer Vektoren, Einheitselement der Multiplikation ist offenbar der Nullvektor, weiter ist diese, wie sofort ersichtlich, kommutativ, denn C ändert sich nicht, wenn man in (20) a und b vertauscht. Sie ist auch eindeutig umkehrbar, denn wenn A und C gegeben sind, so kann man aus den ersten Gleichungen (10) eindeutig b_1, b_2, b_3 finden, und die letzte Gleichung (20) liefert dann eindeutig den Wert von b_4. Es bleibt nur zu zeigen, daß (3) erfüllt ist.

Um das festzustellen, vergleichen wir zunächst die beiden Produkte $(A \cdot B) \cdot C$ und $A \cdot (B \cdot C)$, wo jetzt A, B, C beliebige Elemente aus unserem Bereich sein sollen. Es ist klar, daß von beiden Produkten die

---

[9]) Aus dem Beweis ergibt sich offenbar, daß auch schon (8) und (12) zur Charakterisierung der Quasigruppe ausreichen würden, wir haben ja eben aus (8) und (12) die Gleichung (11) hergeleitet. Das ist die ursprüngliche Definition von Frl. Moufang. Geometrisch bedeutet das folgendes: Wenn in einem Gewebe sämtliche Figuren U_1 geschlossen sind und außerdem diejenigen Figuren U_2, wo A und B auf einer festen Geraden 2 liegen, so schließen sich bereits *alle* Figuren U_2.

ersten drei Komponenten übereinstimmen, sie entstehen einfach durch Addition der entsprechenden Komponenten der Faktoren. Für die vierten Komponenten finden wir:

$$A\cdot(B\cdot C)\colon\ a_4+b_4+c_4+(b_3-c_3)\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}+(a_3-b_3-c_3)\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1+c_1 & b_2+c_2\end{vmatrix},$$

$$(A\cdot B)\cdot C\colon\ a_4+b_4+c_4+(a_3-b_3)\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}+(a_3+b_3-c_3)\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}.$$

Die Differenz dieser beiden Ausdrücke beträgt, wie eine kleine Rechnung zeigt, genau den Wert der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.\ ^{10})$$

Wir können also schreiben:

$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C-(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})\cdot D. \tag{21}$$

Hier stellt $\mathfrak{a}$ den Vektor dar, der aus den drei ersten Komponenten von A besteht, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ entsprechend, und $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ bedeutet die Determinante dieser Vektoren, während D das Element $(0, 0, 0, 1)$ darstellt.

Aus (21) folgt nun aber sehr leicht die Regel (3). Denn da zu $B\cdot C$ als Vektor nach (20) einfach $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ gehört, haben wir nach zweimaliger Anwendung von (21):

$$\begin{aligned} B\{A(B\cdot C)\} &= (B\cdot A)(B\cdot C)-(\mathfrak{b},\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\cdot D,\\ &= \{(BA)B\}C-(\mathfrak{b}+\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})D-(\mathfrak{b},\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\mathfrak{c})D,\\ &= \{(BA)B\}C. \end{aligned}$$

Die Zusatzglieder heben sich weg, es ist ja

$$(\mathfrak{b}+\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})=(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}),$$
$$(\mathfrak{b},\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=(\mathfrak{b},\mathfrak{a},\mathfrak{c})=-(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}).$$

Damit ist die Gleichung (3a) bestätigt, wegen der Kommutativität folgt aber daraus sofort (3).

Wir haben hier also eine endliche, kommutative Quasigruppe, die nicht assoziativ ist. Sie hat $3^4=81$ Elemente. Dazu gehört ein Gewebe mit 81^2 Punkten, in dem alle U-Figuren geschlossen sind, also auch S geschlossen ist, aber R nicht immer[11]).

---

[10]) An sich findet man $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & +a_3\\ b_1 & b_2 & -2b_3\\ c_1 & c_2 & -2c_3\end{vmatrix}$, da aber mod 3 gerechnet wird, ist das genau die oben angegebene Determinante.

[11]) Wie Herr Zassenhaus, dem ich dieses Beispiel verdanke, bemerkt, läßt sich in dieser Weise über jedem assoziativen Ring der Charakteristik 3 eine Quasigruppe konstruieren.

§ 5.

Die konjugierten Multiplikationen.

Wenn in einem Gewebe U_1, U_2, U_3 geschlossen sind, so gehört offenbar bei jeder Wahl eines Einheitspunktes zu diesem Gewebe eine Quasigruppe. Wir wollen noch untersuchen, in welcher Beziehung diese Quasigruppen zueinander stehen. Der Übergang zu einem anderen Einheitspunkte läßt sich offenbar stets schrittweise durchführen, indem wir E zunächst auf einer Geraden 1, und dann auf einer Geraden 2 verschieben.

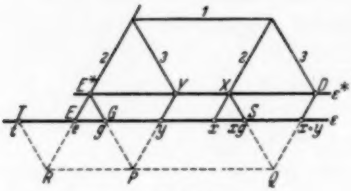


Fig. 15.

Sehen wir zunächst nach, was sich bei einer Verschiebung der letztgenannten Art ändert (Fig. 15).

Wir können dann sofort ablesen, was bei Verschiebung längs einer Geraden 1 geschieht, dazu brauchen wir nur zuerst zur Sternmultiplikation nach (6) überzugehen.

Sei E^* der neue Einheitspunkt, ε^* die Gerade 1 durch E^*. Dann müssen wir zunächst den Punkten von ε^* Symbole zuordnen. Wir machen das, indem wir durch jeden Punkt die Gerade 2 ziehen und mit ε schneiden. So wollen wir X das Symbol x und Y das Symbol y zuordnen. Die Produktkonstruktion auf ε^* ordnet nun X und Y den Punkt P zu, das zu P gehörige Symbol ist das Produkt von x und y bei der neuen Multiplikation. Wir wollen dieses Produkt mit $x \circ y$ andeuten. Wir wollen nun nachsehen, wie dieses neue Produkt mit den alten zusammenhängt. Dazu ziehen wir die punktierten Geraden. 3 durch E möge ε in G schneiden, das zugehörige Symbol sei g. 3 durch y schneidet dann ε in dem Punkt S mit Symbol xg. Setzen wir auf den Strecken von g nach y und von x nach xg die Dreiecke auf, so liegen wegen der Geschlossenheit von U_1 die beiden Spitzen P und Q auf einer Geraden 1. Konstruiert man nun noch die Punkte R und T, und gehört zu T das Symbol t, so hat man offenbar:

$$yt = g, \qquad (x \circ y) \cdot t = xg.$$

Daraus ergibt sich aber: $t = y^{-1} g$, $t^{-1} = g^{-1} y$, also

$$x \circ y = (xg)(g^{-1} y). \tag{22}$$

Bei Verschiebung längs einer Geraden 1 erhält man offenbar entsprechend

$$x \circ y = (xg^{-1})(gy).$$

Das gibt nichts wesentlich Neues.

Nun genügt offenbar die neue Multiplikation (22) wieder den Regeln (3). Man hat also:

Wenn in einer beliebigen Quasigruppe durch (22) *mit beliebigem g eine neue Multiplikation definiert wird, so bilden die Elemente auch in bezug auf diese neue Multiplikation eine Quasigruppe. Offenbar sind sämtliche Multiplikationen, die man so erklären kann, untereinander und mit der ursprünglichen vollkommen gleichwertig.*

Es wird also zweckmäßig sein, bei einer Untersuchung der Quasigruppen stets sämtliche Multiplikationen heranzuziehen.

Offenbar gilt:

Wenn sämtliche Multiplikationen identisch sind, so ist die Quasigruppe assoziativ.

Denn wenn für alle x, y, g

$$(xg)(g^{-1}y) = xy \tag{23}$$

gilt, so ist, wenn $g^{-1}y = z$ gesetzt wird, auch z ein beliebiges Element, und man hat dann $(xg)z = x(gz)$ für beliebige x, g, z.

Interessant ist aber auch der Satz:

Wenn sämtliche Multiplikationen kommutativ sind, so ist die Quasigruppe assoziativ (und natürlich kommutativ).

Man sieht daraus, daß es sich bei den verschiedenen Multiplikationen nicht um eine Art Isomorphie handeln kann, denn wir haben ja schon ein Beispiel für eine kommutative, nicht assoziative Quasigruppe. Bei dieser können offenbar nicht *alle* Multiplikationen kommutativ sein, dann sind sie aber auch sicher nicht alle isomorph.

Zum Beweis des Satzes ziehen wir wieder die Gewebe heran. Die Kommutativität unserer Quasigruppe bedingt die Geschlossenheit gewisser Figuren T, nämlich, wie man sich leicht überzeugt, derjenigen Figuren T, worin ε und ε_2 vorkommen. Sollen nun sämtliche Multiplikationen kommutativ sein, so bedeutet das offenbar, daß *alle* Figuren T geschlossen sind. Dann aber gilt das Assoziativgesetz, denn aus der Geschlossenheit von T folgt nach einem bekannten Satze[12]), daß auch R geschlossen ist.

Aber auch rechnerisch kann man den Satz leicht bestätigen, $x \circ y = y \circ x$ bedeutet nämlich nach (22):

$$(xg)(g^{-1}y) = (yg)(g^{-1}x).$$

Das soll für alle x, y, g gelten. Multipliziert man links mit g^{-1} und wendet links und rechts (3) an, so kommt

$$(g^{-1}x)y = (g^{-1}y)x.$$

[12]) Vgl. G. Thomsen, loc. cit. [1]).

Da nun auch die ursprüngliche Multiplikation kommutativ sein soll, folgt daraus

$$(x g^{-1}) y = x (g^{-1} y),$$

also das Assoziativgesetz.

Nachtrag bei der Korrektur (Februar 1937).

Wie erwähnt, folgt aus dem Geschlossensein zweier U-Figuren, daß auch die dritte sich immer schließt. Offen blieb die Frage, ob auch aus *einer* U-Figur, etwa U_1, die beiden anderen folgen. Daß das nicht der Fall ist, zeigt folgendes Beispiel, das ich ebenfalls Herrn Zassenhaus verdanke.

Wir betrachten wie in § 4 Vektoren:

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}, \tag{24}$$

wollen aber jetzt mod 2 rechnen, so daß a_i nur die Werte 0 und 1 annehmen soll. Unser Bereich besteht dann aus acht Elementen. Das Produkt zweier Elemente sei jetzt so definiert:

$$A \cdot B = \{a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3 + f(a_1, a_2, b_1, b_2)\}. \tag{25}$$

Hier ist f eine zunächst beliebige Funktion der Argumente, die natürlich ebenfalls nur die Werte 0 und 1 annimmt.

Wir können auch die beiden ersten Komponenten von A zu einem Zweiervektor $\mathfrak{a}$ zusammenfassen, also $\mathfrak{a} = \{a_1, a_2\}$, $A = \{\mathfrak{a}, a_3\}$, $B = \{\mathfrak{b}, b_3\}$. Dann kann man auch schreiben:

$$f(a_1, a_2, b_1, b_2) = f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}). \tag{26}$$

Zunächst sieht man nun wie in § 4, daß die Multiplikation (25) eindeutig umkehrbar ist. Sie hat das Einheitselement $\{0, 0, 0\}$, wenn f die Eigenschaft hat

$$f(0, \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}, 0) = 0, \tag{27}$$

wo natürlich 0 den Nullvektor darstellt. Unser Bereich ist dann also ein Normbereich. Wir wollen zeigen: Ist f linksseitig additiv, gilt also:

$$f(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}', \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + f(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}), \tag{28}$$

so gilt in unserem Normbereich die Regel (8).

Man braucht dazu nur nachzuprüfen, daß die dritten Komponenten von $A((BC)B)$ und $((AB)C)B$ übereinstimmen, die beiden ersten findet man wie in § 4 einfach durch Addition, diese sind also sicher gleich. Die dritten Komponenten sind nun

$$\begin{aligned} A((BC)B)&: a_3 + b_3 + c_3 + b_3 + f(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) + f(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}, \mathfrak{b}) + f(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}), \\ ((AB)C)B&: a_3 + b_3 + c_3 + b_3 + f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + f(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) + f(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, \mathfrak{b}). \end{aligned} \tag{29}$$

Die Zusatzglieder kann man sofort aufschreiben, weil ja von sämtlichen Teilprodukten die Zweiervektoren bekannt sind. Aus der Links additivität von f und weil mod 2 gerechnet wird, folgt aber sofort, daß die beiden Ausdrücke in (29) tätsächlich gleich sind. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Setzen wir jetzt insbesondere:

$$f(a_1, a_2, b_1, b_2) = a_2 \cdot b_1 \cdot b_2, \tag{30}$$

dann ist f linear in a_1 und a_2, also sicher linksadditiv, in unserem Normbereich gilt also die Regel (8). Um zu zeigen, daß (11) nicht gilt, vergleichen wir die beiden Produkte $B(AB)$ und $(BA)B$. Ihre dritten Komponenten sind

$$B(AB)\colon\ b_3 + a_3 + b_3 + f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$
$$(BA)B\colon\ b_3 + a_3 + b_3 + f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

und deren Differenz:

$$f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b}) - f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) - f(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$$
$$= b_2\{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - a_1 a_2 - b_1 b_2\} = b_2(b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

ist sicher nicht immer Null, z. B. nicht für $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Dann gilt aber (11) nicht, denn in einer Quasigruppe müssen $B(A \cdot B)$ und $(BA) \cdot B$ einander gleich sein. Damit ist unser Beispiel fertig[13]).

Hiermit ist schließlich auch die Frage geklärt, ob aus S schon die Geschlossenheit einer, und damit wegen der Symmetrie von S, aller U-Figuren folgt. Offenbar ist das nicht der Fall, denn wenn aus S schon U_2 folgte, so würde das um so mehr für U_1 gelten, und daß aus U_1 *nicht* U_2 folgt, haben wir ja eben gesehen[14]).

Hamburg, im November 1936.

---

[13]) Allgemeinere Beispiele dieser Art lassen sich so erklären: seien M und m zwei Moduln der Charakteristik 2, wir betrachten Paare $A = \{\mathfrak{a}, a\}$, wobei $\mathfrak{a}$ ein Element aus M und a ein Element aus m sein soll. Erklärt man dann die Multiplikation unserer Paare durch: $A \cdot B = \{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, a + b + f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\}$, so bilden sie einen Normbereich der verlangten Art, wenn f die Eigenschaften (27) und (28) hat, und dieser Normbereich wird im allgemeinen wieder keine Quasigruppe sein.

[14]) Wenn man in dem obigen Beispiel $f = a_1 a_2 b_1 b_2$ setzt, erhält man ein Gewebe, in welchem S geschlossen ist, aber keine U-Figur sich stets schließt. Doch läßt sich das nicht so leicht durchrechnen.

(Eingegangen am 4. 12. 1936.)

Das allgemeine Prinzip der Maßbestimmung in der Cayley-Kleinschen Geometrie.

Seinem lieben Freund Oskar Bolza
zum 80. Geburtstag am 12. Mai 1937 gewidmet

von

Lothar Heffter in Freiburg i. B.

In den Sitzungsber. der Heidelberger Akad. d. Wiss. 1924 und 1925 habe ich zuerst auf ein allgemeines Prinzip der Maßbestimmung in der Cayley-Kleinschen Geometrie aufmerksam gemacht und dies in dem Lehrbuch der Analytischen Geometrie, Bd. III, 1929 (hier als N. E. G. zitiert), ausführlicher dargestellt. Der Fall zweier inzidenten Geraden im Raum ist a. a. O. nur unter der Annahme behandelt worden, daß das Geradenpaar in einer Koordinatenebene liegt, und das war bei dem Gang der damaligen Darstellung das Gegebene. Er bietet aber gerade bei beliebiger Lage des Geradenpaares im Raum ein besonderes Interesse, weil er hier zu einer Ergänzung des Prinzipes führt und damit gleichsam die letzte „Feuerprobe" für dessen Bedeutung darstellt. — Die Abschnitte V und VI enthalten zwei weitere neue Anwendungen des Prinzipes.

I. Der Cayley-Kleinsche Raum und seine Bewegungen.

Als projektiven, also noch nicht „geeichten" Ausgangsraum benutzen wir den Euklidischen Raum, bei dem aber der uneigentlichen Ebene, somit auch dem Kugelkreis keinerlei Auszeichnung zukommt. In diesem Raum seien x_1, x_2, x_3, x_4 und u_1, u_2, u_3, u_4 gleichseitige, orthogonale, homogen gemachte Punkt- und Ebenenkoordinaten, p_{ik} und q_{ik} ($ik = 23$, 31, 12, 14, 24, 34) die zugehörigen Strahlen- und Achsenkoordinaten (Linienkoordinaten).

Dieser Raum wird zu einem Cayley-Kleinschen Raum „geeicht" durch Auszeichnung der Eichfläche (des absoluten Gebildes), deren Gleichung in Punkt-, Ebenen-, Linienkoordinaten lautet

$$(1)\begin{cases} F(x,x) \equiv \varepsilon(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_4^2 = 0,\ f(u,u) \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \varepsilon u_4^2 = 0, \\ \Phi(p,p) \equiv p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 + \varepsilon(p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2) = 0, \\ \varphi(q,q) \equiv q_{23}^2 + q_{31}^2 + q_{12}^2 + \varepsilon(q_{14}^2 + q_{24}^2 + q_{34}^2) = 0. \end{cases}$$

Für $\varepsilon = 0, 1, -1$ entsteht also bzw. der Euklidische, elliptische, hyperbolische Raum. F, f, Φ, φ werden auch *Maßfunktionen* genannt. — *Normalkoordinaten* nicht absoluter, zugänglicher Elemente sind solche, für die die Maßfunktion den Wert 1 hat.

Die *Bewegungen* im Cayley-Kleinschen Raum (reelle, gleichsinnige, projektive Transformationen, die die Eichfläche im ganzen invariant lassen) sind in N. E. G., Artikel 434, durch die Gleichungen (14a) und (14b) zwischen Ebenen- bzw. Punktkoordinaten dargestellt. Daraus folgen die Bewegungsgleichungen zwischen Achsenkoordinaten und die zwischen Strahlenkoordinaten. Stehen in diesen vier Gleichungssystemen beiderseits Normalkoordinaten, so sind die Proportionalitätsfaktoren $= \pm 1$. Ist letzteres der Fall, so sind, gleichviel ob die auftretenden Koordinaten normale sind oder nicht, bei Anwendung der betreffenden Gleichungen $f(u,u)$, $F(x,x)$, $\varphi(q,q)$, $\Phi(p,p)$ *absolut invariant* und umgekehrt. Wir denken deshalb die Proportionalitätsfaktoren stets $= 1$ gesetzt.

II. Das Prinzip der Maßbestimmung.

Liegt eine Figur aus mehreren, in Normalkoordinaten gegebenen Elementen vor, so wird in allen Fällen aus diesen ein Ausdruck gebildet, der nur verschwindet, wenn der Figur keine von Null verschiedene Maßzahl zukommt, *eindeutig bestimmt* und bei allen Bewegungen *absolut invariant* ist. Er wird als Quadrat der Maßzahl jener Figur definiert, das wir als „*Sinusquadrat*" (im weiteren Sinne) und mit S_ε^2 bezeichnen.

Besteht die Figur aus einem *Punkt* und einer *Ebene*, so ist die *Komposition* ihrer Normalkoordinaten, besteht sie aus *2 Geraden*, so ist die *Komposition* der Normalachsenkoordinaten der einen mit den gleichindizierten Normalstrahlenkoordinaten der anderen, besteht sie aus *4 Punkten* oder *4 Ebenen*, so ist die *Determinante* aus ihren Normalkoordinaten ein Ausdruck, der quadriert den aufgestellten Forderungen genügt. Er wird deshalb zur Definition des (Sinus- oder) *Abstandsquadrates* des Punktes und der Ebene, des (Sinus- oder) *Momentquadrates* der beiden Geraden, des *Ecken-* bzw. *Seitensinusquadrates des Tetraeders* benutzt.

In allen anderen, in N. E. G. behandelten Fällen bestimmen die Ausgangselemente projektiv ein *neues* (Schnitt- oder Verbindungs-) *Element*, dessen Koordinaten aus den *Normal*koordinaten der Ausgangselemente in *einfachster* Weise, d. h. durch Komposition oder Determinantenbildung *ohne Hinzufügung eines Faktors*, berechnet werden. *Die so gewonnenen Punkt-, Ebenen-, Strahlen- oder Achsenkoordinaten des neuen Elementes werden in die dafür aufnahmefähige Maßfunktion F, f, Φ oder φ eingesetzt*

und geben ihr einen eindeutig bestimmten Wert, der bei allen Bewegungen absolut invariant ist und deshalb als „Sinusquadrat" der Ausgangsfigur definiert wird.

Für ein *inzidentes Geradenpaar* ist das oben erwähnte Moment $= 0$. Aber es kommt ihm ein Sinusquadrat im engeren Sinne zu, das wir nachher (IV) bei *beliebiger* Lage des Geradenpaares im Raum, geführt durch unser Prinzip, definieren wollen. Zwei inzidente Gerade g und $\bar{g}$ haben ja sowohl einen *Schnittpunkt* S, wie eine *Verbindungsebene* v, deren Koordinaten s_i und v_i aus denen von g und $\bar{g}$ zunächst zu berechnen sind (III), um daraus $F(s, s)$ und $f(v, v)$ zu bilden. Dann erst entsteht die Frage: Wie erhält man aus $F(s, s)$ und $f(v, v)$ eine zur Definition von $S_i^2(g, \bar{g})$ geeignete Invariante?

III. Schnittpunkt und Verbindungsebene eines inzidenten Geradenpaares (projektiv).

Für die Berechnung der Schnittpunktskoordinaten s_i aus den Linienkoordinaten q_{ik} und $\bar{q}_{ik}$ der beiden inzidenten Geraden g und $\bar{g}$ — eine Aufgabe, die gelegentlich als die „Crux der projektiven Geometrie" bezeichnet worden ist, — habe ich in dem Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd II (1923), Artikel 270, die Proportionen aufgestellt:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} s_2 : s_3 : s_4 &= (q_1\bar{q}_1)_{34} : (q_1\bar{q}_1)_{42} : (q_1\bar{q}_1)_{23} \\ s_3 : s_4 : s_1 &= (q_2\bar{q}_2)_{41} : (q_2\bar{q}_2)_{13} : (q_2\bar{q}_2)_{34} \\ s_4 : s_1 : s_2 &= (q_3\bar{q}_3)_{12} : (q_3\bar{q}_3)_{24} : (q_3\bar{q}_3)_{41} \\ s_1 : s_2 : s_3 &= (q_4\bar{q}_4)_{23} : (q_4\bar{q}_4)_{31} : (q_4\bar{q}_4)_{12}, \end{aligned}\right.$$

wo $(q_1\bar{q}_1)_{34} \equiv \begin{vmatrix} q_{13} & q_{14} \\ \bar{q}_{13} & \bar{q}_{14} \end{vmatrix}$, usw. Durch Vertauschung von s mit v, von q mit p erhält man ein System (2b) zur Berechnung der Koordinaten v_i der Verbindungsebene v. Durch Multiplikation der 3 Zahlen rechts in der zweiten und vierten Zeile mit -1 und etwas andere Gruppierung erhalten wir aus (2) das System

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} s_2 : s_3 : s_4 &= (q_1\bar{q}_1)_{34} : (q_1\bar{q}_1)_{42} : (q_1\bar{q}_1)_{23} \\ s_1 : s_3 : s_4 &= (q_2\bar{q}_2)_{43} : (q_2\bar{q}_2)_{14} : (q_2\bar{q}_2)_{31} \\ s_1 : s_2 : s_4 &= (q_3\bar{q}_3)_{24} : (q_3\bar{q}_3)_{41} : (q_3\bar{q}_3)_{12} \\ s_1 : s_2 : s_3 &= (q_4\bar{q}_4)_{32} : (q_4\bar{q}_4)_{13} : (q_4\bar{q}_4)_{21}. \end{aligned}\right.$$

Durch Vertauschung von s mit v, von q mit p erhält man hieraus wieder ein System (3b). Da aber $p_{ik} = q_{hl}$ gesetzt werden kann, so ist $(p_i\bar{p}_i)_{hl} = (q_k\bar{q}_k)_{hl}$ wenn ik und hl 2 der Wertepaare 23, 31, 12, 14, 24, 34 sind, die keine Zahl gemein haben. Infolgedessen kann die rechte

Seite des Systems (3b) aus (3) durch Transposition und Multiplikation aller Zahlen mit -1 gewonnen werden.

Die 12 in (3) auftretenden Determinanten bezeichnen wir vorübergehend kürzer durch $(i\,k)$, wo dies die in der i-ten Zeile und k-ten Kolonne stehende Determinante sein soll. Diese 12 Determinanten sind nicht sämtlich $= 0$. Denn komponiert man zeilenweise die beiden Matrizen

$$\begin{Bmatrix} q_{23} & q_{31} & q_{12} & q_{14} & q_{24} & q_{34} \\ \bar{q}_{23} & \bar{q}_{31} & \bar{q}_{12} & \bar{q}_{14} & \bar{q}_{24} & \bar{q}_{34} \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{23} & q_{31} & q_{12} \\ \bar{q}_{14} & \bar{q}_{24} & \bar{q}_{34} & \bar{q}_{23} & \bar{q}_{31} & \bar{q}_{12} \end{Bmatrix},$$

so ist wegen der Relation zwischen den q_{ik} und q_{hl} und wegen der Inzidenz der beiden Geraden die Determinante der Komposition $= 0$. Also ist auch die Komposition der gleichstelligen Determinanten $= 0$, d. h.

$$(4)\quad 2[14)(41)+(24)(42)+(34)(43)]-2[(23)(32)+(31)(13)+(12)(21)]$$
$$-\begin{vmatrix} q_{23} & q_{14} \\ \bar{q}_{23} & \bar{q}_{14} \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} q_{31} & q_{24} \\ \bar{q}_{31} & \bar{q}_{24} \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} q_{12} & q_{34} \\ \bar{q}_{12} & \bar{q}_{34} \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Wären also jene 12 Determinanten sämtlich $= 0$, so nach (4) auch die drei letzten, d. h. g und $\bar{g}$ wären miteinander identisch.

Multipliziert man nun in (3) die vier Zeilen links bzw. mit v_1, v_2, v_3, v_4, so erhält man das System

$$(5)\quad \begin{cases} \; v_1 s_2 : v_1 s_3 : v_1 s_4 = (12):(13):(14) \\ v_2 s_1 : v_2 s_3 : v_2 s_4 = (21) :(23):(24) \\ v_3 s_1 : v_3 s_2 : v_3 s_4 = (31):(32) :(34) \\ v_4 s_1 : v_4 s_2 : v_4 s_3 = (41):(42):(43) \end{cases}$$

Multipliziert man ebenso in dem erwähnten System (3b) die vier Zeilen links bzw. mit s_1, s_2, s_3, s_4, so ist jedes Produkt $v_i s_k$ in *beiden* Systemen *derselben* Determinante $(i\,k)$ proportional. Daraus folgt leicht, daß

$$(6)\qquad v_i s_k = \lambda (i\,k),$$

wo λ in allen 12 Gleichungen *derselbe* willkürliche, endliche, von Null verschiedene Faktor ist.

Da mindestens eine der Determinanten $(i\,k) \neq 0$, so kann man außer λ noch ein v_i oder ein s_k beliebig ungleich Null wählen und dann nach (6) alle v_i und s_k einzeln berechnen. Dabei werden natürlich alle v_i nur bis auf einen gemeinsamen willkürlichen Faktor bestimmt und ebenso alle s_k.

Damit ist zunächst die *projektive* Aufgabe der Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes und der Verbindungsebene eines inzidenten Geradenpaares gelöst.

IV. Das Sinusquadrat eines inzidenten Geradenpaares.

Nunmehr seien die reellen Geraden g und $\bar g$ durch ihre Cayley-Kleinschen Normalkoordinaten q_{ik}, $\bar q_{ik}$ gegeben. Dann sind die Determinanten $(i\,k)$, abgesehen höchstens vom Vorzeichen, eindeutig bestimmt. Die *einfachste* Bestimmung der Produkte $v_i s_k$ erfolgt aber, wenn man in (6) $\lambda = 1$ wählt, womit auch die Quadrate der Produkte $v_i s_k$ eindeutig bestimmt sind.

Nun bilden wir das Produkt

$$(7)\qquad \begin{aligned} F(s,s)\,f(v,v) &\equiv [\varepsilon(s_1^2+s_2^2+s_3^2)+s_4^2]\,[v_1^2+v_2^2+v_3^2+\varepsilon v_4^2] \\ &\equiv s_4^2(v_1^2+v_2^2+v_3^2)+\varepsilon^2 v_4^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2) \\ &\qquad + \varepsilon[(s_1^2+s_2^2+s_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)+v_4^2 s_4^2]. \end{aligned}$$

Aus der Inzidenzbedingung zwischen S und v

$$(8)\qquad \sum_i s_i v_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

folgt aber

$$(9)\qquad \sum_i s_i^2 v_i^2 = -2 \sum_{i,k} (i\,k)(k\,i) \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4;\ i \neq k).$$

Setzt man dies in (7) ein und alle Produkte $v_i s_k = (i\,k)$, so folgt unter Wiedereinsetzung der Werte der $(i\,k)$ schließlich

$$(10)\qquad \begin{aligned} &F(s,s)\,f(v,v) \\ &= [(q_1\bar q_1)_{23}+\varepsilon(q_4\bar q_4)_{23}]^2+[(q_2\bar q_2)_{31}+\varepsilon(q_4\bar q_4)_{31}]^2+[(q_3\bar q_3)_{12}+\varepsilon(q_4\bar q_4)_{12}]^2 \\ &\quad+\varepsilon\{[(q_2\bar q_2)_{14}+(q_3\bar q_3)_{14}]^2+[(q_3\bar q_3)_{24}+(q_1\bar q_1)_{24}]^2+[(q_1\bar q_1)_{34}+(q_2\bar q_2)_{34}]^2\}. \end{aligned}$$

Dieses Produkt ist durch die Normalkoordinaten von g und $\bar g$ *eindeutig bestimmt*. Es *verschwindet nur*, wenn S oder v absolut oder, wenn alle s_i bzw. alle $v_i = 0$ sind, d. h. wenn $g \equiv \bar g$ ist. Von einer absoluten Invarianz der beiden *Faktoren* $F(s, s)$ und $f(v, v)$ kann noch nicht gesprochen werden, weil ja die v_i und ebenso die s_i selbst bisher noch gar nicht bestimmt sind, sondern nur ihre Produkte $v_i s_k$. Das *Produkt* (10) ist aber bei allen Bewegungen im Cayley-Kleinschen Raum absolut invariant. Denn bezeichnet man die sechs Klammern [] in (10), die nicht sämtlich $= 0$ sind, der Reihe nach mit Q_{23}, Q_{31}, Q_{12}, Q_{14}, Q_{24}, Q_{34}, so kann man diese als die durch g und $\bar g$ eindeutig bestimmten Achsenkoordinaten einer bestimmten Geraden Q auffassen und hat nach (10)

$$(11)\qquad F(s,s)\,f(v,v) = \varphi(Q,Q),$$

wo nun $\varphi(Q, Q)$ bei allen Bewegungen absolut invariant ist, so daß dies auch von dem *Produkt* $F(s, s)\,f(v, v)$ gilt. Man kann also die *Definition* aufstellen

$$(12)\qquad S_i^2(g,\bar g) = F(s,s)\,f(v,v) = \varphi(Q,Q),$$

worin $\varphi(Q, Q)$ zunächst nur als Abkürzung der rechten Seite von (10) gelten soll. (Für $\varepsilon = 0$ gibt die Definition den richtigen Wert des Euklidischen Sinus, falls man diesen auf anderem Weg erklärt hat.)

Aber man kann rechnerisch feststellen: 1. Q ist die gemeinsame Normale auf g und $\bar{g}$, d. h. auf v, in S. — 2. Sind γ, $\bar{\gamma}$ die beiden Ebenen durch bzw. $g, \bar{g}$, senkrecht auf v, die sich also in Q schneiden, $\gamma_i, \bar{\gamma}_i$ ihre *Normal*koordinaten, so ist $(\gamma\bar{\gamma})_{ik} = Q_{ik}$, also nach N. E. G., Artikel 438 (41 b)

$$\varphi(Q, Q) = S_\varepsilon^2(\gamma, \bar{\gamma}). \tag{13}$$

Daher folgt aus der Definition (12) nach (13) der *Satz:*

$$S_\varepsilon^2(g, \bar{g}) = S_\varepsilon^2(\gamma, \bar{\gamma}). \tag{14}$$

Während also in den früher behandelten Fällen (s. N. E. G. und oben II.) nur ein Schnitt- *oder* Verbindungselement auftrat, dessen Koordinaten, in einfachster Weise berechnet und in die betreffende Maßfunktion eingesetzt, sofort die zur Definition der Maßgröße erforderliche Invariante lieferten, muß man im jetzigen Fall, wo ein Schnitt- *und* ein Verbindungselement auftreten, das invariante *Produkt* der beiden Größen $F(s, s)$ und $f(v, v)$ benutzen.

Wir können aber in zwei verschiedenen Richtungen noch einen Schritt weitergehen, weil bisher immer noch nur die Produkte $v_i s_k$ eindeutig berechnet sind, nicht die v_i und s_k selbst. Vielmehr kann man, wenn die v_i und s_k irgendwie „zusammengehörig“ so bestimmt sind, daß ihre Produkte die gegebenen Werte haben, noch alle v_i mit einem beliebigen, alle s_k mit dem reziproken Faktor multiplizieren. Also kann man einerseits durch Wahl dieses Faktors $F = f$ machen. Wir wollen dann die v_i und s_k *übereinstimmend normiert* nennen und sie als solche durch v_i' und s_k' kennzeichnen. Dann ist

$$S_\varepsilon^2(g, \bar{g}) = F(s', s')^2 = f(v', v')^2. \tag{15}$$

Andererseits kann man entweder die v_i zu Normalkoordinaten machen und die zugehörigen Werte der s_k mit $\dot{s}_k$ bezeichnen oder entsprechend umgekehrt. Dann ist

$$S_\varepsilon^2(g, \bar{g}) = F(\dot{s}, \dot{s}) = f(\dot{v}, \dot{v}). \tag{16}$$

Damit dürfte das allgemeine Prinzip der Maßbestimmung eine interessante Ergänzung gefunden haben.

V. Der Seitensinus eines ebenen Dreiseites und der Kantensinus eines Dreikantes.

Ebenfalls nur unter der Voraussetzung, daß ein Dreieck in der xy-Ebene liegt, ist in N. E. G. Art. 426 sein *Seitensinus* eingeführt und in Art. 427 gezeigt worden, daß er gleich dem Sinus jedes Seitenpaares

multipliziert mit dem Abstand der zugehörigen Ecke von der Gegenseite ist. Auch dieser Begriff soll jetzt für ein *beliebig im Raum* liegendes ebenes Dreiseit aufgestellt werden und mit ihm zugleich der dualistische Begriff des Kantensinus eines beliebig im Raum liegenden Dreikantes.

Sind q, q', q'' drei komplanare, aber im allgemeinen nicht konzentrische, durch ihre Normalkoordinaten gegebene Gerade, v ihre Ebene, S der Schnittpunkt $q' q''$ mit den Koordinaten s_i, zu denen die Ebenenkoordinaten v_i von v in dem Sinn gehören, daß die Produkte $v_i s_k$ die durch die Tabelle (5) für $\lambda = 1$ gegebenen Werte haben, so ist nach dem Lehrbuch der anal. Geom. Bd. II, Art. 269 (15b) nach Multiplikation mit v_1

$$\sigma v_1^2 = v_1 s_2 q_{12} + v_1 s_3 q_{13} + v_1 s_4 q_{14}$$

oder, wenn man für die $v_1 s_i$ rechts die Werte aus (5) einsetzt,

$$\text{(17)} \qquad \sigma v_1^2 = Q_1 \equiv (q_1 q_1' q_1'')_{234} \equiv \begin{vmatrix} q_{12} q_{13} q_{14} \\ q_{12}' q_{13}' q_{14}' \\ q_{12}'' q_{13}'' q_{14}'' \end{vmatrix}.$$

Entsprechend findet man $\sigma v_i^2 = Q_i$. Die *einfachsten* Werte der v_i^2 erhält man also für $\sigma = 1$, und wir setzen fortan

$$\text{(18)} \qquad v_i^2 = Q_i \equiv (q_i q_i' q_i'')_{klm}.$$

Die vier Determinanten Q_i sind (a. a. O. Art. 270) nur dann sämtlich $= 0$, wenn die drei Geraden konzentrisch sind.

Der nach dem Prinzip der Maßbestimmung aus den Werten (18) zunächst zu bildende Ausdruck $f(v, v)$ ist durch die Normalkoordinaten der drei Geraden nur bis auf das Vorzeichen bestimmt. Man muß deshalb sein *Quadrat* zur *Definition des Seitensinusquadrates* benutzen, also setzen

$$\text{(19)} \qquad S_s^2(q, q', q'') = f(v, v)^2 = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \varepsilon Q_4)^2,$$

wobei der Ausdruck rechts durch q, q', q'' eindeutig bestimmt, bei allen Bewegungen absolut invariant und nur $= 0$ ist, wenn die Ebene v absolut oder die drei Geraden konzentrisch sind. Liegt das Dreieck in der xy-Ebene, so reduziert sich dieser Ausdruck in der Tat auf den N. E. G. Art. 426 zur Definition des Seitensinus gegebenen.

Die oben erwähnte geometrische Bedeutung des Seitensinus (19) kann also nach einer Bewegung des Dreiseites in die xy-Ebene aus der N. E. G. Art. 427 aufgestellten Formel (65b) abgelesen werden. Sie kann aber auch *ohne* vorgängige Bewegung abgeleitet werden. Ist nämlich S der Schnittpunkt $q' q''$ mit den *Normal*koordinaten s_i, zu denen die Ebenenkoordinaten $\dot{v}_i$ gehören, so daß die Produkte $\dot{v}_k s_i$ die durch die Tabelle (5) für $\lambda = 1$ gegebenen Werte haben, so ist nach (16)

$$\text{(20)} \qquad S_s^2(q', q'') = f(\dot{v}, \dot{v}).$$

Ferner ist nach N. E. G. Art. 438 (43a) das Abstandsquadrat

$$(21)\qquad S_s^2(S,q) = f(\bar v, \bar v),$$

wo $\bar v$ die Ebene Sq, also wieder die Ebene v des Dreiseites $q\,q'\,q''$ ist, aber für ihre Koordinaten $\bar v_i$ die aus den Normalkoordinaten s_i von S und q_{ik} von q gebildeten Werte zu nehmen sind:

$$(22)\qquad \bar v_1 = s_2 q_{12} + s_3 q_{13} + s_4 q_{14}, \quad \text{entsprechend} \quad \bar v_2, \bar v_3, \bar v_4.$$

Multipliziert man aber $\bar v_1$ mit $\dot v_1$ und ersetzt rechts die Produkte $\dot v_1 s_i$ durch die Determinanten aus (5), so folgt

$$\bar v_1 \dot v_1 = \dot v_1 s_2 q_{12} + \dot v_1 s_3 q_{13} + \dot v_1 s_4 q_{14} = Q_1 = v_1^2,$$

allgemein

$$(23)\qquad \bar v_i \dot v_i = Q_i = v_i^2.$$

Ist nun $\dot v_i = \lambda v_i$, also nach (23) $v_i = \lambda \bar v_i$, so ist

$$(24)\qquad f(\dot v, \dot v)\, f(\bar v, \bar v) = f(v, v)^2.$$

Also ergibt sich aus (19), (20), (21) und (24) der *Satz*

$$(25)\qquad S_s^2(q, q', q'') = S_s^2(q', q'')\, S_s^2(S, q), \text{ q. e. d.}$$

Raumdualistisch steht dem Seitensinus des ebenen Dreiseites der *Kantensinus des Dreikantes* $p\,p'\,p''$ gegenüber

$$(26)\qquad S_s^2(p, p', p'') = F(\sqrt{P}, \sqrt{P})^2 = (\varepsilon P_1 + \varepsilon P_2 + \varepsilon P_3 + P_4)^2,$$

wo $P_i \equiv (p_i p_i' p_i'')_{klm}$ und die vier P_i nur $= 0$ sind, wenn p, p', p'' komplanar sind. Für den Kantensinus gilt der zu (25) dualistische Satz.

VI. Der Kantensinus eines Tetraeders.

Sind $q^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, 6)$ die Kanten eines Tetraeders, so ist das Quadrat der Determinante ihrer Normalkoordinaten

$$(27)\qquad D^2 \equiv |q_{ik}^{(\lambda)}|^2 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, 6;\; ik = 23, 31, 12, 14, 24, 34)$$

durch die sechs Kanten eindeutig bestimmt, nur $= 0$, wenn alle sechs mit derselben Geraden inzidieren, und bei allen Bewegungen absolut invariant. Wir nennen es das *Kantensinusquadrat des Tetraeders.*

Um seine geometrische Bedeutung zu ermitteln, bezeichnen wir drei von einer Ecke ausgehende Kanten durch p, p', p'', ihre Gegenkanten in der gegenüber liegenden Seitenfläche bzw. durch q, q', q'' und benutzen bei den ersteren die Strahlen-, bei den letzteren die Achsenkoordinaten. Dann ist

$$(28)\qquad D^2 \equiv \begin{vmatrix} p_{23} & p_{31} & p_{12} & p_{14} & p_{24} & p_{34} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{23} & q_{31} & q_{12} \\ p_{23}' & p_{31}' & p_{12}' & p_{14}' & p_{24}' & p_{34}' \\ q_{14}' & q_{24}' & q_{34}' & q_{23}' & q_{31}' & q_{12}' \\ p_{23}'' & p_{31}'' & p_{12}'' & p_{14}'' & p_{24}'' & p_{34}'' \\ q_{14}'' & q_{24}'' & q_{34}'' & q_{23}'' & q_{31}'' & q_{12}'' \end{vmatrix}^2 = - \begin{vmatrix} p_{23} & p_{31} & p_{12} & p_{14} & p_{24} & p_{34} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{23} & p_{31} & p_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

wo in der zweiten Determinante rechts die drei ersten Kolonnen mit den drei letzten vertauscht worden sind. Multipliziert man die beiden Determinanten rechts durch Komposition der Zeilen mit den Zeilen, bezeichnet die Momente von p und q, p' und q', p'' und q'' bzw. mit M, M', M'' und beachtet die Relation zwischen den Linienkoordinaten einer und derselben Geraden, sowie die Bedingung der Inzidenz zweier verschiedener Geraden, so sind alle Elemente der Produktdeterminante $= 0$ bis auf je ein Element in jeder Zeile und Kolonne, das gleich einem der drei Momente ist. So folgt der *Satz*:

$$D^2 = M^2 M'^2 M''^2, \tag{29}$$

d. h. *der Kantensinus des Tetraeders ist gleich dem Produkt der Momente der drei Gegenkantenpaare*. Hieraus ergeben sich unter Benutzung der in N. E. G. Art. 439 und 445 aufgestellten Sätze, in denen Momente auftreten, eine Reihe weiterer Sätze für den Kantensinus des Tetraeders.

(Eingegangen am 6. 2. 1937.)

Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.

Bereiche ohne geschlossene innere Singularitätenmannigfaltigkeiten.

Von

Fritz Sommer in Münster (Westf.)*).

Zu den grundlegenden Sätzen der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen gehört der folgende von Hartogs[1]) und Osgood[2]) aufgestellte Satz:

Ist die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in sämtlichen Randpunkten eines schlichten beschränkten Bereiches $\mathfrak{B}$ mit zusammenhängendem Rand regulär und eindeutig, so läßt sich $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ins ganze Innere von $\mathfrak{B}$ hinein regulär und eindeutig fortsetzen.

Dieser Satz läßt sich nicht auf alle unbeschränkten Bereiche ausdehnen. Man würde unmittelbar zu Widersprüchen kommen, wenn er beispielsweise für einen Bereich als richtig angenommen würde, den man dadurch erhält, daß man aus einem abgeschlossenen Raum die Punkte einer Hyperkugel entfernt. An diese Tatsache knüpft nun die vorliegende Arbeit an. Es sollen auf die Gültigkeit des Hartogs-Osgoodschen Satzes hin diejenigen Bereiche untersucht werden, die nicht mehr zugleich den Voraussetzungen genügen, schlicht und beschränkt zu sein.

Um abschließende Ergebnisse zu bekommen, legen wir unseren Untersuchungen, wie es heute allgemein üblich ist, den projektiv abgeschlossenen Raum zugrunde[3]). Über diesem Raum betrachten wir schlichte und nicht schlichte Bereiche. Unter den nicht schlichten Punktmannigfaltigkeiten untersuchen wir jedoch nur solche, die im Sinne der Definition von Behnke

*) Seminar Prof. Behnke. — Diese Arbeit ist von der phil. und naturw. Fakultät der Universität Münster als Dissertation angenommen worden.

[1]) Vgl. F. Hartogs, Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen. Sitz.-Ber. d. k. bayr. Akad. d. Wissensch. 36 (1906).

[2]) Vgl. W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie 2,1 (2. Aufl.) (1929), III. § 11.

[3]) Vgl. H. Behnke u. P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3 (1934), (im folgenden als „B.-Th., Bericht" zitiert) I, § 3.

und Thullen als Bereiche anzusprechen sind, die also, falls sie im Innern verzweigt sind, in einer geeigneten Umgebung eines jeden Verzweigungspunktes analytisch uniformisierbar sind[4]). Ist ein Bereich in diesem Sinne Existenzbereich einer *nicht konstanten* analytischen Funktion, so bezeichnen wir ihn als *Regularitätsbereich.*

Im 1. Teil dieser Arbeit stützen sich die Untersuchungen für Bereiche über dem projektiv abgeschlossenen Raum wesentlich auf zwei Sätze: Der erste Satz ist die von H. Behnke bewiesene Verallgemeinerung des Kontinuitätssatzes[5]). Der zweite Satz hat folgenden Wortlaut:

Satz 1. *Nimmt die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in ihrem Regularitätsbereich $\mathfrak{R}$ im Punkte P den Wert a an, so gibt es stets eine zusammenhängende a-Stellenmannigfaltigkeit in $\mathfrak{R}$, auf der P liegt, und die dem Rand von $\mathfrak{R}$ beliebig nahe kommt*[6])[6a]).

Gestützt auf diese beiden Sätze können wir in § 1 folgenden Hauptsatz unserer Arbeit beweisen:

Satz 2. *$\mathfrak{B}$ sei ein Teilbereich*[7]) *eines Regularitätsbereiches und habe einen zusammenhängenden Rand. Ist dann die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in allen Randpunkten von $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig, so läßt sich $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ins ganze Innere von $\mathfrak{B}$ hinein regulär und eindeutig fortsetzen.*

Der Beweis dieses Satzes ist sehr umständlich. Das ist nicht verwunderlich; denn der lückenlose Beweis des Hartogs-Osgoodschen Satzes, der erst vor kurzem Herrn Arthur B. Brown[8]) gelungen ist, hat selbst schon einen erheblichen Umfang. Osgood hat noch in seinem Lehr-

---

[4]) Vgl. B.-Th., Bericht, I. § 3.

[5]) Vgl. H. Behnke, Der Kontinuitätssatz und die Regulärkonvexität, Math. Annalen **113** (1936).

[6]) Eine Mannigfaltigkeit kommt dem Rand von $\mathfrak{R}$ beliebig nahe, wenn es auf ihr eine Punktfolge gibt, die sich gegen einen Randpunkt von $\mathfrak{R}$ häuft.

[6a]) Dieser Satz sowie die folgenden Sätze gelten nicht bei jedem Abschluß des Raumes. Schließt man z. B. den Raum zweier Veränderlichen w, z durch die Gruppe der Transformationen

$$W = \frac{a_1 w + b_1}{c_1 w + d_1}; \quad Z = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}; \quad a_i d_i - b_i c_i \neq 0, \; i = 1, 2$$

ab, so liegt die Nullstellenfläche $z = 0$ der Funktion $f(w, z) = z$ ganz im Innern des Regularitätsbereiches $\mathfrak{R}$ von $f(w, z)$. Ferner liegt der Bereich $\mathfrak{B}: |z| < 1$ ganz im Innern von $\mathfrak{R}$. Trotzdem ist die Funktion $\varphi(w, z) \equiv \frac{1}{z}$ in allen Randpunkten von $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig, während sie in den inneren Punkten mit $z = 0$ Polstellen hat. Ähnlich lassen sich in diesem Raume leicht Gegenbeispiele gegen die Sätze 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10 finden.

[7]) Als (unechter) Teilbereich ist auch der Regularitätsbereich selbst aufzufassen.

[8]) Vgl. Arthur B. Brown, On certain analytic continuations and analytic homeomorphisms, Duke math. Journ. **2** (1936).

buch die topologischen Schwierigkeiten beim Beweis übersehen. Diese Schwierigkeiten treten dadurch auf, daß man bei der analytischen Fortsetzung der auf dem Rande vorgegebenen Funktion ins Innere des Bereiches $\mathfrak{B}$ von gewissen Randwerten ausgeht und von dort die Funktion eindeutig ins Innere fortsetzt. Es läßt sich zeigen, daß diese Fortsetzung zunächst möglich ist. Dann kann es jedoch passieren, daß man bei dieser Fortsetzung wieder zu Randpunkten gelangt, in denen jedoch die Funktion bereits erklärt ist. Hier hat man nun die Übereinstimmung der analytischen Fortsetzung mit den bereits vorgegebenen Funktionswerten nachzuweisen. Dieser Nachweis geschieht sowohl bei Brown wie in unserem Beweis im Prinzip so, daß man die analytische Fortsetzung der Funktion über die fraglichen Randpunkte soweit fortträgt, bis die betreffenden Randpunkte innerhalb des Randes von $\mathfrak{B}$ durch Punkte der bereits vorhandenen eindeutigen und analytischen Fortsetzung mit den anfangs benutzten Randpunkten verbindbar sind. Der wesentliche Unterschied der Beweisführung für beschränkte Bereiche und für die übrigen Bereiche in dieser Arbeit liegt in der Heranziehung des Kontinuitätssatzes. Hier ist es erforderlich, die zuletzt aufgestellte Verallgemeinerung des Kontinuitätssatzes zu benutzen.

In § 2 beweisen wir den folgenden

Satz 3. *$\mathfrak{B}$ sei ein schlichter Bereich mit zusammenhängendem Rand*[9]). *Gibt es dann ein 2-dimensionales algebraisches Gebilde, auf dem keine inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ liegen, so ist jede in allen Randpunkten von $\mathfrak{B}$ reguläre und eindeutige Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ins ganze Innere von $\mathfrak{B}$ hinein regulär und eindeutig fortsetzbar.*

Im (z_1, z_2)-Raum ist dieser Satz ein Spezialfall von Satz 2, da der Raum, aus dem lediglich ein 2-dimensionales algebraisches Gebilde herausgenommen ist, einen Regularitätsbereich darstellt. In den Räumen von mehr als zwei Veränderlichen erfaßt jedoch Satz 3 Bereiche, die Satz 2 nicht erfaßt. In diesen Bereichen allerdings ist jede im ganzen Innern reguläre Funktion konstant. Dasselbe gilt dann notwendig auch für jede auf dem Rande eines solchen Bereiches reguläre und eindeutige Funktion. Ein einfaches Beispiel eines solchen Bereiches im (z_1, z_2, z_3)-Raum erhält man, wenn man dort zwei windschiefe 2-dimensionale analytische Ebenen und als Bereich eine Punktmenge mit zusammenhängendem Rand wählt, die die eine Ebene ganz im Innern enthält und die andere ganz draußen läßt.

In § 3 überlegen wir uns zunächst, daß wir Satz 2 noch auf diejenigen Bereiche ausdehnen können, die nicht schlicht über einem Regu-

---

[9]) $\mathfrak{B}$ darf auch unbeschränkt sein.

laritätsbereich liegen, aber über ihm keine weiteren Verzweigungspunkte aufweisen. Satz 3 läßt sich auf diejenigen nicht schlichten Bereiche ohne Verzweigungspunkte erstrecken, die über einem 2-dimensionalen algebraischen Gebilde keine inneren Punkte aufweisen. Beschränken wir uns, wie es auch Hartogs bei dem eingangs zitierten Satze getan hat, auf solche Funktionen, die bei einer möglichen Fortsetzung vom Rande ins Innere eines Bereiches $\mathfrak{B}$ eindeutig in bezug auf $\mathfrak{B}$ bleiben, so lassen sich beliebig verzweigte Bereiche behandeln; denn in diesem Falle sind Schwierigkeiten topologischer Art, wie sie im Beweis zu Satz 2 auftreten, nicht vorhanden. Auch können wir in diesem Fall auf einen zusammenhängenden Rand verzichten. Daher läßt sich der folgende Satz beweisen:

Satz 4. *$\mathfrak{B}$ sei ein beliebiger Bereich über einem Regularitätsbereich. Die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sei auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig. Verhält sich dann $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ bei jeder möglichen Fortsetzung vom Rande ins Innere von $\mathfrak{B}$ eindeutig, so läßt sich $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in jeden inneren Punkt von $\mathfrak{B}$ hinein analytisch fortsetzen.*

Diese Aussage führt unmittelbar zu folgendem wichtigen

Satz 5. *Die nicht konstante Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sei auf dem Rande eines Bereiches $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig und verhalte sich bei jeder möglichen Fortsetzung vom Rande ins Innere von $\mathfrak{B}$ eindeutig. Dann ist notwendig und hinreichend dafür, daß sie sich ins ganze Innere von $\mathfrak{B}$ hinein analytisch fortsetzen läßt, daß es wenigstens eine im Innern von $\mathfrak{B}$ reguläre nicht konstante Funktion gibt.*

Bereiche, die den Voraussetzungen von Satz 4 nicht zu genügen brauchen, erfaßt noch

Satz 6. *$\mathfrak{B}$ sei ein beliebig verzweigter Bereich, zu dem es ein 2-dimensionales algebraisches Gebilde gibt, über dem keine inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ liegen. Die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sei auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig und verhalte sich bei jeder möglichen Fortsetzung vom Rande ins Innere von $\mathfrak{B}$ eindeutig. Dann läßt sich $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ins ganze Innere von $\mathfrak{B}$ hinein analytisch fortsetzen.*

Im zweiten Teil dieser Arbeit zählen wir die außerwesentlich singulären Stellen einer Funktion zu den regulären Punkten. Dementsprechend haben wir es mit meromorphen, statt mit regulären Funktionen zu tun. E. E. Levi[10]) hat zuerst den von Hartogs stammenden Satz, den wir am Anfang nannten, auf meromorphe Funktionen übertragen. Während wir bei der Betrachtung regulärer Funktionen auf Grund des verallgemeinerten Kontinuitätssatzes in der Lage waren, jenen Satz weitgehend auf un-

---

[10]) Vgl. E. E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse, Ann. Mat. pur. appl. (3) 17 (1910).

beschränkte und verzweigte Bereiche auszudehnen, sind wir bei der Betrachtung meromorpher Funktionen noch auf die Knesersche Fassung des Kontinuitätssatzes[11]) angewiesen. Durch eine leichte Verallgemeinerung dieses Satzes kommen wir zu Satz 7. In Satz 8 zeigen wir dann, daß *für schlichte Bereiche mit zusammenhängendem Rand, die auf speziellen 2-dimensionalen algebraischen Gebilden keine inneren Punkte aufweisen, gilt, daß jede auf dem Rande eines solchen Bereiches meromorphe und eindeutige Funktion sich ins ganze Innere von $\mathfrak{B}$ meromorph und eindeutig fortsetzen läßt.*

Als Anwendung ergibt sich unmittelbar ein bekannter Satz von Severi[12]):

Ist die Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in sämtlichen Punkten eines geschlossenen 2-dimensionalen algebraischen Gebildes regulär und eindeutig, so ist $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ eine Konstante.

Inhalt.

§ 1.

Teilbereiche von Regularitätsbereichen.

Um zeigen zu können, daß Teilbereiche von Regularitätsbereichen nicht konstanter Funktionen keine geschlossenen inneren Singularitätenmannigfaltigkeiten aufweisen, benutzen wir zwei wichtige Sätze: Der erste Satz ist die von H. Behnke bewiesene Verallgemeinerung des Kontinuitätssatzes.

Verallgemeinerter Kontinuitätssatz. *$\mathfrak{F}$ sei ein $2k$-dimensionales ergänztes analytisches Flächenstück*[13]) *mit* $1 \leqq k \leqq n-1$ *in einem Bereich* $\mathfrak{B}$.

---

[11]) Vgl. H. Kneser, Der Satz von dem Fortbestehen der wesentlichen Singularitäten einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen. Jahresber. deutsch. Math.-Vereinigung **41** (1932). — Ein Satz über Meromorphiebereiche analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen. Math. Annalen **106** (1932).

[12]) Vgl. F. Severi, Sull' insieme dei punti singolari di una funzione analitica di più variabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (6) **9** (1929). — Alcune proprietà fondamentali dell' insieme dei punti singolari di una funzione analitica di più variabili. Mem. Accad. Ital. **3**, Mat. N. 1, (1932).

[13]) Vgl. B.-Th., Bericht, II., § 2.

$\mathfrak{G}$ sei irgend ein 2 k-dimensionales Gebiet auf $\mathfrak{F}$, welches den Rand R haben möge. Ferner sei $\mathfrak{F}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) eine Folge von 2 k-dimensionalen, ergänzten analytischen Flächenstücken, die gegen $\mathfrak{F}$ gleichmäßig konvergieren. Auf jedem Flächenstück $\mathfrak{F}_\nu$ sei ein Gebiet $\mathfrak{G}_\nu$ mit dem Rand R_ν gegeben, so daß mit wachsendem ν die $\mathfrak{G}_\nu$ gleichmäßig gegen $\mathfrak{G}$ konvergieren. Ist dann die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in allen Punkten von R sowie in allen Punkten von $\mathfrak{G}_\nu + R_\nu$ für alle ν eindeutig und regulär, so ist $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ auch noch in alle Punkte von $\mathfrak{G}$ eindeutig und regulär fortsetzbar.

Der zweite Satz ist

Satz 1. *Nimmt die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in ihrem Regularitätsbereich $\mathfrak{R}$ im Punkte P den Wert a an, so gibt es stets eine zusammenhängende a-Stellenmannigfaltigkeit in $\mathfrak{R}$, auf der P liegt, und die dem Rand von $\mathfrak{R}$ beliebig nahe kommt.*

Es genügt offenbar, diesen Satz für Nullstellenmannigfaltigkeiten zu beweisen. Außerdem können wir uns auf den Fall $n = 2$ beschränken; denn im Falle $n > 2$ legen wir durch P eine geeignete 4-dimensionale analytische Ebene. In dieser Ebene ist dann auf Grund des Falles $n = 2$ bereits die Aussage von Satz 1 richtig, also erst recht im ganzen $2n$-dimensionalen Raum.

Wäre nun im Falle $n = 2$ unser Satz nicht richtig, so gäbe es den Regularitätsbereich $\mathfrak{B}$ einer Funktion $f(z_1, z_2)$, in dessen Innerem eine Nullstellenfläche $\mathfrak{F}$ läge, deren Punkte also der Gleichung $f(z_1, z_2) = 0$ genügen würden, und die eine geschlossene analytische Mannigfaltigkeit bildete. Ferner gäbe es einen ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden Teilbereich $\mathfrak{B}^*$, der $\mathfrak{F}$ ganz im Innern enthält, und der die Eigenschaft hat, daß es in seinem Innern und auf seinem Rande keine weiteren Nullstellen von $f(z_1, z_2)$ als die Punkte von $\mathfrak{F}$ gibt. Wir wollen nachweisen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt.

Durch eine projektive Transformation können wir stets erreichen, daß $\mathfrak{F}$ endlich viele unendlich ferne Punkte hat, die die projektiven Koordinaten

$$(\lambda a_1, \lambda b_1, 0);\ (\lambda a_2, \lambda b_2, 0);\ \ldots;\ (\lambda a_m, \lambda b_m, 0)$$

haben mögen. Dann betrachten wir die Funktion

$$\Phi(z_1, z_2) \equiv f(z_1, z_2) + \mu P(z_1, z_2),$$

wobei

$$P(z_1, z_2) \equiv (b_1 z_1 - a_1 z_2) \cdot (b_2 z_1 - a_2 z_2) \cdot \ldots \cdot (b_m z_1 - a_m z_2)$$

und μ eine Konstante ist, über die wir noch geeignet verfügen werden. $\Phi(z_1, z_2)$ ist regulär in allen im Endlichen liegenden Punkten von $\mathfrak{B}$, also auch in allen im Endlichen liegenden Punkten von $\mathfrak{B}^*$. In den unendlich fernen Punkten von $\mathfrak{B}$ hat die Funktion $\Phi(z_1, z_2)$ Polstellen mit Aus-

nahme der Punkte $(\lambda a_\nu, \lambda b_\nu, 0)$, in denen $\Phi(z_1, z_2)$ außerwesentlich singuläre Stellen zweiter Art hat. In der Umgebung dieser Stellen liegen also die Nullstellen der Funktion $\Phi(z_1, z_2)$ auf ergänzten analytischen Flächenstücken [14]). Wir können nun m Umgebungen $\mathfrak{U}_\nu$ der Punkte $(\lambda a_\nu, \lambda b_\nu, 0)$ und ein reelles $\mu_0 > 0$ so wählen, daß alle Umgebungen $\mathfrak{U}_\nu$ noch ganz in $\mathfrak{B}^*$ liegen und die Schnittpunkte der Nullstellenfläche von $\Phi(z_1, z_2)$ mit den Randpunkten der $\mathfrak{U}_\nu$ für alle μ mit $|\mu| < \mu_0$ ganz im Endlichen liegen. Nun legen wir um den Nullpunkt eine Hyperkugel, deren Radius so groß ist, daß sie alle Schnittpunkte der Nullstellenfläche von $\Phi(z_1, z_2)$ mit den Randpunkten der $\mathfrak{U}_\nu$ im Innern enthält. Wenn wir nun μ hinreichend klein machen, so liegen die Nullstellen der Funktion $\Phi(z_1, z_2)$, soweit sie im Durchschnitt von $\mathfrak{B}^*$ und der Hyperkugel liegen, ganz im Innern von $\mathfrak{B}^*$. Dort ist aber $\Phi(z_1, z_2)$ regulär. Also liegen dort die Nullstellen von $\Phi(z_1, z_2)$ auf einem ergänzten analytischen Flächenstück. Wir sehen also, daß die Nullstellen von $\Phi(z_1, z_2)$ für hinreichend kleines μ — soweit sie in $\mathfrak{B}^*$ liegen — ganz im Innern von $\mathfrak{B}^*$ liegen und dort ein geschlossenes analytisches Gebilde $\mathfrak{F}'$ bilden, welches also ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegt.

Ist nun $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{F}$ verschieden, so sind wir fertig; denn in diesem Falle ist $f(z_1, z_2)$ auf $\mathfrak{F}'$ regulär, also nach dem Maximumprinzip für analytische Flächen auf $\mathfrak{F}'$ konstant und gleich Null, da $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}$ dieselben unendlich fernen Punkte haben, in denen $f(z_1, z_2)$ gleich Null ist. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, daß $\mathfrak{F}$ die einzige Nullstellenfläche von $f(z_1, z_2)$ in $\mathfrak{B}^*$ sein sollte. $\mathfrak{F}'$ ist aber nur dann mit $\mathfrak{F}$ identisch, wenn alle Punkte von $\mathfrak{F}$ über den Punkten der Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$:

$$b_\nu z_1 - a_\nu z_2 = 0$$

liegen. In diesem Fall ist $\mathfrak{F}$ eine geschlossene analytische Mannigfaltigkeit, die über den Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$ ausgebreitet ist. Speziell stellen die Punkte von $\mathfrak{F}$ über der Ebene $\mathfrak{E}_1$ eine geschlossene analytische Mannigfaltigkeit dar, die ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegt. Nun legen wir $\mathfrak{E}_0$ parallel und so dicht bei $\mathfrak{E}_1$, daß die Punkte von $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{E}_0$ auch noch eine geschlossene analytische Mannigfaltigkeit bilden. In diesen Punkten ist dann $f(z_1, z_2)$ auch noch regulär, also konstant und gleich Null, da ja $\mathfrak{E}_0$ denselben unendlich fernen Punkt wie $\mathfrak{E}_1$ hat, in dem aber $f(z_1, z_2)$ gleich Null ist. Damit sind wir auch in diesem Falle zu einem Widerspruch geführt. Satz 1 ist also bewiesen.

Satz 2. *$\mathfrak{B}$ sei ein Teilbereich eines Regularitätsbereiches [14a]) und habe einen zusammenhängenden Rand. Ist dann die Funktion* $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$

[14]) Vgl. B.-Th., Bericht, V., § 2.

[14a]) Der abgeschlossene Raum gehört nicht zu den Regularitätsbereichen (siehe Einleitung).

in allen Randpunkten von $\mathfrak{B}$ *regulär und eindeutig, so läßt sich* $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *ins ganze Innere von* $\mathfrak{B}$ *hinein regulär und eindeutig fortsetzen.*

Wir können über den Bereich $\mathfrak{B}$ gewisse vereinfachende Voraussetzungen machen, ohne die Allgemeingültigkeit unseres Satzes zu beeinträchtigen. Zunächst können wir annehmen, daß $\mathfrak{B}$ ganz im Innern eines Regularitätsbereiches liegt; denn unsere Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv f(z)$ ist in allen Randpunkten von $\mathfrak{B}$ regulär. Also gibt es einen Bereich $\mathfrak{U}$, der sämtliche Randpunkte von $\mathfrak{B}$ im Innern enthält und in dem $f(z)$ auch noch regulär und eindeutig ist. $\mathfrak{B}_0$ heiße die Gesamtheit der Punkte, die in $\mathfrak{B}$, aber nicht in $\mathfrak{U}$ liegen. Wählt man nun einen *ganz* im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden Teilbereich $\mathfrak{B}^*$, der $\mathfrak{B}_0$ *ganz* umfaßt und einen zusammenhängenden Rand hat (was immer möglich ist, da $\mathfrak{B}$ einen zusammenhängenden Rand hat), so liegt der Rand von $\mathfrak{B}^*$ *ganz* im Innern von $\mathfrak{U}$. Dort ist $f(z)$ regulär und eindeutig. Gilt nun die Behauptung unseres Satzes für $\mathfrak{B}^*$, so gilt sie auch für $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}^*$ liegt aber ganz im Innern von $\mathfrak{B}$, also auch ganz im Innern des Regularitätsbereiches. Da wir also annehmen dürfen, daß $\mathfrak{B}$ ganz im Innern eines Regularitätsbereiches liegt, der Existenzbereich der Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv F(z)$ sein möge, so können wir weiter noch annehmen, daß das analytische Gebilde

$$F(z) = 0$$

ganz außerhalb $\mathfrak{B}$ verläuft. Wir können dieses nämlich stets durch geeignete Addition einer Konstanten zur Funktion $F(z)$ erreichen, wodurch sich deren Existenzbereich nicht ändert. Für den so erhaltenen Bereich verläuft nun der Beweis unseres Satzes folgendermaßen:

Wir bilden folgende Teilbereiche des Regularitätsbereiches $\mathfrak{R}$ der Funktion $F(z)$: $\mathfrak{K}(r)$ sei die Gesamtheit der Punkte von $\mathfrak{R}$, für welche

$$|F(z)| < r$$

gilt. Der Rand von $\mathfrak{K}(r)$ besteht aus Punkten des Randes von $\mathfrak{R}$ und aus Punkten der analytischen Hyperfläche $H(r)$:

$$|F(z)| = r.$$

r durchlaufe alle positiven reellen Zahlen. Jetzt betrachten wir den Durchschnitt $\mathfrak{D}(r)$ von $\mathfrak{K}(r)$ und $\mathfrak{B}$ für jedes r. $\mathfrak{D}(r)$ liegt für jedes r ganz im Innern von $\mathfrak{R}$. Für hinreichend kleines r ist $\mathfrak{D}(r)$ leer, da ja das analytische Gebilde mit der Gleichung $F(z) = 0$ ganz außerhalb $\mathfrak{B}$ liegt. Lassen wir r wachsen, so ist $\mathfrak{D}(r)$ von einem gewissen R_0 ab, also für alle $r > R_0$ nicht mehr leer. Für irgendeinen Punkt P aus $\mathfrak{R}$ sei

$$|F(P)| = r_P.$$

Ist nun P ein Randpunkt von $\mathfrak{B}$, so wollen wir P einen *ausgezeichneten Randpunkt erster Art* nennen, wenn es in einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ von P keine inneren Punkte von $\mathfrak{D}(r_P)$ gibt. Sind

sämtliche inneren Punkte von $\mathfrak{K}(r_P)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ des Randpunktes P auch innere Punkte von $\mathfrak{D}(r_P)$, so wollen wir P als *Einbuchtungspunkt* bezeichnen.

Nun wollen wir $\mathfrak{B}$ abändern. Da die Randpunkte C von $\mathfrak{B}$ ganz in einem Bereich $\mathfrak{U}$ liegen, in dem die Funktion $f(z)$ regulär und eindeutig ist, so können wir einen Bereich $\mathfrak{B}^*$ so wählen, daß 1. $\mathfrak{B}^*$ noch einen zusammenhängenden Rand hat, 2. der Rand von $\mathfrak{B}^*$ noch ganz in $\mathfrak{U}$ liegt, 3. jeder Randpunkt von $\mathfrak{B}^*$ auch Randpunkt von $\mathfrak{R}-\mathfrak{B}^*$ ist, 4. $\mathfrak{B}^*$ u. a. alle die Punkte von $\mathfrak{B}$ im Innern enthält, die nicht im Innern von $\mathfrak{U}$ liegen, 5. $\mathfrak{B}^*$ nur endlich viele ausgezeichnete Randpunkte erster Art und nur endlich viele Einbuchtungspunkte aufweist. Können wir nun unseren Satz für $\mathfrak{B}^*$ beweisen, so können wir ihn auch für $\mathfrak{B}$ beweisen. Wir wollen $\mathfrak{B}^*$ wieder mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen, so daß jetzt $\mathfrak{B}$ die fünf genannten Voraussetzungen erfüllt. Den Rand von $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir wieder mit C.

Wir betrachten jetzt $\mathfrak{D}(r)$ für ein beliebiges r, etwa für r_0. $\mathfrak{D}(r_0)$ hat dann Randpunkte, die zu $H(r_0)$ gehören, und solche, die nur zu C gehören, aber nicht zu $H(r_0)$. Unter den Randpunkten von $\mathfrak{D}(r_0)$, die nur zu C gehören, gibt es dann solche, die innerhalb dieser zu C gehörenden Randpunkte von $\mathfrak{D}(r_0)$ mit einem ausgezeichnetem Randpunkt erster Art verbindbar sind. Gibt es auch solche, die es nicht sind, so sind diese Randpunkte innerhalb der nur zu C gehörenden Randpunkte von $\mathfrak{D}(r_0)$ mit einem Einbuchtungspunkt verbindbar. Diese Randpunkte schließen dann gemeinsam mit Punkten von $H(r_0)$ Bereiche $\mathfrak{G}_1(r_0)$ ein. Daß als Randpunkte von $\mathfrak{G}_1(r_0)$ keine Randpunkte von $\mathfrak{R}$ auftreten können, folgt aus der Regulärkonvexität der Regularitätsbereiche [15]). Die Bereiche $\mathfrak{G}_1(r_0)$ liegen also noch ganz im Innern von $\mathfrak{R}$. Die nur zu C gehörenden Randpunkte von $\mathfrak{G}_1(r_0)$ bezeichnen wir mit $C_1(r_0)$. Nun fügen wir noch zu $\mathfrak{D}(r_0)$ die Bereiche $\mathfrak{G}_1(r_0)$ einschließlich $C_1(r_0)$ hinzu. Ferner fügen wir zu $\mathfrak{D}(r_0)$ noch sämtliche Bereiche $\mathfrak{G}_1(r)$ einschließlich $C_1(r)$ für alle $r < r_0$ hinzu, soweit diese nicht schon zu $\mathfrak{G}_1(r_0)$ bzw. $C_1(r_0)$ gehören. Da es nur endlich viele Einbuchtungspunkte gibt, so gibt es auch nur endlich viele solcher Bereiche $\mathfrak{G}_1(r)$. Wir erhalten damit Bereiche $\mathfrak{T}_1(r_0)$, die ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ liegen. Diese Bereiche $\mathfrak{T}_1(r_0)$ brauchen nicht mehr schlicht über $\mathfrak{R}$ zu liegen. Es kann nämlich folgendes eintreten: Auf einem zu $H(r')$ gehörenden Randstück eines Bereiches $\mathfrak{G}_1^0(r')$ [15a]) kann ein ausgezeichneter Randpunkt erster Art P auftreten. Lassen wir dann r' wachsen, so wächst auch der Bereich $\mathfrak{G}_1^0(r')$,

---

[15]) Der Beweis für diese Tatsache verläuft ebenso wie der Behnkesche Beweis des Kontinuitätssatzes [s. Anm. [5])].

[15a]) Durch den Index ^{0} soll angedeutet werden, daß es sich bei $\mathfrak{G}_1^0(r')$ um einen bestimmten der Bereiche $\mathfrak{G}_1(r')$ handelt.

auf dessen zu $H(r')$ gehörendem Rand der Punkt P auftrat. Dann gibt es ein $r^* > r'$, so daß für r^* noch der Bereich $\mathfrak{G}_1^0(r^*)$ existiert, der $\mathfrak{G}_1^0(r')$ umfaßt, und in dessen Innern P liegt, jedoch für kein $r > r^*$ ein solcher Bereich $\mathfrak{G}_1^0(r)$ existiert, der P im Innern enthält. Daß ein solches r^* existiert, ersehen wir daraus, daß für $r > r^*$ die Randpunkte von $\mathfrak{D}(r)$, die zu $C_1^0(r^*)$ gehörten, durch Randpunkte von $\mathfrak{D}(r)$, die nur zu C gehörten, mit einem ausgezeichneten Randpunkt erster Art verbindbar sind. Ist nun für jedes $r > r^*$ der ausgezeichnete Randpunkt erster Art P durch Punkte von C, die in $\mathfrak{K}(r)$ liegen, mit den Punkten von $C_1^0(r^*)$ verbindbar, so wollen wir P als Punkt von $\mathfrak{G}_1^0(r^*)$ rechnen. Ebenso wollen wir die mit P innerhalb $\mathfrak{D}(r^*)$ verbindbaren Punkte von $\mathfrak{D}(r^*)$, sowie deren Randpunkte auch noch zu $\mathfrak{G}_1^0(r^*)$ rechnen. Ist dagegen für hinreichend nahe bei r^* liegende $r > r^*$ der Punkt P nicht durch Punkte von C, die in $\mathfrak{K}(r)$ liegen, mit Punkten von $C_1^0(r^*)$ verbindbar, so wollen wir P als in einem „anderen Blatt" als $\mathfrak{G}_1^0(r^*)$ liegend ansehen. Dieser Ausdruck soll besagen, daß wir P in einer Punktmenge betrachten, die auch schlicht über dem Regularitätsbereich $\mathfrak{R}$ liegt, aber nicht als mit den Punkten von $\mathfrak{G}_1^0(r^*)$ identisch angesehen werden soll. In dem so gekennzeichneten „anderen Blatt" sollen auch die Punkte von $\mathfrak{D}(r^*)$, sowie deren Randpunkte liegen, die innerhalb $\mathfrak{D}(r^*)$ mit P verbindbar sind. Diese auf solche Art festgelegte Verteilung der Punkte auf zwei „Blätter" über dem Regularitätsbereich $\mathfrak{R}$ soll auch für den Bereich $\mathfrak{G}_1^0(r')$ gelten.

Haben wir auf diese Weise zwei verschiedene „Blätter" hergestellt, so können wir nun in der Betrachtung der Bereiche $\mathfrak{D}(r)$ fortfahren. Hierbei müssen wir jetzt dieselben Überlegungen wie vorher in den verschiedenen „Blättern" anstellen, was nunmehr keinerlei Schwierigkeiten macht. Es können dabei auf den zu $H(r)$ gehörenden Randstücken der Bereiche $\mathfrak{G}_1(r)$ abermals ausgezeichnete Randpunkte erster Art auftauchen. Hierbei kann es vorkommen, daß solche Punkte in beiden „Blättern" auf Randstücken von $H(r)$ auftreten. Dann hat man sich nach obigem Verfahren zu überlegen, ob sie zu einem der betreffenden „Blätter" gehören oder nicht. Ist das letztere der Fall, so hat man diese Stücke einem „dritten Blatt" zuzuordnen. Man überzeugt sich leicht, daß es nie vorkommen kann, daß ein solcher Punkt zwei verschiedenen „Blättern" zuzurechnen ist. Ein solcher Fall würde nämlich nach unserem Verfahren bedeuten, daß die „Blätter" doch nicht verschieden wären.

Setzen wir das Verfahren nun für drei „Blätter" fort, dann für vier usw., so kommen wir nach endlich vielen Schritten zu einem Schluß; denn da es nur endlich viele ausgezeichnete Randpunkte erster Art gibt, so gibt es nur endlich viele verschiedene „Blätter".

Haben wir dieses Verfahren für alle ausgezeichneten Randpunkte erster Art durchgeführt, so ist für jeden Bereich $\mathfrak{T}_1(r)$ erklärt, wie er als nicht schlichter Bereich über $\mathfrak{R}$ aufzufassen ist. Dabei sind im allgemeinen etliche ausgezeichnete Randpunkte erster Art fortgefallen, da sie zu inneren Punkten von Bereichen $\mathfrak{T}_1(r)$ geworden sind.

Diejenigen ausgezeichneten Randpunkte erster Art, die auch als ausgezeichnete Randpunkte erster Art von Bereichen $\mathfrak{T}_1(r)$ auftreten, wollen wir als *ausgezeichnete Randpunkte zweiter Art* bezeichnen.

Sind sämtliche ausgezeichneten Randpunkte erster Art auch solche zweiter Art, so sind wir fertig. Andernfalls wiederholen wir das angegebene Verfahren, indem wir lediglich an Stelle der ausgezeichneten Randpunkte erster Art von $\mathfrak{B}$ die ausgezeichneten Randpunkte zweiter Art von $\mathfrak{B}$ treten lassen. Dabei erhalten wir statt der Bereiche $\mathfrak{G}_1(r)$ und $\mathfrak{T}_1(r)$, sowie statt der Randstücke $C_1(r)$ Bereiche $\mathfrak{G}_2(r)$ und $\mathfrak{T}_2(r)$ bzw. Randstücke $C_2(r)$. Diese Bereiche und Randstücke erhalten wir so, daß wir das Verfahren wörtlich wiederholen und lediglich statt der auftretenden Ziffern 1 die Ziffern 2 schreiben. Dabei gehen wir wieder von $\mathfrak{B}$ aus und nicht von den Bereichen $\mathfrak{T}_1(r)$, deren verschiedene Blätter uns nun nicht mehr interessieren. Wir werden so zu einer dritten Art ausgezeichneter Randpunkte, den *ausgezeichneten Randpunkten dritter Art geführt.* Sind alle ausgezeichneten Randpunkte zweiter Art auch solche dritter Art, so sind wir fertig. Andernfalls verfahren wir so weiter, bis wir schließlich erreichen, daß einmal sämtliche ausgezeichneten Randpunkte k-ter Art auch solche $k+1$-ter Art sind. Das ist sicher nach endlich vielen Schritten der Fall, da es nur endlich viele ausgezeichnete Randpunkte erster Art gab.

Dann bezeichnen wir die ausgezeichneten Randpunkte k-ter Art kurz als *ausgezeichnete Randpunkte* und die Bereiche $\mathfrak{T}_k(r)$ mit $\mathfrak{T}(r)$. Wie bereits für $\mathfrak{T}_1(r)$ auseinandergesetzt wurde, brauchen die Bereiche $\mathfrak{T}(r)$ nicht mehr schlicht über $\mathfrak{R}$ zu liegen. Aber sie enthalten weder im Innern noch auf dem Rande Verzweigungspunkte über $\mathfrak{R}$.

Wir behaupten nun: Zu jedem $r > R_0$ gibt es eine im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{T}(r)$ eindeutige und reguläre Funktion $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv \Phi(z)$, die in den zu C gehörenden Randpunkten von $\mathfrak{T}(r)$, die nicht im Innern eines Bereichs $\mathfrak{T}(r')$ mit $r' > r$ liegen, mit der dort vorgegebenen Funktion $f(z)$ übereinstimmt. Ist $\mathfrak{T}(r)$ nicht schlicht in bezug auf $\mathfrak{R}$, so braucht $\Phi(z)$ in den überlagerten Punkten nicht dieselben Werte zu haben.

Sicher ist, daß für diejenigen r, die nur wenig größer als R_0 sind, die Behauptung richtig ist; denn für diese r gehört $\mathfrak{T}(r)$ noch ganz zur Umgebung $\mathfrak{U}$ des Randes C von $\mathfrak{B}$, in der aber $f(z)$ selbst regulär und eindeutig ist.

Wäre nun die aufgestellte Behauptung nicht richtig, so gäbe es ein R, so daß für alle $r < R$ die Behauptung richtig wäre, jedoch für R nicht mehr. Da in $\mathfrak{T}(r)$ für alle $r < R$ eine reguläre und eindeutige Funktion $\Phi(z)$ existiert, so gibt es auch eine reguläre und eindeutige Funktion $\Phi(z)$ im Innern von $\mathfrak{T}(R)$ und auf dem Teil des Randes von $\mathfrak{T}(R)$, der in $\mathfrak{K}(R)$ liegt. Wir behaupten dann, daß $\Phi(z)$ sich auch in alle Randpunkte von $\mathfrak{T}(R)$, die auf $H(R)$ liegen, regulär und eindeutig fortsetzen läßt. Die Randpunkte von $\mathfrak{T}(R)$ auf $H(R)$, die nicht zu C gehören, oder zu C gehören, aber im Innern eines Bereiches $\mathfrak{T}(r)$ mit $r > R$ liegen, bilden zusammen auf $H(R)$ dann $2n-1$-dimensionale Gebiete. Wir wollen diese Gebiete mit $\mathfrak{F}(R)$ bezeichnen. Die Randpunkte dieser Gebiete sind Punkte von C, die innerhalb $\mathfrak{K}(R) + H(R)$ durch Punkte von C mit ausgezeichneten Randpunkten verbindbar sind. Die übrigen Randpunkte von $\mathfrak{T}(R)$ auf $H(R)$ — falls solche noch vorhanden sind — sind dann Punkte von C, die sich innerhalb $\mathfrak{K}(R) + H(R)$ durch Punkte von C mit ausgezeichneten Randpunkten verbinden lassen. In diesen Punkten stellt $f(z)$ die eindeutige und analytische Fortsetzung von $\Phi(z)$ dar.

Ebenso stellt $f(z)$ die eindeutige und analytische Fortsetzung von $\Phi(z)$ in den Randpunkten der Gebiete $\mathfrak{F}(R)$ dar, da ja diese Punkte durch Punkte von C sich innerhalb $\mathfrak{K}(R) + H(R)$ mit ausgezeichneten Randpunkten verbinden lassen. Wir wollen nun zeigen, daß sich $\Phi(z)$ auch in die inneren Punkte von $\mathfrak{F}(R)$ eindeutig und analytisch fortsetzen läßt.

P sei irgend ein innerer Punkt von $\mathfrak{F}(R)$. Dann legen wir durch P das analytische Gebilde $\mathfrak{H}$:

$$F(z) = F(P) = a,$$

wobei

$$|a| = R$$

ist. Die inneren Punkte von $\mathfrak{F}(R)$ bilden auf $\mathfrak{H}$ dann $2n-2$-dimensionale Gebiete, deren Randpunkte auch Randpunkte von $\mathfrak{F}(R)$ sind. In einem dieser Gebiete, es sei das Gebiet $\mathfrak{G}$, liegt P. Sicher ist $\mathfrak{G}$ berandet; denn die Punkte von $\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ liegen ganz im Innern von $\mathfrak{R}$; dagegen liegt das analytische Gebilde $\mathfrak{H}$ nach Satz 1 nicht ganz im Innern von $\mathfrak{R}$. Also liegen auf $\mathfrak{H}$ auch Punkte, die nicht zu $\mathfrak{F}(R)$ gehören. $\mathfrak{G}$ ist also berandet. Wir wollen seinen Rand mit K bezeichnen. Nun wählen wir eine Folge analytischer Gebilde $\mathfrak{H}_\nu$:

$$F(z) = \varepsilon_\nu$$

mit

$$\lim_{\nu \to \infty} \varepsilon_\nu = a$$

und

$$|\varepsilon_\nu| < R$$

für jedes ν. Für hinreichend große ν bilden die inneren Punkte von $\mathfrak{T}(R)$ auf den $\mathfrak{H}_\nu$ dann $2n-2$-dimensionale Gebiete, deren Ränder zum Rand von $\mathfrak{T}(R)$ gehören. Wir können nun auf jedem Gebilde $\mathfrak{H}_\nu$ ein Teilgebiet $\mathfrak{G}_\nu$ der besagten $2n-2$-dimensionalen Gebiete so wählen, daß die $\mathfrak{G}_\nu$ gleichmäßig gegen $\mathfrak{G}$, und ihre Ränder — sie seien mit K_ν bezeichnet — gegen K konvergieren. Dann ist $\Phi(z)$ in den Punkten der $\mathfrak{G}_\nu + K_\nu$ regulär und eindeutig; denn diese Punkte sind innere Punkte von $\mathfrak{T}(R)$ oder Randpunkte von $\mathfrak{T}(R)$, die nicht auf $H(R)$ liegen. Ferner ist $\Phi(z)$ durch $f(z)$ regulär und eindeutig in die Punkte von K fortgesetzt. Dann folgt aus dem verallgemeinerten Kontinuitätssatz für $k = n-1$, daß sich $\Phi(z)$ auch in alle inneren Punkte von $\mathfrak{G}$ hinein regulär und eindeutig fortsetzen läßt. Da P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{F}(R)$ war, so ist damit gezeigt, daß $\Phi(z)$ sich in sämtliche inneren Punkte von $\mathfrak{F}(R)$ regulär und eindeutig fortsetzen läßt.

Damit haben wir bewiesen, daß es für jedes r eine im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{T}(r)$ eindeutige und reguläre Funktion $\Phi(z)$ gibt, die in gewissen Randpunkten von $\mathfrak{T}(r)$ mit der dort vorgegebenen Funktion $f(z)$ übereinstimmt.

Für alle hinreichend großen r sind nun alle Bereiche $\mathfrak{T}(r)$ identisch und umfassen ganz den Bereich $\mathfrak{B}$. Folglich gibt es eine im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ reguläre und eindeutige Funktion $\Phi(z)$, die in der Umgebung gewisser Randpunkte von $\mathfrak{B}$ mit der dort vorgegebenen Funktion $f(z)$ übereinstimmt. Dann folgt die Übereinstimmung von $\Phi(z)$ mit $f(z)$ in sämtlichen Randpunkten von $\mathfrak{B}$ aus der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung längs eines Weges. Also stellt $\Phi(z)$ eine im ganzen Innern von $\mathfrak{B}$ reguläre und eindeutige Fortsetzung der Funktion $f(z)$ dar. Unser Satz ist also bewiesen.

§ 2.

Bereiche, in denen jede reguläre Funktion konstant ist.

Während die bisher behandelten Bereiche stets im ganzen Innern eine reguläre nicht konstante Funktion zulassen, wollen wir in diesem Paragraphen zeigen, daß es Bereiche gibt, in denen jede im ganzen Innern reguläre Funktion konstant ist[16]), die aber trotzdem keine geschlossenen inneren Singularitätenmannigfaltigkeiten aufweisen können.

Satz 3. *$\mathfrak{B}$ sei ein schlichter Bereich mit zusammenhängendem Rand. Gibt es dann ein 2-dimensionales algebraisches Gebilde, auf dem keine inneren*

[16]) **Diese Bereiche haben also als Regularitätshülle den abgeschlossenen Raum, den wir jedoch nicht als Regularitätsbereich bezeichnen.**

Punkte von $\mathfrak{B}$ liegen, so ist jede in allen Randpunkten von $\mathfrak{B}$ reguläre und eindeutige Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ins ganze Innere von $\mathfrak{B}$ hinein regulär und eindeutig fortsetzbar.

Der Beweis dieses Satzes verläuft im wesentlichen so wie der Beweis zu Satz 1. Wir wollen uns daher eine fast wörtliche Wiederholung des dortigen Beweisganges ersparen und nur die Stellen angeben, an denen der Beweis anders verläuft.

Zunächst können wir annehmen, daß auf dem genannten algebraischen Gebilde keine Randpunkte von $\mathfrak{B}$ liegen; denn wäre dies der Fall, so könnten wir einen ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden Teilbereich $\mathfrak{B}^*$ wählen, der einen zusammenhängenden Rand hat und alle diejenigen Punkte von $\mathfrak{B}$ im Innern enthält, für die noch zu zeigen ist, daß dorthin $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv f(z)$ auch noch regulär und eindeutig fortgesetzt werden kann. Dann genügt es, für $\mathfrak{B}^*$ unseren Satz zu beweisen.

Nun genüge das algebraische Gebilde, welches ganz außerhalb $\mathfrak{B}$ verläuft, den Gleichungen

$$\varphi_\mu(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0: \qquad \mu = 2, 3, \ldots, n,$$

wobei die φ_μ Polynome in den $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind. Dann lassen wir im Beweisgang zu Satz 1 an Stelle des analytischen Gebildes mit der Gleichung $F(z) = 0$ das algebraische Gebilde mit den Gleichungen

$$\varphi_\mu(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0; \qquad \mu = 2, 3, \ldots, n$$

treten. Ferner verstehen wir unter den Bereichen $\mathfrak{K}(r)$ jetzt die Bereiche

$$|\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 + \cdots + |\varphi_n|^2 < r^2$$

mit den Rändern $H(r)$:

$$|\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 + \cdots + |\varphi_n|^2 = r^2.$$

Schließlich setzen wir noch an Stelle des Regularitätsbereiches $\mathfrak{R}$ den Bereich, den wir dadurch erhalten, daß wir aus dem projektiv abgeschlossenen-Raum die Punkte des algebraischen Gebildes herausnehmen. Den so erhaltenen Bereich bezeichnen wir wieder mit $\mathfrak{R}$. Mit diesen Abänderungen verläuft der Beweis dann wörtlich so, wie der Beweis zu Satz 1. Erst an der Stelle, wo die eindeutige und reguläre Fortsetzung von $\Phi(z)$ in die Punkte von $\mathfrak{F}(R)$ gezeigt wird, haben wir den Beweis dahingehend abzuändern, daß wir, wenn P ein Punkt von $\mathfrak{F}(R)$ ist, das analytische Gebilde $\mathfrak{H}$ durch das 2-dimensionale algebraische Gebilde $\mathfrak{H}$:

$$\varphi_\mu(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \varphi_\mu(P); \quad \mu = 2, 3, \ldots, n$$

ersetzen und die Gebilde $\mathfrak{H}_\nu$ durch algebraische Gebilde $\mathfrak{H}_\nu$:

$$\varphi_\mu(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \varepsilon_\mu^{(\nu)}; \quad \mu = 2, 3, \ldots, n$$

mit

$$\lim_{\nu \to \infty} \varepsilon_\mu^{(\nu)} = \varphi_\mu(P); \quad \mu = 2, 3, \ldots, n$$

und

$$|\varepsilon_2^{(\nu)}|^2 + |\varepsilon_3^{(\nu)}|^2 + \ldots + |\varepsilon_n^{(\nu)}|^2 < |\varphi_2(P)|^2 + |\varphi_3(P)|^2 + \ldots + |\varphi_n(P)|^2$$

für jedes ν. Auf $\mathfrak{H}$ und den $\mathfrak{H}_\nu$ treten dann 2-dimensionale Gebiete $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_\nu$ auf, die nun deshalb berandet sind, weil $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_\nu$ dieselben unendlich fernen Punkte wie das außerhalb $\mathfrak{B}$ verlaufende algebraische Gebilde haben, also selbst auch Punkte außerhalb $\mathfrak{T}(R)$ haben. Weiter haben wir im Verlauf des Beweises den verallgemeinerten Kontinuitätssatz statt für $k = n - 1$ für $k = 1$ anzuwenden. Damit erhalten wir dann das Resultat, daß es zu jedem r eine im Innern und auf dem Rand von $\mathfrak{T}(r)$ reguläre und eindeutige Funktion $\Phi(z)$ gibt, die in gewissen Randpunkten mit der dort vorgegebenen Funktion $f(z)$ übereinstimmt. Da die Bereiche $\mathfrak{R}(r)$ nur endlich viele unendlich ferne Randpunkte haben und ihre inneren Punkte sämtlich im Endlichen liegen, so liegen die Bereiche $\mathfrak{T}(r)$ ganz im Endlichen. Lassen wir nun r über alle Grenzen wachsen, so kommen wir zu dem Resultat, daß es in allen endlichen Punkten von $\mathfrak{B}$ und C eine eindeutige und reguläre Funktion $\Phi(z)$ gibt, die in gewissen Punkten von C mit der dort vorgegebenen Funktion $f(z)$ übereinstimmt. Wir wollen sehen, daß $\Phi(z)$ in allen im Endlichen gelegenen Punkten von C mit der dort vorgegebenen Funktion $f(z)$ übereinstimmt.

Q sei ein Punkt von C, in dem $\Phi(z)$ und $f(z)$ übereinstimmen. Da nun C zusammenhängend ist, so ist jeder Punkt S von C mit Q durch Punkte von C verbindbar. Ist diese Verbindung durch solche Punkte möglich, die sämtlich im Endlichen liegen, so sind in ihnen $\Phi(z)$ und $f(z)$ überall erklärt. Dann folgt aus der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung längs eines Weges, daß $\Phi(z)$ und $f(z)$ auch in S übereinstimmen.

Ist die Verbindung von Q und S durch Punkte von C nur durch Verwendung unendlich ferner Punkte von C möglich, so gibt es um die im Unendlichen liegenden Punkte des Verbindungsweges eine Umgebung, in der $f(z)$ noch regulär und eindeutig ist, und die dann notwendig Punkte im Endlichen hat. Innerhalb dieser Umgebung ist es gleichgültig, ob der betrachtete Weg im Unendlichen verläuft oder ins Endliche verschoben wird, da ja $f(z)$ dort eindeutig ist. Längs eines so ins Endliche verschobenen Weges ist $\Phi(z)$ definiert, so daß auch längs dieses Weges von Q nach S die Funktionen $\Phi(z)$ und $f(z)$ beide definiert sind, also dort übereinstimmen und somit auch in S identisch sind.

$\Phi(z)$ ist also die eindeutige und analytische Fortsetzung von $f(z)$ in alle im Endlichen liegenden Punkte von $\mathfrak{B}$. Die Fortsetzung in die unendlich fernen Punkte macht nun keine Schwierigkeiten mehr; denn durch eine projektive Transformation läßt sich jeder unendlich ferne Punkt aus $\mathfrak{B}$ ins Endliche bringen, und dann läßt sich im transformierten Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}$

von $\mathfrak{B}$ die transformierte Funktion in jeden im Endlichen gelegenen Punkt von $\tilde{\mathfrak{B}}$ eindeutig und analytisch fortsetzen; denn $\tilde{\mathfrak{B}}$ läßt ja auch ein algebraisches Gebilde, nämlich das Bild des außerhalb $\mathfrak{B}$ verlaufenden Gebildes ganz draußen. Macht man nun die projektive Transformation rückgängig, so hat man damit $f(z)$ auch in den betrachteten unendlich fernen Punkt von $\mathfrak{B}$ eindeutig und analytisch fortgesetzt. Da dieses Verfahren für jeden unendlich fernen Punkt von $\mathfrak{B}$ durchgeführt werden kann, so können wir also $f(z)$ in alle unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{B}$ eindeutig und analytisch fortsetzen. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Daß Satz 3 tatsächlich Bereiche erfaßt, die Satz 2 nicht erfaßt, sehen wir an einem einfachen Beispiel im R_6, dem Raum der drei Veränderlichen z_1, z_2, z_3. Dort sind die beiden 2-dimensionalen analytischen Ebenen

$$\mathfrak{E}_1\colon\ z_1 = 0;\ z_2 = 0,$$
$$\mathfrak{E}_2\colon\ z_1 = 1;\ z_3 = 0$$

windschief. Wählt man nun einen schlichten Bereich $\mathfrak{B}$ mit zusammenhängendem Rand, der $\mathfrak{E}_1$ ganz im Innern enthält und $\mathfrak{E}_2$ ganz draußen läßt, so gelten für ihn die Voraussetzungen von Satz 3. Die Voraussetzungen von Satz 2 gelten jedoch nicht; denn jede im ganzen Innern von $\mathfrak{B}$ reguläre und eindeutige Funktion ist konstant. Dieses sieht man folgendermaßen ein: Wählt man einen ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ enthaltenen Teilbereich $\mathfrak{B}^*$ mit zusammenhängendem Rand, der auch noch $\mathfrak{E}_1$ ganz im Innern enthält, so ist jede in $\mathfrak{B}$ reguläre und eindeutige Funktion $f(z)$ auf dem Rand von $\mathfrak{B}^*$ regulär und eindeutig. Auf das Äußere von $\mathfrak{B}^*$ treffen dann die Voraussetzungen von Satz 3 zu, und man erhält das Ergebnis, daß $f(z)$ auch noch im Äußeren von $\mathfrak{B}^*$ regulär und eindeutig und damit im projektiv abgeschlossenen Raum regulär und eindeutig, also konstant ist.

§ 3.

Nicht schlichte Bereiche. Eindeutige Funktionen.

Bisher haben wir nur schlichte Bereiche bezüglich eines Regularitätsbereiches bzw. schlichte Bereiche im projektiv abgeschlossenen Raum betrachtet. Sehen wir uns nun unsere Beweisverfahren für nicht schlichte Bereiche an, so stellen wir fest, daß sich unsere Sätze unmittelbar auf solche nicht schlichten Bereiche übertragen lassen, die über dem Regularitätsbereich bzw. über dem projektiv abgeschlossenen Raum keine Verzweigungspunkte aufweisen. Machen wir jedoch die Einschränkung, daß eine Funktion, die auf dem Rande eines Bereiches regulär und eindeutig ist, bei jeder möglichen Fortsetzung vom Rande ins Innere des Bereiches eindeutig in

bezug auf den betreffenden Bereich bleibt, so lassen sich beliebig verzweigte Bereiche behandeln. Auch können wir in diesem Fall auf einen zusammenhängenden Rand verzichten.

Satz 4. *$\mathfrak{B}$ sei ein beliebiger Bereich über einem Regularitätsbereich. Die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sei auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig. Verhält sich dann $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ bei jeder möglichen Fortsetzung vom Rande ins Innere von $\mathfrak{B}$ eindeutig, so läßt sich $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in jeden inneren Punkt von $\mathfrak{B}$ hinein analytisch fortsetzen.*

Wir können annehmen, daß $\mathfrak{B}$ ganz im Innern des Regularitätsbereiches der Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv F(z)$ liegt. Liegen nämlich Randpunkte von $\mathfrak{B}$ über Randpunkten des Regularitätsbereiches, so wählen wir einen ganz in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Teilbereich $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$, der alle Punkte von $\mathfrak{B}$ im Innern enthält, in die hinein $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv f(z)$ sich nicht analytisch fortsetzen läßt, falls solche existieren. Es genügt also, unseren Satz für solche Bereiche zu beweisen, die ganz im Innern von Regularitätsbereichen liegen.

$f(z)$ sei also auf dem Rand von $\mathfrak{B}$ regulär. Läßt sich nun $f(z)$ nicht in jeden inneren Punkt von $\mathfrak{B}$ hinein analytisch fortsetzen, so gibt es unter diesen Punkten einen solchen, für den $F(z)$ in bezug auf diese Punkte sein Maximum annimmt. P sei ein solcher Punkt und A das Maximum. Dann betrachten wir das analytische Gebilde $\mathfrak{F}$, welches der Gleichung genügt:

$$F(z) = F(P)$$

mit

$$F(P) = \mathfrak{A} \text{ und } |\mathfrak{A}| = A.$$

Die inneren Punkte von $\mathfrak{B}$, die über Punkten von $\mathfrak{F}$ liegen, bilden dann auf $\mathfrak{F}$ ein oder mehrere — eventuell nicht schlichte — Gebiete. In einem dieser Gebiete liegt P. Wir bezeichnen es mit $\mathfrak{G}$. Sicher ist $\mathfrak{G}$ berandet, da $\mathfrak{F}$ nach Satz 1 nicht ganz im Innern des Regularitätsbereiches liegt, was jedoch für die Punkte von $\mathfrak{B}$ der Fall ist. Der Rand von $\mathfrak{G}$ sei mit R bezeichnet. Nun wählen wir eine Folge analytischer Gebilde $\mathfrak{F}_\nu$:

$$F(z) = \mathfrak{A}$$

mit

$$\lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}$$

und

$$|\mathfrak{A}_\nu| > |\mathfrak{A}|$$

für jedes ν. Sind die ν hinreichend groß, so bilden die inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ auch auf diesen Flächen Gebiete, von denen wir je ein Teilgebiet $\mathfrak{G}_\nu$ mit dem Rand R_ν so auswählen können, daß die $\mathfrak{G}_\nu$ gegen $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergieren. Nun ist $f(z)$ in allen Punkten von $\mathfrak{G}_\nu + R_\nu$ ein-

deutig und regulär, da diese Punkte Randpunkte von $\mathfrak{B}$ oder solche inneren Punkte sind, in die hinein $f(z)$ sich analytisch fortsetzen läßt. Ebenso ist $f(z)$ in allen Punkten von R regulär und eindeutig, da diese Punkte zum Rand von $\mathfrak{B}$ gehören. Folglich läßt sich nach dem verallgemeinerten Kontinuitätssatz für $k = n - 1$ die Funktion $f(z)$ in alle inneren Punkte von $\mathfrak{G}$, also auch in P hinein analytisch fortsetzen, im Widerspruch zur Annahme, daß dieses nicht der Fall sein sollte.

Satz 4 versetzt uns nun in die Lage, den folgenden wichtigen Satz auszusprechen:

Satz 5. *Die nicht konstante Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sei auf dem Rande eines Bereiches $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig und verhalte sich bei jeder möglichen Fortsetzung vom Rande ins Innere von $\mathfrak{B}$ eindeutig. Dann ist notwendig und hinreichend dafür, daß sie sich ins ganze Innere von $\mathfrak{B}$ hinein analytisch fortsetzen läßt, daß es wenigstens eine im Innern von $\mathfrak{B}$ reguläre nicht konstante Funktion gibt.*

Daß die Voraussetzung dieses Satzes hinreichend ist, folgt aus Satz 4. Daß sie auch notwendig ist, folgt aus der Tatsache, daß $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ eine Funktion ist, die im ganzen Innern von $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig ist.

Satz 6. *$\mathfrak{B}$ sei ein beliebig verzweigter Bereich, zu dem es ein 2-dimensionales algebraisches Gebilde gibt, über dem keine inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ liegen. Die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sei auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig und verhalte sich bei jeder möglichen Fortsetzung vom Rande ins Innere von $\mathfrak{B}$ eindeutig. Dann läßt sich $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ins ganze Innere von $\mathfrak{B}$ hinein analytisch fortsetzen.*

Das algebraische Gebilde $\mathfrak{F}$, welches den Voraussetzungen dieses Satzes genügen möge, genüge den folgenden $n - 1$ Gleichungen:

$$\varphi_\mu(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0; \quad \mu = 2, 3, \ldots, n,$$

wobei die $\varphi_\mu(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv \varphi_\mu(z)$ Polynome in den $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind.

Wir können nun annehmen, daß keine Randpunkte von $\mathfrak{B}$ über Punkten von $\mathfrak{F}$ liegen; denn liegen über $\mathfrak{F}$ Randpunkte von $\mathfrak{B}$, so wählen wir einen ganz in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Teilbereich $\mathfrak{B}^*$, der alle Punkte im Innern enthält, in die sich die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv f(z)$ eventuell nicht fortsetzen läßt. Dann genügt es, für $\mathfrak{B}^*$ den Satz zu beweisen. Wir können uns also beim Beweis auf Bereiche $\mathfrak{B}$ beschränken, deren Randpunkte nicht über Punkten von $\mathfrak{F}$ liegen.

$f(z)$ sei also auf dem Rand von $\mathfrak{B}$ regulär und lasse sich nicht in jeden Punkt von $\mathfrak{B}$ hinein analytisch fortsetzen. Gibt es im Endlichen Punkte in $\mathfrak{B}$, in die hinein $f(z)$ sich nicht analytisch fortsetzen läßt, so gibt es unter diesen einen solchen, es sei P, für den

$$|\varphi_2(z)|^2 + |\varphi_3(z)|^2 + \ldots + |\varphi_n(z)|^2$$

sein Minimum in bezug auf diese Punkte annimmt. Dieses Minimum sei a. Also

$$\varphi_\mu(P) = a_\mu; \quad \mu = 2, 3, \ldots, n$$

mit

$$|a_2|^2 + |a_3|^2 + \ldots + |a_n|^2 = a.$$

Durch P legen wir nun das 2-dimensionale algebraische Gebilde $\mathfrak{F}_0$:

$$\varphi_\mu(z) = a_\mu; \quad \mu = 2, 3, \ldots, n.$$

$\mathfrak{F}_0$ hat dieselben unendlich fernen Punkte wie $\mathfrak{F}$. Diese liegen außerhalb $\mathfrak{B}$. Also schneidet $\mathfrak{F}_0$ den Rand von $\mathfrak{B}$. Die inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ über Punkten von $\mathfrak{F}_0$ bilden also auf $\mathfrak{F}_0$ 2-dimensionale — eventuell nicht schlichte — Gebiete. In einem dieser Gebiete, es sei das Gebiet $\mathfrak{G}$, liegt P. $\mathfrak{G}$ habe den Rand R, dessen Punkte zum Rand von $\mathfrak{B}$ gehören.

Jetzt wählen wir komplexe Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$; $\mu = 2, 3, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ mit

$$\lim_{\nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)} = a_\mu; \quad \mu = 2, 3, \ldots, n$$

und

$$|a_2^{(\nu)}|^2 + |a_3^{(\nu)}|^2 + \ldots + |a_n^{(\nu)}|^2 < a$$

für jedes ν. Sodann betrachten wir die Folge 2-dimensionaler algebraischer Gebilde $\mathfrak{F}_\nu$:

$$\varphi_\mu(z) = a_\mu^{(\nu)}; \quad \mu = 2, 3, \ldots, n.$$

Diese algebraischen Gebilde haben ebenfalls dieselben unendlich fernen Punkte wie $\mathfrak{F}$. Für hinreichend große ν bilden dann die inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ auf den $\mathfrak{F}_\nu$ 2-dimensionale Gebiete. Von diesen Gebieten können wir nun je ein Teilgebiet $\mathfrak{G}_\nu$ mit dem Rand R_ν so herausgreifen, daß die $\mathfrak{G}_\nu$ gegen $\mathfrak{G}$ und die R_ν gegen R gleichmäßig konvergieren.

Nun ist $f(z)$ in allen Punkten von R regulär; denn diese Punkte sind Randpunkte von $\mathfrak{B}$. Ferner ist $f(z)$ in allen Punkten von $\mathfrak{G}_\nu + R_\nu$ für jedes ν regulär; denn diese Punkte sind Randpunkte von $\mathfrak{B}$ oder solche inneren Punkte, in die hinein $f(z)$ sich analytisch fortsetzen läßt. Damit sind wir in den Voraussetzungen des verallgemeinerten Kontinuitätssatzes für $k = 1$ und erhalten das Resultat, daß $f(z)$ sich auch in alle inneren Punkte von $\mathfrak{G}$, also auch in P hinein analytisch fortsetzen läßt. Es gibt also im Endlichen keine inneren Punkte von $\mathfrak{B}$, in die hinein $f(z)$ sich nicht analytisch fortsetzen läßt.

Daß sich $f(z)$ auch in die im Unendlichen liegenden Punkte von $\mathfrak{B}$ analytisch fortsetzen läßt, folgt daraus, daß diese Punkte vor den im Endlichen liegenden Punkten nicht ausgezeichnet sind, da sie sich durch eine projektive Transformation, die ja $\mathfrak{F}$ stets wieder in ein 2-dimensionales algebraisches Gebilde überführt, ins Endliche transformieren lassen.

§ 4.

Betrachtungen für meromorphe Funktionen.

Bei den Untersuchungen für meromorphe Funktionen steht uns nicht der verallgemeinerte Kontinuitätssatz, sondern nur der Kontinuitätssatz in der Kneserschen Fassung zur Verfügung. Wir wollen ihn hier in der Form aussprechen, die für unsere Überlegungen am zweckmäßigsten ist.

Satz 7. *$\mathfrak{G}$ sei ein abgeschlossenes beschränktes Gebiet in der z_1-Ebene, und R sei ein Rand. Ferner sei $\mathfrak{G}_\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge abgeschlossener beschränkter Gebiete in der z_1-Ebene, die gleichmäßig gegen $\mathfrak{G}$ konvergieren. Die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv f(z)$ sei meromorph uud eindeutig in allen Punkten*

$$z_i = a_i; \quad i = 2, 3, \ldots, n; \quad z_1 \text{ auf } R,$$

sowie in allen Punkten

$$z_i = \varepsilon_i^{(\nu)}; \quad i = 2, 3, \ldots, n; \quad z_1 \text{ in } \mathfrak{G}_\nu \text{ und auf } R_\nu$$

mit

$$\lim_{\nu \to \infty} \varepsilon_i^{(\nu)} = a_i; \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Dann ist $f(z)$ auch noch meromorph und eindeutig in allen Punkten

$$z_i = a_i; \quad i = 2, 3, \ldots, n; \quad z_1 \text{ in } \mathfrak{G}.$$

Dieser Satz bedarf eines Beweises, da er bei Kneser nur für den Fall bewiesen ist, daß die Gebiete $\mathfrak{G}_\nu$ mit $\mathfrak{G}$ identisch sind. Der Beweis läßt sich jedoch leicht auf die Knesersche Form zurückführen.

Da die Funktion $f(z)$ in allen Punkten

$$z_i = a_i; \quad i = 2, 3, \ldots, n; \quad z_1 \text{ auf } R$$

meromorph und eindeutig ist, so ist sie in einem vollen $2n$-dimensionalen Bereich $\mathfrak{U}(R)$, der R ganz im Innern enthält, meromorph und eindeutig. Wir betrachten nun auf den Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$:

$$z_i = \varepsilon_i^{(\nu)}; \quad i = 2, 3, \ldots . n$$

die Punkte, für die z_1 in $\mathfrak{G}$ und auf R liegt. Da wir auf diesen Ebenen auch noch die Gebiete $\mathfrak{G}_\nu$ haben, so wird es dort im allgemeinen noch Punkte geben, die zwar zu $\mathfrak{G} + R$ gehören, aber nicht zu $\mathfrak{G}_\nu + R_\nu$. Da nun die $\mathfrak{G}_\nu$ gegen $\mathfrak{G}$, die R_ν gegen R und gleichzeitig die Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$ gegen die Ebene $\mathfrak{E}$:

$$z_i = a_i; \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

konvergieren, so liegen für hinreichend große ν sämtliche Punkte der Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$, für die z_1 zu $\mathfrak{G} + R$, aber nicht zu $\mathfrak{G}_\nu + R_\nu$ gehört, innerhalb $\mathfrak{U}(R)$. Für diese Punkte ist dann $f(z)$ noch meromorph und eindeutig. Für die übrigen Punkte auf diesen Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$, für die z_1 zu $\mathfrak{G} + R$ gehört, ist dann $f(z)$ deshalb meromorph und eindeutig, weil für

diese Punkte z_1 zu $\mathfrak{G}_\nu + R_\nu$ gehört. Also ist für hinreichend große ν, für alle Punkte der Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$, für die z_1 zu $\mathfrak{G} + R$ gehört, $f(z)$ meromorph und eindeutig. Damit sind wir aber in den Voraussetzungen des Kontinuitätssatzes in der Kneserschen Fassung und erhalten das Resultat: $f(z)$ ist auch noch meromorph und eindeutig für alle Punkte

$$z_i = a_i; \quad i = 2, 3, \ldots, n; \quad z_1 \text{ in } \mathfrak{G}.$$

Satz 8. *$\mathfrak{F}$ sei ein 2-dimensionales algebraisches Gebilde, welches den Gleichungen genügen möge:*

$$\begin{aligned} z_i &= f_i(z_1, z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_n); & i &= 2, 3, \ldots, k, \\ z_i &= a_i; & i &= k+1, k+2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Dabei sei k eine ganze Zahl mit $2 \leqq k \leqq n$ und die $f_i(z_1, z_{k+1}, \ldots, z_n)$, $i = 2, 3, \ldots, k$, Polynome in den Variablen $z_1, z_{k+1}, \ldots, z_n$ (für die f_i sind auch Konstanten zugelassen). $\mathfrak{B}$ sei ein schlichter Bereich mit zusammenhängendem Rand, der auf $\mathfrak{F}$ keine inneren Punkte aufweist. Dann gilt: Jede auf dem Rand von $\mathfrak{B}$ meromorphe und eindeutige Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ läßt sich ins ganze Innere von $\mathfrak{B}$ hinein meromorph und eindeutig fortsetzen.

Wir können einen Teil des Beweises uns ersparen, wenn wir auf die Beweise zu Satz 2 und Satz 3 Bezug nehmen.

Zunächst können wir annehmen, daß auf $\mathfrak{F}$ nicht nur keine inneren Punkte, sondern auch keine Randpunkte von $\mathfrak{B}$ liegen, da andernfalls dieses durch Wahl eines geeigneten Teilbereiches $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ zu erreichen ist.

Nun verfolgen wir dieselben Gedankengänge wie im Beweis zu Satz 2. An Stelle des dort auftretenden analytischen Gebildes mit der Gleichung $F(z) = 0$ tritt hier das algebraische Gebilde mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} z_i - f_i(z_1, z_{k+1}, \ldots, z_n) &= 0; & i &= 2, 3, \ldots, n, \\ z_i - a_i &= 0; & i &= k+1, k+2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ferner verstehen wir unter den Bereichen $\mathfrak{K}(r)$ jetzt die Punktmengen, die der Beziehung

$$\begin{aligned} &|z_2 - f_2|^2 + |z_3 - f_3|^2 + \ldots + |z_k - f_k|^2 \\ &\qquad + |z_{k+1} - a_{k+1}|^2 + \ldots + |z_n - a_n|^2 < r^2 \end{aligned}$$

genügen, und die die Ränder $H(r)$ mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} &|z_2 - f_2|^2 + |z_3 - f_3|^2 + \ldots + |z_k - f_k|^2 \\ &\qquad + |z_{k+1} - a_{k+1}|^2 + \ldots + |z_n - a_n|^2 = r^2 \end{aligned}$$

haben. Schließlich setzen wir noch an Stelle des Regularitätsbereiches $\mathfrak{R}$ den projektiv abgeschlossenen Raum, aus dem wir die Punkte von $\mathfrak{F}$ herausgenommen haben. Mit diesen Abänderungen verläuft nun der Beweis wörtlich so wie der Beweis zu Satz 2, nur haben wir statt der regulären Funktionen $f(z)$ und $\Phi(z)$ jetzt die meromorphen Funktionen

$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv f(z)$ und $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv \Phi(z)$ zu betrachten und an den entsprechenden Stellen das Wort „regulär" durch das Wort „meromorph" zu ersetzen. Eine Abänderung des Beweises tritt erst dort ein, wo die eindeutige und meromorphe Fortsetzung der Funktion $\Phi(z)$ in die Punkte von $\mathfrak{F}(R)$ gezeigt wird. Ist $P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ irgendein Punkt von $\mathfrak{F}(R)$, und sei

$$\begin{aligned} \alpha_i - f_i(\alpha_1, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) &= b_i; \quad i = 2, 3, \ldots, k, \\ \alpha_i - a_i &= b_i; \quad i = k+1, k+2, \ldots, n, \end{aligned}$$

dann betrachten wir jetzt das 2-dimensionale algebraische Gebilde $\mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned} z_i - f_i(z_1, z_{k+1}, \ldots, z_n) &= b_i; \quad i = 2, 3, \ldots, k, \\ z_i - a_i &= b_i; \quad i = k+1, k+2, \ldots, n, \end{aligned}$$

sowie die 2-dimensionalen algebraischen Gebilde $\mathfrak{H}_\nu$:

$$\begin{aligned} z_i - f_i(z_1, z_{k+1}, \ldots, z_n) &= \varepsilon_i^\nu; \quad i = 2, 3, \ldots, k, \\ z_i - a_i &= \varepsilon_i^\nu; \quad i = k+1, k+2, \ldots, n \end{aligned}$$

mit

$$\lim_{\nu \to \infty} \varepsilon_i^\nu = b_i; \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

und

$$|\varepsilon_2^{(\nu)}|^2 + |\varepsilon_3^{(\nu)}|^2 + \ldots + |\varepsilon_n^{(\nu)}|^2 < |b_2|^2 + |b_3|^2 + \ldots + |b_n|^2$$

für jedes ν. Auf $\mathfrak{H}$ und den $\mathfrak{H}_\nu$ treten nun 2-dimensionale Gebiete $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_\nu$ auf, die deshalb berandet sind, weil $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_\nu$ denselben unendlich fernen Punkt wie $\mathfrak{F}$ außerhalb $\mathfrak{B}$ haben. Wir haben also jetzt folgende Situation: auf dem algebraischen Gebilde $\mathfrak{H}$ liegt das Gebiet $\mathfrak{G}$ mit dem Rand R ganz im Endlichen und auf den Gebilden $\mathfrak{H}_\nu$ liegen die Gebiete $\mathfrak{G}_\nu$ mit den Rändern R_ν ganz im Endlichen, wobei die $\mathfrak{G}_\nu$ gegen $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergieren. $\Phi(z)$ ist in allen Punkten von R sowie in allen Punkten von $\mathfrak{G}_\nu + R_\nu$ für hinreichend große ν meromorph und eindeutig. Wir haben zu zeigen, daß $\Phi(z)$ auch noch in die Punkte von $\mathfrak{G}$ meromorph und eindeutig fortgesetzt werden kann.

Dazu führen wir folgende Transformation T aus:

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_1, \\ Z_i &= z_i - f_i(z_1, z_{k+1}, \ldots, z_n); \quad i = 2, 3, \ldots, k, \\ Z_i &= z_i - a_i; \quad i = k+1, k+2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Diese Transformation bildet den offenen Raum der $z_1, z_2, \ldots, z_n$ umkehrbar eindeutig und analytisch auf den offenen $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$-Raum ab. Die Umkehrtransformation T^{-1} lautet:

$$\begin{aligned} z_1 &= Z_1, \\ z_i &= Z_i + f_i(Z_1, Z_{k+1} + a_{k+1}, \ldots, Z_n + a_n); \quad i = 2, 3, \ldots, k, \\ z_i &= Z_i + a_i; \quad i = k+1, k+2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Durch T gehen $\mathfrak{H}$ in die 2-dimensionale analytische Ebene $\mathfrak{E}$:

$$Z_i = b_i\,; \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

und die $\mathfrak{H}_\nu$ in die 2-dimensionalen analytischen Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$:

$$Z_i = \varepsilon_i^{(\nu)}; \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

über. Dabei ist

$$\lim_{\nu \to \infty} \varepsilon_i^{(\nu)} = b_i\,; \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &\equiv \Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n) \text{ geht über in} \\ \Psi(Z) &\equiv \Psi(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) \\ &\equiv \Phi(Z_1, Z_2 + f_2, \ldots, Z_k + f_k, Z_{k+1} + a_{k+1}, \ldots, Z_n + a_n) \end{aligned}$$

mit

$$f_i \equiv f_i(Z_1, Z_{k+1} + a_{k+1}, \ldots, Z_n + a_n); \quad i = 2, 3, \ldots, k.$$

Ferner gehen $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}^*$ auf $\mathfrak{E}$, sowie R auf $\mathfrak{H}$ in R^* auf $\mathfrak{E}$, und die $\mathfrak{G}_\nu$ und R_ν auf den $\mathfrak{H}_\nu$ in $\mathfrak{G}_\nu^*$ und R_ν^* auf den $\mathfrak{E}_\nu$ über, wobei R^* der Rand von $\mathfrak{G}^*$ und die R_ν^* bzw. die Ränder der $\mathfrak{G}_\nu^*$ sind. Da die $\mathfrak{G}_\nu$ gegen $\mathfrak{G}$ und die R_ν gegen R gleichmäßig konvergieren, so konvergieren auch die $\mathfrak{G}_\nu^*$ gegen $\mathfrak{G}^*$ und die R_ν^* gegen R^* gleichmäßig. Weil nun $\Phi(z)$ in allen Punkten von R sowie von $\mathfrak{G}_\nu$ und R_ν für hinreichend große ν meromorph und eindeutig ist, so ist auch $\Psi(Z)$ in allen Punkten von R^* sowie $\mathfrak{G}_\nu^*$ und R_ν^* meromorph und eindeutig für hinreichend große ν. Damit sind wir in den Voraussetzungen von Satz 7 und erhalten das Resultat, daß $\Psi(Z)$ auch noch in alle Punkte von $\mathfrak{G}^*$ meromorph und eindeutig fortgesetzt werden kann.

Transformieren wir $\Psi(Z)$ in den $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$-Raum zurück, so ergibt sich dort, daß $\Phi(z)$ in alle Punkte von $\mathfrak{G}$ meromorph und eindeutig fortgesetzt werden kann.

Wir erhalten damit das Ergebnis, daß sich $\Phi(z)$ in alle inneren Punkte der Gebiete $\mathfrak{F}(R)$ meromorph und eindeutig fortsetzen läßt. Wie im Beweisgang zu Satz 3 können wir daraus weiter schließen, daß sich $f(z)$ in alle im Endlichen liegenden inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ hinein eindeutig und meromorph fortsetzen läßt.

Wir haben noch die eindeutige und meromorphe Fortsetzung von $f(z)$ in die im Unendlichen liegenden Punkte von $\mathfrak{B}$ zu zeigen. **Daß die Fortsetzung in die unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{B}$, falls sie möglich ist, eindeutig ist, folgt aus der Übereinstimmung der Funktionselemente der unendlich fernen Punkte mit der in den endlichen Punkten von $\mathfrak{B}$ vorliegenden Funktion. Daß im Unendlichen in $\mathfrak{B}$ keine wesentlichen Singularitäten liegen, kann man leicht aus dem Kontinuitätssatz folgern; denn lägen solche Singularitäten dort, so müßten diese die unendlich**

ferne Ebene ausfüllen, soweit diese in $\mathfrak{B}$ verläuft[17]). Das ist jedoch in der Umgebung der unendlich fernen Randpunkte von $\mathfrak{B}$ nicht der Fall.

Somit ist Satz 8 bewiesen.

Anwendung: Ein Satz von Severi.

Severi hat den Satz bewiesen:

Ist die Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in allen Punkten eines geschlossenen 2-dimensionalen algebraischen Gebildes $\mathfrak{G}$ regulär, so ist F eine Konstante.

Dieser Satz läßt sich auf Grund von Satz 3 folgendermaßen beweisen:

Wir wenden Satz 3 auf den projektiven Raum, aus dem wir die Punkte des algebraischen Gebildes $\mathfrak{G}$ entfernt haben, an. Die Randpunkte des so erhaltenen Bereiches $\mathfrak{B}$ sind die Punkte von $\mathfrak{G}$. Ist dann $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in allen Punkten von $\mathfrak{G}$ regulär und eindeutig, so ist nach Satz 3 die Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ auch in alle inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ hinein regulär und eindeutig fortsetzbar, also im projektiv abgeschlossenen Raum regulär und eindeutig. Eine solche Funktion ist aber eine Konstante.

---

[17]) Vgl. B.-Th., Bericht, IV., § 1.

(Eingegangen am 1. 11. 1936.)

Über die Anzahl der in einem Geschlecht enthaltenen Klassen von positiv-definiten quadratischen Formen.

Von

Wilhelm Magnus in Frankfurt am Main.

Der Hauptsatz des ersten Teiles der Arbeit von C. L. Siegel: „Über die analytische Theorie der quadratischen Formen“[1]) liefert unmittelbar einen sehr einfachen Ausdruck für die Anzahl der Darstellungen einer positiv-definiten quadratischen Form $\mathfrak{T}$ mit ganzzahligen Koeffizienten durch eine ebensolche Form $\mathfrak{S}$, falls die Anzahl der im Geschlecht von $\mathfrak{S}$ enthaltenen Klassen gleich eins ist. Im folgenden wird der Nachweis geliefert, daß es nur endlich viele nicht äquivalente Formen $\mathfrak{S}$ in mehr als zwei Variablen gibt, in deren Geschlecht nur eine beschränkte Anzahl von Klassen enthalten ist. Der Beweis wird mit Hilfe der von Siegel angegebenen Formel für das Maß des Geschlechtes von $\mathfrak{S}$ geführt, ist aber im übrigen durchaus elementarer Natur. Ein großer Teil der im folgenden benutzten Formeln ließe sich der Arbeit von Minkowski: „Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält“[2]) entnehmen; da die dort gegebenen Ableitungen sich jedoch an mehreren Punkten auf frühere Arbeiten von Minkowski stützen, und da die hier benötigten Formeln sich mit geringerer Mühe ableiten lassen als die weitergehenden Sätze von Minkowski, ist im folgenden nur ein einfacher Hilfssatz von Minkowski und Hilfssatz 18 der Arbeit von Siegel[1]) übernommen worden.

Es sei $\mathfrak{S}$ eine symmetrische Matrix von m Zeilen und Spalten; die Elemente $s_{ik} = s_{ki}$ $(i, k = 1, \ldots, m)$ von $\mathfrak{S}$ seien ganze Zahlen, und die Determinante $S = |\mathfrak{S}|$ von $\mathfrak{S}$ sei von Null verschieden. Die Matrizen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ heißen äquivalent, wenn es eine Matrix $\mathfrak{U}$ von m Zeilen und Spalten mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante $|\mathfrak{U}| = \pm 1$ gibt, so daß

$$\mathfrak{U}'\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{T} \tag{1}$$

wird, wobei $\mathfrak{U}'$ die aus $\mathfrak{U}$ durch Vertauschung von Zeilen und Spalten entstehende Matrix bedeutet. Ist q eine ganze Zahl > 1, und gibt es

---

[1]) Annals of Mathematics **36** (1935), 527—606.

[2]) Acta Mathematica 7 (1885), 201—258. Gesammelte Abhandlungen Bd. 1, Nr. IV.

eine Matrix $\mathfrak{U}$ mit ganzzahligen Koeffizienten und $|\mathfrak{U}| \equiv \pm 1 \pmod{q}$, so daß

$$\mathfrak{U}' \mathfrak{S} \mathfrak{U} \equiv \mathfrak{T} \pmod{q} \tag{2}$$

wird, so heißen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ modulo q äquivalent. Wir definieren ferner als Ordnung $E_q(\mathfrak{S})$ der Einheitengruppe von $\mathfrak{S}$ modulo q die Anzahl der modulo q verschiedenen Matrizen $\mathfrak{B}$ mit ganzzahligen Elementen, für die

$$\mathfrak{B}' \mathfrak{S} \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{S} \pmod{q} \tag{3}$$

gilt. Ist $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T}$ modulo q äquivalent, so ist $E_q(\mathfrak{S}) = E_q(\mathfrak{T})$. Die Hilfssätze dieses Abschnitts dienen der Berechnung bzw. Abschätzung der Zahlen $E_q(\mathfrak{S})$ für gewisse Moduln q.

Zur Abkürzung werde die folgende Bezeichnung eingeführt: Unter

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} \tag{4}$$

verstehen wir eine Matrix, die sich aus vier Teilmatrizen $\mathfrak{A}_{ik}$ $(i, k = 1, 2)$ zusammensetzt. Die $\mathfrak{A}_{ii}$ seien zwei quadratische Matrizen, d. h. $\mathfrak{A}_{ii}$ habe gleich viele, etwa m_i, Zeilen und Spalten; $\mathfrak{A}_{12}$ hat dann m_1 Zeilen und m_2 Spalten, $\mathfrak{A}_{21}$ hat m_2 Zeilen und m_1 Spalten, $\mathfrak{A}$ selber hat $m_1 + m_2$ Zeilen und Spalten. Falls $\mathfrak{A}_{12}$ und $\mathfrak{A}_{21}$ Nullmatrizen sind, schreiben wir statt (4) auch einfach

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_{11}, \mathfrak{A}_{22}). \tag{5}$$

Gelegentlich führen wir auch eine analoge Zerlegung einer Matrix in mehr als vier, allgemein in h^2 Matrizen $\mathfrak{A}_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, h)$ und die (4) und (5) entsprechende Schreibweise ein; wenn sich dabei die Zeilen- und Spalten-Zahl der Teilmatrizen aus dem Zusammenhang mitergibt, wird sie nicht besonders erwähnt. Die Buchstaben $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}^*$ usf. bedeuten stets Einheitsmatrizen.

Hilfssatz 1. *Es sei p eine Primzahl, p^{α_0} die höchste Potenz von p, die in allen Koeffizienten von $\mathfrak{S}$ aufgeht, p^t eine so hohe Potenz von p, daß dieselbe nicht mehr in $4S^2$ aufgeht. Dann gilt*

$$E_{p^t}(\mathfrak{S}) = p^{(m^2-1)\alpha_0} E_{p^{t-\alpha_0}}(p^{-\alpha_0} \mathfrak{S}). \tag{6}$$

Dabei ist dann $p^{-\alpha_0}\mathfrak{S}$ eine Matrix mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Elemente nicht sämtlich durch p teilbar sind. Eine solche heiße „*primitiv modulo p*". Ein einfacher Beweis für Hilfssatz 1 findet sich bei Minkowski, l. c. (2), § 4.

Hilfssatz 2. *Ist die Primzahlpotenz p^t kein Teiler von $4S^2$, so ist $\mathfrak{S}$ mod. p^t mit einer Matrix*

$$(p^{\alpha_0}\mathfrak{S}_0, p^{\alpha_1}\mathfrak{S}_1, \ldots, p^{\alpha_r}\mathfrak{S}_r) \tag{7}$$

äquivalent, wobei die Matrizen $\mathfrak{S}_\varrho$ $(\varrho = 0, 1, \ldots, r)$ nicht durch p teilbare Determinanten besitzen und $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_r$ ist.

Zum Beweise genügt es offenbar zu zeigen, daß ein modulo p primitives $\mathfrak{S}$ stets mod. p^t einer Matrix

$$(8)\qquad (\mathfrak{S}_0,\ \mathfrak{S}^*)$$

äquivalent ist, wobei $|\mathfrak{S}_0| \not\equiv 0 \pmod{p^t}$ und jeder Koeffizient von $\mathfrak{S}^*$ durch p teilbar ist; durch Anwendung vollständiger Induktion erhält man dann nach $r \leqq m$ Schritten Hilfssatz 2. Nun ist zunächst jedes primitive $\mathfrak{S}$ modulo p einer Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent, wobei die Nullen Nullmatrizen bedeuten und die Anzahl $\varkappa_0$ der Zeilen und Spalten von $\mathfrak{S}_0$ einfach der Rang von $\mathfrak{S}$ modulo p ist. Da die ganzen Zahlen mod. p einen Körper bilden, verläuft der Beweis hierfür genau wie der des entsprechenden Satzes im Körper der rationalen Zahlen. Man darf also annehmen, daß $\mathfrak{S}$ mod. p^t einer Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S}_0 & p\mathfrak{A} \\ p\mathfrak{A}' & p\mathfrak{S}^{**} \end{pmatrix}$$

äquivalent ist. Bildet man nun

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E}_0 & 0 \\ \mathfrak{B}' & \mathfrak{E}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_0 & p\mathfrak{A} \\ p\mathfrak{A}' & p\mathfrak{S}^{**} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_0 & \mathfrak{B} \\ 0 & \mathfrak{E}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_0, & \mathfrak{S}_0\mathfrak{B} + p\mathfrak{A} \\ \mathfrak{B}'\mathfrak{S}_0 + p\mathfrak{A}', & \mathfrak{S}^* \end{pmatrix},$$

wobei $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{E}^*$ Einheitsmatrizen von $\varkappa_0$ bzw. $m - \varkappa_0$ Zeilen und Spalten sind und

$$\mathfrak{S}^* = \mathfrak{B}'\mathfrak{S}_0\mathfrak{B} + p(\mathfrak{A}'\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{A}' + \mathfrak{S}^{**})$$

gesetzt ist, so erhält man, wenn man noch $\mathfrak{B} = -p\mathfrak{S}_0^{-1}\mathfrak{A}$ setzt, daß in der Tat $\mathfrak{S}$ mit $(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}^*)$ mod. p^t äquivalent ist, da $\mathfrak{B}$ mod. p^t einer ganzzahligen Matrix kongruent ist wegen $|\mathfrak{S}_0| \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Hilfssatz 3. *Es sei p eine ungerade Primzahl, p^t kein Teiler von S^2 und* $\mathfrak{S} \equiv (\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}^*) \pmod{p^t}$ *mit* $|\mathfrak{S}_0| \not\equiv 0 \pmod{p}$. *$\mathfrak{S}^*$ sei kongruent der Nullmatrix* mod. p, *und die Anzahl der Zeilen und Spalten von $\mathfrak{S}_0$ sei $\varkappa_0$. Dann gilt*

$$(9)\qquad E_{p^t}(\mathfrak{S}) \leqq p^{t\left[\binom{\varkappa_0}{2} + \varkappa_0(m-\varkappa_0)\right]}\, p^{-\binom{\varkappa_0}{2}} E_p(\mathfrak{S}_0)\ E_{p^t}(\mathfrak{S}^*).$$

Es ist übrigens nicht schwer zu zeigen, daß in (9) das Gleichheitszeichen gilt, doch wird das hier nicht gebraucht.

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_0 & \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}^* \end{pmatrix}$$

eine Matrix, die der Kongruenz $\mathfrak{B}'\mathfrak{S}\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{S} \pmod{p^t}$ genügt; $\mathfrak{B}_0$ habe dabei ebensoviele (nämlich $\varkappa_0$) Zeilen und Spalten wie $\mathfrak{S}_0$. Man erhält

$$(10_1)\qquad \mathfrak{B}_0'\mathfrak{S}_0\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_2'\mathfrak{S}^*\mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{S}_0 \pmod{p^t},$$

$$(10_2)\qquad \mathfrak{B}_0'\mathfrak{S}_0\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2'\mathfrak{S}^*\mathfrak{B}^* \equiv 0 \pmod{p^t},$$

$$(10_3)\qquad \mathfrak{B}_1'\mathfrak{S}_0\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}^{*\prime}\mathfrak{S}^*\mathfrak{B}^* \equiv \mathfrak{S}^* \pmod{p^t}.$$

Aus (10_1) folgt $\mathfrak{B}_0' \mathfrak{S}_0 \mathfrak{B}_0 \equiv \mathfrak{S}_0 \pmod{p}$ und somit $|\mathfrak{B}_0| \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Bei gegebenem $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_2$ bestimmt sich daher $\mathfrak{B}_1$ aus (10_2) eindeutig zu

$$(10_4) \qquad \mathfrak{B}_1 \equiv - \mathfrak{S}_0^{-1} \mathfrak{B}_0'^{-1} \mathfrak{B}_2' \mathfrak{S}^* \mathfrak{B}^* \pmod{p^t},$$

und hieraus folgt, daß zwei Matrizen $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$, die den Bedingungen

$$(11) \qquad \mathfrak{B}' \mathfrak{S} \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{S}, \quad \overline{\mathfrak{B}}' \mathfrak{S} \overline{\mathfrak{B}} \equiv \mathfrak{S} \pmod{p^t}$$

genügen und in den ersten $\varkappa_0$ Spalten $\pmod{p^t}$ übereinstimmen, der Bedingung

$$\overline{\mathfrak{B}}^{-1} \mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{B}^*) \pmod{p^t}$$

mit $\mathfrak{B}^{*\prime} \mathfrak{S}^* \mathfrak{B}^* \equiv \mathfrak{S}^* \pmod{p^t}$ genügen müssen. Die Anzahl $E_{p^t}(\mathfrak{S})$ der mod. p^t inkongruenten Lösungen $\mathfrak{B}$ von (11) ist somit höchstens gleich der Anzahl der hinsichtlich der ersten $\varkappa_0$ Spalten mod. p^t inkongruenten Matrizen $\mathfrak{B}$ mal der Anzahl $E_{p^t}(\mathfrak{S}^*)$. Nun gibt es mod. p^t überhaupt nur

$$p^{\varkappa_0(m-\varkappa_0)t}$$

verschiedene Matrizen $\mathfrak{B}_2$ von $\varkappa_0$ Spalten und $m - \varkappa_0$ Zeilen; die Kongruenz (10_1) hat ferner bei gegebenem $\mathfrak{B}_2$ entweder keine oder genau $E_{p^t}(\mathfrak{S}_0)$ Lösungen $\mathfrak{B}_0$, denn (10_1) besagt, daß $\mathfrak{B}_0$ die Matrix $\mathfrak{S}_0$ in die Matrix $\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{B}_2 \mathfrak{S}^* \mathfrak{B}_2$ transformieren soll, und die Anzahl der Möglichkeiten, eine Matrix in eine zweite zu transformieren, ist hier offensichtlich entweder gleich Null oder gleich der Anzahl der Transformationen von $\mathfrak{S}_0$ in sich selbst, also gleich $E_{p^t}(\mathfrak{S}_0)$. (Aus

$$\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{B}_2' \mathfrak{S}^* \mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{S}_0 \pmod{p}$$

kann man übrigens leicht schließen, daß (10_1) bei gegebenem $\mathfrak{B}_2$ stets mindestens eine Lösung $\mathfrak{B}_0$ besitzt, und aus $\mathfrak{S}^* \equiv 0 \pmod{p}$ folgt in ähnlicher Weise, daß die aus (10_2) durch Einsetzen von $\mathfrak{B}_1$ aus (10_4) entstehende Kongruenz bei willkürlichem $\mathfrak{B}_2$ und einem (10_1) befriedigenden $\mathfrak{B}_0$ stets mindestens eine Lösung $\mathfrak{B}^*$ hat, woraus dann folgt, daß in Hilfssatz 4 das Gleichheitszeichen gilt.) Aus den bisherigen Überlegungen ergibt sich mithin

$$(12) \qquad E_{p^t}(\mathfrak{S}) \leqq p^{t(m-\varkappa_0)\varkappa_0} E_{p^t}(\mathfrak{S}_0)\, E_{p^t}(\mathfrak{S}^*),$$

und da nach Siegel l. c.[1]), Hilfssatz 18,

$$E_{p^t}(\mathfrak{S}_0) = p^{(t-1)\binom{\varkappa_0}{2}} E_p(\mathfrak{S}_0)$$

ist, ist Hilfssatz 3 hiermit bewiesen. Aus demselben Siegelschen Hilfssatz ergibt sich auch noch ohne weiteres die folgende

Ergänzung zu Hilfssatz 3. *Für die in Hilfssatz* 3 *definierte Zahl* $a_{\varkappa_0} = p^{-\binom{\varkappa_0}{2}} E_p(\mathfrak{S}_0)$ *gilt unabhängig von* $\mathfrak{S}_0$ *stets*

$$a_{\varkappa_0} \leqq 2 \text{ für } \varkappa_0 \neq 2, \qquad a_{\varkappa_0} \leqq 2\left(1 + \frac{1}{p}\right) \text{ für } \varkappa_0 = 2.$$

Hilfssatz 4. *Ist 2^t kein Teiler von $4\,S^2$, und ist $\mathfrak{S}$ modulo 2^t mit einer Matrix* $(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}^*)$ *äquivalent, wobei* $|\mathfrak{S}_0| \equiv 1$ (mod. 2) *und die Matrix* $\mathfrak{S}^*$ *kongruent der Nullmatrix* (mod. 2) *ist, so ist, wenn $\mathfrak{S}_0$ $\varkappa_0$ Zeilen und Spalten besitzt,*

$$E_{2^t}(\mathfrak{S}) \leqq 2^{2\varkappa_0 + t\left[\binom{\varkappa_0}{2} + \varkappa_0(m-\varkappa_0)\right]} E_{2^t}(\mathfrak{S}^*). \tag{13}$$

Beim Beweise kann man zunächst genau wie beim Beweise von Hilfssatz 3 vorgehen und erhält

$$E_{2^t}(\mathfrak{S}) \leqq 2^{t\left[\binom{\varkappa_0}{2} + \varkappa_0(m-\varkappa_0)\right]}\, 2^{-3\binom{\varkappa_0}{2}} E_{\varkappa}(\mathfrak{S}_0)\, E_{2^t}(\mathfrak{S}^*),$$

da nach Siegel, l. c.[1]), Hilfssatz 18, $E_{2^t}(\mathfrak{S}_0) = 2^{(t-3)\binom{\varkappa_0}{2}} \cdot E_{\varkappa}(\mathfrak{S}_0)$ gilt, und es handelt sich jetzt nur noch um den Nachweis, daß

$$2^{-3\binom{\varkappa_0}{2}} E_{\varkappa}(\mathfrak{S}_0) \leqq 2^{2\varkappa_0}$$

ist. Wir können dabei noch mit Hilfe der beim Beweise von Hilfssatz 2 benutzten Schlußweise zeigen, daß $\mathfrak{S}_0$ mod. 2 einer Matrix $\mathfrak{F}_0$ kongruent ist, die entweder die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}_0$ oder die Matrix $\mathfrak{Z}_0 = (z_{ik})$ ist, in der alle $z_{ik} = 0$ sind bis auf die $z_{2i-1,\,2i} = z_{2i,\,2i-1}$, die $= 1$ sind; der zweite Fall kann nur für gerades $\varkappa_0$ eintreten. Wir können daher $\mathfrak{S}_0 \equiv \mathfrak{F}_0$ (mod. 2) annehmen. Betrachten wir nun in der Gruppe $\mathfrak{G}_8$ aller mod. 8 verschiedenen Matrizen $\mathfrak{B}$, die der Kongruenz

$$\mathfrak{B}'\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{S}_0 \pmod{8}$$

genügen, die Untergruppe $\mathfrak{H}_8$ der Matrizen $\mathfrak{B}$, die außerdem noch der Kongruenz

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{E}_0 \pmod{2}$$

genügen, so ergibt sich, daß der Index von $\mathfrak{H}_8$ in $\mathfrak{G}_8$ höchstens gleich $E_2(\mathfrak{F}_0)$ ist, und wenn $H_8(\mathfrak{S}_0)$ die Ordnung von $\mathfrak{H}_8$ bedeutet, so erhalten wir mithin

$$E_8(\mathfrak{S}_0) \leqq E_2(\mathfrak{F}_0)\, H_8(\mathfrak{S}_0).$$

Zur Bestimmung von $H_8(\mathfrak{S}_0)$ nehme man $\mathfrak{S}_0$ in der Form

$$\mathfrak{S}_0 \equiv \mathfrak{F}_0 + 2\,\mathfrak{R}_0 \pmod{8}$$

an, wobei $\mathfrak{R}_0$ mod. 4 eindeutig bestimmt ist. Ferner sei, mit mod. 4 eindeutig bestimmtem $\mathfrak{B}_0$,

$$\mathfrak{B}_0 \equiv \mathfrak{E}_0 + 2\,\mathfrak{W}_0 \pmod{8}.$$

Soll dann $\mathfrak{B}_0'\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{B}_0 \equiv \mathfrak{S}_0$ (mod. 8) gelten, so muß

$$2(\mathfrak{W}_0'\,\mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}_0\,\mathfrak{W}_0) + 4(\mathfrak{W}_0'\,\mathfrak{F}_0\,\mathfrak{W}_0 + \mathfrak{W}_0'\,\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_0\,\mathfrak{W}_0) \equiv 0 \pmod{8} \tag{14}$$

sein, wobei die Null auf der rechten Seite die Nullmatrix bedeutet. Man kann nun die Matrix $\mathfrak{F}_0\,\mathfrak{W}_0$ in der Form schreiben:

$$\mathfrak{F}_0\,\mathfrak{W}_0 \equiv \mathfrak{T}_0 + \mathfrak{P}_0 + 2(\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{P}_1) \pmod{4}, \tag{15}$$

wobei $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_1$ symmetrische Matrizen mit Elementen 0 oder 1 sind, und $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ Matrizen sind, die in und unter der Hauptdiagonale nur Nullen als Elemente haben, während über der Hauptdiagonale nur Nullen oder Einsen stehen. $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$ sind dann durch (15) eindeutig bestimmt. (14) liefert zunächst, daß $\mathfrak{P}_0$ die Nullmatrix sein muß; für $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{P}_1$ ergibt sich dann wegen $\mathfrak{F}_0^2=\mathfrak{E}_0$:

$$(16)\qquad \mathfrak{T}_0+\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_1'+\mathfrak{T}_0\mathfrak{F}_0\mathfrak{T}_0+\mathfrak{T}_0\mathfrak{F}_0\mathfrak{N}_0+\mathfrak{N}_0\mathfrak{F}_0\mathfrak{T}_0\equiv 0 \pmod{2},$$

während $\mathfrak{T}_1$ willkürlich gewählt werden kann. $\mathfrak{P}_1$ ist bei gegebenem $\mathfrak{T}_0$ offenbar durch $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{N}_0$, d. h. durch $\mathfrak{S}_0$ eindeutig bestimmt; aber $\mathfrak{T}_0$ selber ist nicht willkürlich wählbar, vielmehr folgt aus (16), daß die Diagonalelemente von

$$\mathfrak{T}_0+\mathfrak{T}_0\mathfrak{F}_0\mathfrak{T}_0$$

sämtlich $\equiv 0 \pmod{2}$ sein müssen. Ist $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{E}_0$, so folgt daraus, daß in jeder Spalte von $\mathfrak{T}_0$ die Summe der nicht in der Hauptdiagonale stehenden Elemente gerade sein muß, während für $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{Z}_0$ die Elemente in der Hauptdiagonale von $\mathfrak{T}_0$ gerade, d. h. Null sein müssen. Im ersten Falle haben wir höchstens $2^{\binom{\varkappa_0}{2}+1}$, im zweiten höchstens $2^{\binom{\varkappa_0}{2}}$ Möglichkeiten für $\mathfrak{T}_0$; zusammen mit den $2^{\binom{\varkappa_0+1}{2}}$ Möglichkeiten für die Wahl von $\mathfrak{T}_1$ ergibt sich also

$$(17)\qquad \begin{aligned} H_\varkappa(\mathfrak{E}_0+2\mathfrak{N}_0) &\leqq 2^{\varkappa_0+1+2\binom{\varkappa_0}{2}},\\ H_\varkappa(\mathfrak{Z}_0+2\mathfrak{N}_0) &\leqq 2^{\varkappa_0+2\binom{\varkappa_0}{2}}. \end{aligned}$$

Es bleibt nun noch die Bestimmung der Zahlen $E_2(\mathfrak{E}_0)$ und $E_2(\mathfrak{Z}_0)$ zu erledigen. Sei allgemein $\mathfrak{G}_\varkappa$ die Gruppe der mod. 2 inkongruenten Matrizen $\mathfrak{B}_\varkappa$ von $\varkappa$ Reihen und Spalten, für die

$$\mathfrak{B}_\varkappa'\,\mathfrak{E}_\varkappa\,\mathfrak{B}_\varkappa\equiv\mathfrak{E}_\varkappa \pmod{2}$$

gilt, wobei $\mathfrak{E}_\varkappa$ die Einheitsmatrix von $\varkappa$ Zeilen und Spalten bedeutet, so ist der Index von $\mathfrak{G}_{\varkappa-1}$ in $\mathfrak{G}_\varkappa$ höchstens gleich der Anzahl der mod. 2 inkongruenten Lösungssysteme von

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_\varkappa^2\equiv 1 \pmod{2}.$$

Diese berechnet sich sofort zu

$$\binom{\varkappa}{1}+\binom{\varkappa}{3}+\binom{\varkappa}{5}+\dots=2^{\varkappa-1},$$

da ja eine ungerade Anzahl u der x_ϱ ($\varrho=1,\dots,\varkappa$) $\equiv 1$ mod. 2 sein muß, und man genau $\binom{\varkappa}{u}$ Möglichkeiten hat, u von den x_ϱ kongruent 1 (mod. 2) zu wählen. Hieraus ergibt sich sofort

$$E_2(\mathfrak{E}_0)\leqq 2^{\binom{\varkappa_0}{2}}.$$

Analog findet man: Da die Anzahl der mod. 2 inkongruenten Lösungssysteme von

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_\varkappa y_\varkappa \equiv 1 \pmod{2}$$

gleich $(2^\varkappa - 1)\, 2^{\varkappa - 1}$ ist — es dürfen nämlich nicht alle $x_\varrho \equiv 0 \pmod{2}$ sein, was $2^\varkappa - 1$ Möglichkeiten für die x_ϱ gibt, nach deren Festlegung eine mod. 2 nicht identisch erfüllte lineare Beziehung zwischen den y_ϱ übrigbleibt, die $2^{\varkappa-1}$ Lösungen besitzt —, so gilt

$$E_2(\mathfrak{Z}_0) \leqq (2^{\varkappa_0} - 1)(2^{\varkappa_0 - 2} - 1) \dots (2^2 - 1) \cdot 2^{\varkappa_0^2 : 4} < 2^{\binom{\varkappa_0 + 1}{2}}.$$

Hier gilt übrigens in der ersten Ungleichung bekanntlich das Gleichheitszeichen (s. etwa bei L. E. Dickson, Linear groups, Leipzig 1901, Theorem 115, p. 94). Damit erhalten wir also insgesamt

$$E_\varkappa(\mathfrak{S}_0) \leqq 2^{\varkappa_0 + 1 + 3\binom{\varkappa_0}{2}} \quad \text{für } \mathfrak{S}_0 \equiv \mathfrak{E}_0 \pmod{2},$$

$$E_\varkappa(\mathfrak{S}_0) \leqq 2^{2\varkappa_0 + 3\binom{\varkappa_0}{2}} \quad \text{für } \mathfrak{S}_0 \equiv \mathfrak{Z}_0 \pmod{2},$$

und wegen $\varkappa_0 + 1 \leqq 2\varkappa_0$ in jedem Falle Hilfssatz 4.

Hilfssatz 5. *Es sei $\mathfrak{S}$ primitiv, d. h. es sei der größte gemeinsame Teiler aller Elemente s_{ik} von $\mathfrak{S}$ gleich Eins. Die Anzahl m der Zeilen und Spalten von $\mathfrak{S}$ sei $\geqq 3$. Es sei p eine Primzahl, und $\alpha_p(\mathfrak{S}) = \frac{1}{2} p^{-t\binom{m}{2}} E_{p^t}(\mathfrak{S})$, wobei p^t eine so hohe Potenz von p sei, daß p^t nicht in $4S^2$ aufgeht, wobei S die Determinante von $\mathfrak{S}$ ist; es sei ferner S_p die höchste Potenz von p, die in S aufgeht, und man setze*

$$\beta_p(\mathfrak{S}) = \tfrac{1}{2} S_p^{-\frac{m+1}{2}} p^{-t\binom{m}{2}} E_{p^t}(\mathfrak{S}) = S_p^{-\frac{m+1}{2}} \alpha_p(\mathfrak{S}).$$

Dann gelten die Ungleichungen

$$\beta_p(\mathfrak{S}) < S_p^{-1/2} \quad \textit{für } p > 2.$$

$$\beta_2(\mathfrak{S}) < 2^{2m-1} S_2^{-1/2}.$$

Zum Beweise nehme man zunächst $p > 2$ an. Nach Hilfssatz 2 ist dann $\mathfrak{S}$ mod. p^t äquivalent mit einer Matrix

$$(p^{\alpha_0} \mathfrak{S}_0, p^{\alpha_1} \mathfrak{S}_1, \dots, p^{\alpha_r} \mathfrak{S}_r) = (\mathfrak{S}_0, p\, \mathfrak{S}^*);$$

die Matrizen $\mathfrak{S}_\varrho$ ($\varrho = 0, 1, \dots, r$) haben dann zu p teilerfremde Diskriminanten, die Anzahl der Zeilen und Spalten von $\mathfrak{S}_\varrho$ sei $\varkappa_\varrho$. Die Zahl α_0 ist gleich Null, da $\mathfrak{S}$ primitiv ist. Wendet man nun Hilfssatz 3 an, so ergibt sich eine Abschätzung für $E_{p^t}(\mathfrak{S})$, in der noch $E_{p^t}(\mathfrak{S}^*)$ als Faktor vorkommt. Nach Hilfssatz 1 ist dann

$$E_{p^t}(\mathfrak{S}^*) = p^{[(m - \varkappa_0)^2 - 1]\alpha_1} E_{p^{t - \alpha_1}}(\bar{\mathfrak{S}}^*),$$

wobei

$$\bar{\mathfrak{S}}^* = (\mathfrak{S}_1, p^{\alpha_2 - \alpha_1} \mathfrak{S}_2, \dots, p^{\alpha_r - \alpha_1} \mathfrak{S}_r)$$

wieder mod. p primitiv ist, so daß man wiederum Hilfssatz 3 anwenden kann usf. Da die Größe S_p sich zu

$$S_p = p^{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_r \omega_r}$$

ergibt, wobei für $\varrho = 1, 2, \dots, r$

$$\omega_\varrho = \alpha_\varrho - \alpha_{\varrho-1}, \quad m_\varrho = m - \varkappa_0 - \varkappa_1 - \dots - \varkappa_{\varrho-1}$$

gesetzt ist, so erhält man durch eine einfache Rechnung

$$\beta_p \leqq \tfrac{1}{2} a_{\varkappa_0} a_{\varkappa_1} \dots a_{\varkappa_r} p^{-\alpha_r} p^{-\frac{1}{2} \sum\limits_{\varrho=1}^{r} \omega_\varrho m_\varrho (m - m_\varrho)},$$

wobei die $a_{\varkappa_\varrho}$ analog zu dem $a_{\varkappa_0}$ in der Ergänzung zu Hilfssatz 3 definiert sind. Hier ist nun $\alpha_r \geqq r$ und

$$a = \tfrac{1}{2} a_{\varkappa_0} a_{\varkappa_1} \dots a_{\varkappa_r} \leqq 2^r \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{r+1},$$

wie in der Ergänzung zu Hilfssatz 3 angegeben wurde, und wegen $p \geqq 3$ erhält man, daß $a p^{-\alpha_r}$ jedenfalls für $r > 2$ kleiner als eins sein muß. Da ferner

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \omega_\varrho m_\varrho (m - m_\varrho) \geqq \sum_{\varrho=1}^{r} \omega_\varrho m_\varrho$$

ist, ergibt sich die Behauptung von Hilfssatz 5 im Falle $r > 2$ sofort. Für $r = 1$ und $r = 2$ hat man zu berücksichtigen, daß nur für $\varkappa_\varrho = 2$ die Zahl $a_{\varkappa_\varrho} > 2$ sein kann; hier führt eine Diskussion der verschiedenen möglichen Einzelfälle ebenfalls zum Beweis von Hilfssatz 5. — Der Fall, daß $p = 2$ ist, erledigt sich durch Anwendung von Hilfssatz 4 statt Hilfssatz 3 genau so wie der Fall $p > 2$.

Die Matrix $\mathfrak{S} = (s_{ik})$ sei nun die Matrix einer positiv definiten quadratischen Form

$$\sum_{i,k=1}^{m} s_{ik} x_i x_k.$$

Es werde $E(\mathfrak{S})$ definiert als die Anzahl der verschiedenen Matrizen $\mathfrak{B}$ mit ganzzahligen Elementen und

$$\mathfrak{B}' \mathfrak{S} \mathfrak{B} = \mathfrak{S}.$$

Es seien $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{(1)}, \mathfrak{S}^{(2)}, \dots$ Repräsentanten der verschiedenen in dem Geschlecht von $\mathfrak{S}$ enthaltenen Klassen äquivalenter Matrizen. Dann ist das Maß $M(\mathfrak{S})$ des Geschlechtes von $\mathfrak{S}$ definiert als

$$M(\mathfrak{S}) = \frac{1}{E(\mathfrak{S})} + \frac{1}{E(\mathfrak{S}^{(1)})} + \frac{1}{E(\mathfrak{S}^{(2)})} + \dots. \tag{18}$$

Nach Siegel, l. c. (1), S. 568, gilt

$$M(\mathfrak{S}) = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\dots\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\pi^{\frac{m(m+1)}{4}} \prod\limits_p \beta_p(\mathfrak{S})}, \tag{19}$$

wobei das Produkt im Nenner über alle Primzahlen p zu erstrecken ist. Wenn nun in dem Geschlecht von $\mathfrak{S}$ nur eine Klasse enthalten ist, so gilt, da $E(\mathfrak{S}) \geqq 2$ ist,

$$M(\mathfrak{S}) \leqq \tfrac{1}{2}, \tag{20}$$

während andererseits Hilfssatz 5 für ein primitives $\mathfrak{S}$ die Aussage liefert:

$$M(\mathfrak{S}) \geqq \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2^{2m-2}\,\pi^{\frac{m(m+1)}{4}}} S^{\frac{1}{2}}, \tag{21}$$

da nämlich das über alle Primzahlen erstreckte Produkt der S_p gerade gleich S ist. Da nun für reelles x

$$\ln \Gamma(x) \geqq (x - \tfrac{1}{2}) \ln x - x + \tfrac{1}{2} \ln 2\pi$$

ist, (siehe etwa Whittaker-Watson, Modern Analysis, 3rd ed. Cambridge 1920, p. 251), und da $\ln \Gamma(x)$ für $x \geqq 2$ monoton zunimmt, wird, wenn man

$$h_m = 4 \cdot 2^{-2m} \prod_{\mu=1}^{m} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \pi^{-\frac{m(m+1)}{4}} \tag{22}$$

setzt, für $m \geqq 4$:

$$\begin{aligned} \ln h_m &\geqq \ln 2\pi - 2m \ln 2 + 2\int_2^{\frac{m}{2}} [(x - \tfrac{1}{2}) \ln x - x + \tfrac{1}{2} \ln 2\pi]\, dx - \frac{m(m+1)}{4} \ln \pi \\ &= \frac{m^2}{4} (\ln m - \tfrac{3}{2} - \ln 2\pi) - \frac{m}{2} (\ln m - 1 - \tfrac{1}{2} \ln \pi + 2 \ln 2] + \ln \frac{e^4}{8\pi}, \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$h_m > \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad m \geqq 35;$$

für $m \geqq 35$ sind also die Ungleichungen (20) und (21) nicht verträglich, und es gilt daher der Satz:

Es gibt nur endlich viele nicht äquivalente positiv definite quadratische Formen

$$\sum_{i,k=1}^{m} s_{ik} x_i x_k$$

mit ganzzahligen Koeffizienten s_{ik} und $m \geqq 3$ Variablen, deren Geschlecht nur eine Klasse äquivalenter Formen enthält. Ist d der größte gemeinsame Teiler der ganzen Zahlen s_{ik}, so gilt im Falle $d = 1$, daß für $m \geqq 35$ keine solche Form existiert, während für $m < 35$ nur solche Formen die Eigenschaft haben können, daß in ihrem Geschlecht nur eine Klasse äquivalenter Formen enthalten ist, für welche die Diskriminante $|s_{ik}|$ höchstens gleich $\frac{1}{4} h_m^2$ ist, wobei h_m durch (12) *definiert ist; es gibt nur endlich viele nicht äquivalente solche Formen. Für $d > 1$, d. h. wenn die Form nicht primitiv ist, ist in dem Geschlecht derselben stets mehr als eine Klasse nicht äquivalenter Formen enthalten.*

Zu beweisen ist hiervon nur noch die Behauptung über die nicht-primitiven Formen. Nun gilt: Ist $\mathfrak{S}$ eine primitive Form, so ist

$$(23) \qquad M(d\,\mathfrak{S}) = d\,M(\mathfrak{S});$$

der Beweis ergibt sich sofort durch Anwendung von Hilfssatz 1. Andererseits ergibt sich leicht

$$(24) \qquad E(d\,\mathfrak{S}) = E(\mathfrak{S}),$$

und aus der Definition des Maßes eines Geschlechtes folgt hieraus die Behauptung.

Gleichung (23) und die Ungleichung (22) lassen erkennen, daß es allgemein nur endlich viele nicht äquivalente positiv-definite Formen geben kann, in deren Geschlecht nur eine beschränkte Anzahl von Klassen enthalten ist.

Ein besonderes Interesse verdienen die Formen

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2,$$

deren Matrix die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}_m$ von m Zeilen und Spalten ist, da, wie Siegel, l. c.[1]) gezeigt hat, die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in m Quadrate sich durch eine sehr einfache Formel ausdrücken läßt, wenn das Geschlecht von $\mathfrak{E}_m$ nur eine Klasse enthält. Nun liefert die beim Beweise der Hilfssätze 3 und 4 angewandte Methode zusammen mit (19) und l. c.[1]) Hilfssatz 13 leicht die für $m > 4$ gültige Ungleichung

$$M(\mathfrak{E}_m) \geqq \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\pi^{\frac{2m-1}{2}}\quad 4}\, M(\mathfrak{E}_{m-2}) \prod_{p>2} \frac{1-p^{-(m-2)/2}}{1+p^{-(m-2)/2}}.$$

Es ist $E(\mathfrak{E}_m) = 2^m\, m!$ und $M(\mathfrak{E}_{m-2}) \geqq \frac{1}{(m-2)!\; 2^{m-2}}$; soll also in dem Geschlecht von $\mathfrak{E}_m$ nur eine Klasse enthalten sein, so folgt daraus

$$\frac{\zeta^2\left(\frac{m-2}{2}\right)}{4\,m\,(m-1)} \geqq \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{4 \quad \pi^{\frac{2m-1}{2}}}.$$

Diese Ungleichung ist aber für $m \geqq 12$ nicht mehr erfüllt, und daraus folgt:

Das Geschlecht von $\mathfrak{E}_m$ enthält für $m > 11$ mehr als eine Klasse.

Zusatz bei der Korrektur. März 1937. Einer freundlichen Mitteilung von Herrn Hasse entnehme ich die folgenden Formeln: Setzt man $m^* = \left[\frac{m-1}{2}\right]$, und ist B_ν bzw. E_ν der absolute Betrag der ν-ten

Bernoullischen bzw. Eulerschen Zahl, so wird, je nach dem Rest von m mod. 4:

$$(25)\quad \begin{cases} M(\mathfrak{E}_m) = \dfrac{2}{\beta_2(\mathfrak{E}_m)} \displaystyle\prod_{\nu=1}^{m^*} \frac{B_{2\nu}}{2\nu}(1-2^{-2\nu}); & (m \text{ ungerade}), \\[2ex] M(\mathfrak{E}_m) = \dfrac{2}{\beta_2(\mathfrak{E}_m)} \cdot \dfrac{1}{m} B_{m/2}(2^{m/2}-1) \displaystyle\prod_{\nu=1}^{m^*} \frac{B_{2\nu}}{2\nu}(1-2^{-2\nu}); & (m \equiv 0 \bmod. 4), \\[2ex] M(\mathfrak{E}_m) = \dfrac{2}{\beta_2(\mathfrak{E}_m)} \cdot E_{m^*} \cdot 2^{-m/2-1} \displaystyle\prod_{\nu=1}^{m^*} \frac{B_{2\nu}}{2\nu}(1-2^{-2\nu}); & (m \equiv 2 \bmod. 4). \end{cases}$$

Dabei berechnet sich $\beta_2(\mathfrak{E}_m)$ zu

$$(26)\qquad \beta_2(\mathfrak{E}_m) = \frac{1}{2}\prod_{\mu=1}^{m} \delta_\mu,$$

wobei δ_μ die dyadische Dichte der Darstellungen der Zahl 1 durch die Form $\sum_{i=1}^{m} x_i^2$ bedeutet. Es ist für

$$\begin{array}{llllll} \mu \equiv 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ \delta_\mu = 1 + 2^{-\mu^*} + 2^{2-\mu}, & 1 + 2^{-\mu^*}, & 1 + 2^{-\mu^*}, & 1, & 1 - 2^{-\mu^*} - 2^{2-\mu}, \\ & 6, & 7, & 8 \text{ (mod. 8).} \\ & 1 - 2^{-\mu^*}, & 1 - 2^{-\mu^*}, & 1. \end{array}$$

Hieraus folgt $M(\mathfrak{E}_m) = \dfrac{1}{2^m\, m!}$ für $2 \leqq m \leqq 8$ und

$$M(\mathfrak{E}_9) = \frac{1}{2^9\, 9!} \cdot \frac{3^2 \cdot 17}{137}, \quad M(\mathfrak{E}_{10}) = \frac{1}{2^{10} \cdot 10!} \frac{3^2 \cdot 5^2}{137},$$

$$M(\mathfrak{E}_{11}) = \frac{1}{2^{11} \cdot 11!} \frac{3 \cdot 5 \cdot 31}{137}.$$

In dem Geschlecht von $\mathfrak{E}_m$ ist also dann und nur dann nicht mehr als eine Klasse enthalten, wenn $m \leqq 8$ ist. – Die Formeln (25) und (26) gestatten zugleich, die Ungleichung (21) durch eine genaue Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $M(\mathfrak{E}_m)$ zu ergänzen. Z. B. ergibt sich leicht

$$\ln M(\mathfrak{E}_m) = \frac{m^2}{4}\left(\ln m - \frac{3}{2} - \ln 2\pi\right) + O(m \ln m).$$

(Eingegangen am 12. 1. 1937.)

Primdivisoren mit vorgegebener Primitivwurzel.

Von

Herbert Bilharz in Göttingen [1]).

1. E. Artin [2]) hatte die Frage aufgeworfen, ob für eine vorgegebene, rationale Zahl $a \neq 0$ die Menge $\mathfrak{M}_a$ derjenigen zu a primen Primzahlen p, für welche a Primitivwurzel mod. p ist, eine Dichte $w(\mathfrak{M}_a)$ besitzt und gegebenenfalls, welchen Wert diese Dichte hat [3]). Für die Behandlung dieser Frage hatte er einen Ansatz entwickelt, der zu einer plausiblen Vermutung für den Wert der fraglichen Dichte führt.

Wir geben zunächst diesen Ansatz wieder, und zwar gleich für die ohne weiteres mögliche Verallgemeinerung der Problemstellung auf einen beliebigen algebraischen Zahlkörper k.

1.1. *Wir betrachten also für eine beliebig vorgegebene Zahl $a \neq 0$ aus dem Körper k die Menge $\mathfrak{M}_a$ derjenigen zu a primen Primideale $\mathfrak{p}$ aus k für welche a Primitivwurzel* mod. $\mathfrak{p}$ *ist.*

Die Aussage: a ist Primitivwurzel mod. $\mathfrak{p}$ wird im folgenden durch a PW $(\mathfrak{p})$ abgekürzt.

Ist zunächst a eine Einheitswurzel genau m-ter Ordnung aus dem Körper k, so sieht man unmittelbar, daß aPW$(\mathfrak{p})$ nur für endlich viele Primideale $\mathfrak{p}$ erfüllt ist. Dann ist nämlich

$$\mathfrak{N}\mathfrak{p} - 1 = m,$$

also $\mathfrak{N}\mathfrak{p} = m + 1$; zu einer gegebenen Norm existieren aber bloß endlich viele Ideale.

---

[1]) Die vorliegende Arbeit wurde von der Math.-naturwissenschaftl. Fakultät der Göttinger Universität im Sommersemester 1936 als Dissertation angenommen. Referent war Herr Prof. H. Hasse. Ihm bin ich für die Anregung und viele wertvolle Ratschläge während der Abfassung zu großem Dank verpflichtet.

[2]) In einer mündlichen Mitteilung an H. Hasse am 13. September 1927.

[3]) Im folgenden möge der Leser unter Dichte stets Dirichletdichte verstehen. Dieser Dichtebegriff ist nämlich für unsere Untersuchung näherliegend als der Begriff der natürlichen Dichte (Grenzwert der relativen Häufigkeit von Anzahlen), da er ein Minimum an Analysis benötigt. Ob im Falle der Existenz einer Dirichletdichte auch eine natürliche Dichte existiert und denselben Wert hat, ist in dieser Allgemeinheit unbestimmt. Im Abschnitt 4 werden wir am Beispiel des rationalen Funktionenkörpers über endlichem Konstantenkörper sehen, daß dies nicht mehr der Fall zu sein braucht.

Um unwesentliche Komplikationen in der weiteren Untersuchung zu vermeiden, wollen wir von jetzt ab annehmen, daß *a keine Einheitswurzel in k ist.*

Zum Ausgangspunkt unserer Untersuchung nehmen wir das *Kriterium*: Damit ein zu a primes Primideal $\mathfrak{p}$ zur Menge $\mathfrak{M}_a$ gehört, ist notwendig und hinreichend, daß für keine rationale Primzahl q gleichzeitig

$$q \mid \mathfrak{N}\mathfrak{p} - 1 \quad \text{und} \quad a^{\frac{\mathfrak{N}\mathfrak{p}-1}{q}} \equiv 1 \bmod. \mathfrak{p}$$

oder also

$$\mathfrak{N}\mathfrak{p} \equiv 1 \bmod. q \quad \text{und} \quad a \underset{q}{\equiv} 1 \bmod. \mathfrak{p}$$

gilt. Denn ist $a\,\mathrm{PW}(\mathfrak{p})$, so ist

$$(1) \qquad a^{\frac{\mathfrak{N}\mathfrak{p}-1}{q}} \equiv 1 \bmod. \mathfrak{p}$$

für kein $q \mid \mathfrak{N}\mathfrak{p} - 1$ lösbar. Ist andererseits a nicht $\mathrm{PW}(\mathfrak{p})$, so existiert ein echter Teiler h von $\mathfrak{N}\mathfrak{p} - 1$ mit

$$a^h \equiv 1 \bmod. \mathfrak{p},$$

also auch ein $q \mid \mathfrak{N}\mathfrak{p} - 1$ mit (1).

Nach allgemeinen Zerlegungsgesetzen[4]) charakterisiert die Relation $\mathfrak{N}\mathfrak{p} \equiv 1 \bmod. q$ die im Oberkörper $k_q = k(\sqrt[q]{1})$ voll zerlegten Primideale $\mathfrak{p}$ aus k und die weitere Relation $a \underset{q}{\equiv} 1 \bmod. \mathfrak{p}$ die weiter im Körper $K_q = k_q(\sqrt[q]{a}) = k(\sqrt[q]{1}, \sqrt[q]{a})$ voll zerlegten Primideale. Somit ergibt sich

Satz 1. 1: *Damit ein zu a primes Primideal $\mathfrak{p}$ aus dem Körper k zur Menge $\mathfrak{M}_a$ gehört, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{p}$ für keine rationale Primzahl q im über k galoisschen Körper*

$$K_q = k(\sqrt[q]{1}, \sqrt[q]{a})$$

voll zerlegt ist.

1. 2. Sei $n(K_q) = [K_q : k]$ der Grad des galoisschen Körpers K_q über k. Dann haben die in K_q voll zerlegten Primideale die Dichte[5]) $1/n(K_q)$, also die in K_q nicht voll zerlegten (trägen oder verzweigten) Primideale die Dichte

$$1 - \frac{1}{n(K_q)}.$$

Da ferner je endlich viele Körper K_{q_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ voneinander unabhängig über dem Grundkörper k sind (d. h. den Körper k zum Durch-

[4]) S. z. B. E. Hecke: Vorlesungen über die Theorie der algebr. Zahlen (1923), S. 110 ff. D. Hilbert: Gesammelte Werke 1 (1932), S. 249 ff.

[5]) Vgl. Abschnitt 3. 1. dieser Arbeit.

schnitt haben), haben die in keinem K_q voll zerlegten Primideale $\mathfrak{p}$ die Dichte

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n(K_{q_\nu})}\right).$$

Nach dem Analogon in 3.2. ließe sich nun aus der Vertauschbarkeit des Grenzüberganges $n\to\infty$ mit dem in der Definition der (Dirichletschen) Dichte steckenden Grenzübergang $s\to 1+0$ erschließen, daß die in keinem Körper K_q voll zerlegten $\mathfrak{p}$ — also auch die zu a primen unter ihnen, die nach Satz 1.1 gerade die Menge $\mathfrak{M}_a$ ausmachen — die Dichte

$$w(\mathfrak{M}_a)=\prod_{q}\left(1-\frac{1}{n(K_q)}\right) \tag{2}$$

hätten, wobei jetzt das Produkt in (2) über alle Primzahlen q erstreckt wird.

Hierbei ist

$$n(K_q)=[K_q:k]=[K_q:k_q]\cdot[k_q:k].$$

Der Grad $[k_q:k]=f(q)$ ist ein gewisser Teiler von $\varphi(q)$, nämlich der kleinste positive Exponent mit

$$\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{f(q)}\equiv 1 \text{ mod. } q$$

für alle $\mathfrak{p}\nmid q$; der Grad

$$[K_q:k_q]=\begin{cases} q & \text{für } a \underset{q}{\neq} 1 \text{ in } k_q\\ 1 & \text{für } a \underset{q}{=} 1 \text{ in } k_q.\end{cases}$$

Im letzten Fall ist zu beachten, daß aus $a\underset{q}{=}1$ in k_q durch Normbildung folgt

$$a^{f(q)}\underset{q}{=}1 \text{ in } k,$$

also auch $a\underset{q}{=}1$ in k.

Zusammengefaßt ist hiernach

$$n(K_q)=\begin{cases} q\cdot f(q) & \text{für } a \underset{q}{\neq} 1 \text{ in } k\\ f(q) & \text{für } a \underset{q}{=} 1 \text{ in } k,\end{cases}$$

und somit

$$w(\mathfrak{M}_a)=\prod_{a\underset{q}{\neq}1}\left(1-\frac{1}{q\cdot f(q)}\right)\cdot\prod_{a\underset{q}{=}1}\left(1-\frac{1}{f(q)}\right). \tag{3}$$

Da für fast alle q gilt $f(q)=q-1$, und

$$\sum_{q}\frac{1}{q\cdot(q-1)}$$

konvergiert, ist das erste unendliche Teilprodukt in (3) absolut konvergent; da überdies sämtliche Faktoren von 0 verschieden sind, ist es selbst von 0 verschieden.

Nach Voraussetzung ist a keine Einheitswurzel in k; daher gibt es höchstens endlich viele q mit $a \underset{q}{=} 1$, also ist das zweite Teilprodukt in (3) jedenfalls endlich.

Ist es gleich 0, d. h. gibt es ein q mit $a \underset{q}{=} 1$ und $f(q) = 1$, dann gibt es zu a tatsächlich keine PW ($\mathfrak{p}$). In diesem Fall ist nämlich $K_q = k$ und in k zerfällt $\mathfrak{p}$ natürlich; nach Satz 1.1 ist aber dann a nicht PW ($\mathfrak{p}$).

Wenn sich also die oben erwähnte Vertauschbarkeit der Grenzübergänge $n \to \infty$ und $s \to 1 + 0$ rechtfertigen ließe, so ergäbe sich:

Im allgemeinen ist ein $a \neq 0$ aus k für unendlich viele $\mathfrak{p}$ Primitivwurzel mod. $\mathfrak{p}$. Auszunehmen sind nur die beiden Fälle:

I. a ist eine Einheitswurzel,

II. $a \underset{q}{=} 1$ mit einem q, für das k die q-ten Einheitswurzeln enthält.

Ist speziell $a \underset{q}{\neq} 1$ für alle Primzahlen q, d. h. besitzt a überhaupt keine echte Darstellung als Potenz, so ist der Wert der Dichte einfach

$$w(\mathfrak{M}_a) = \prod_q \left(1 - \frac{1}{q \cdot f(q)}\right), \tag{4}$$

also von a unabhängig.

1.3. Für den rationalen Zahlkörper ist durchweg $f(q) = q - 1$. Der oben erwähnte Ausnahmefall würde dann nur für $a \underset{2}{=} 1$ eintreten, und wir erhielten das Ergebnis:

Zu jeder von 0 und ± 1 verschiedenen nicht quadratischen rationalen Zahl a gibt es unendlich viele Primzahlen p mit a als Primitivwurzel.

Bis heute ist es nicht gelungen, diese Artinsche Überlegung durch einen Beweis der Vertauschbarkeit der beiden Grenzübergänge zu rechtfertigen. In der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen, daß sich der Artinsche Ansatz auf die entsprechende Fragestellung in einem algebraischen Funktionenkörper k einer Unbestimmten mit endlichem Konstantenkörper übertragen läßt, und daß sich in diesem Falle die Vertauschbarkeit der beiden Limites rechtfertigen läßt, wenn man die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung für die Zetafunktionen der entsprechenden Körper K_q über k annimmt.

2. In diesem Abschnitt übertragen wir die Artinsche Überlegung auf einen algebraischen Funktionenkörper k mit endlichem Konstantenkörper Ω von p Elementen[6]). p ist dabei nicht notwendig Primzahl.

2.1. *Wir betrachten für ein gegebenes Element* $a \neq 0$ *aus* k *die Menge* $\mathfrak{M}_a$ *derjenigen zu* a *primen Primdivisoren* $\mathfrak{p}$ *von* k, *für die* a *Primitivwurzel mod.* $\mathfrak{p}$ *ist.*

---

[6]) Vgl. hierzu die Arbeiten: F. K. Schmidt in Math. Zeitschr. **33** (1930), S. 1—32. H. Hasse in Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Berlin, Math.-naturw. Klasse (1934), S. 250—263.

Wir übernehmen auch hier die Abkürzung a PW $(\mathfrak{p})$.

Behandeln wir wiederum zuerst den Fall, daß a eine Einheitswurzel aus dem Grundkörper k ist, d. h. schon im Konstantenkörper Ω liegt. Dann ist — wie im Zahlkörper — a höchstens für endlich viele Primdivisoren PW $(\mathfrak{p})$; und zwar sind das genau diejenigen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ vom ersten Grad (d. h. $\mathfrak{N}\,\mathfrak{p} = p$), für welche a die höchstmögliche Ordnung $p - 1$ hat. Im folgenden nehmen wir wieder an, daß a keine Einheitswurzel ist. Analog wie in 1. 1 erhalten wir

Satz 2. 1: *Damit ein zu a primer Primdivisor $\mathfrak{p}$ aus dem Körper k zur Menge $\mathfrak{M}_a$ gehört, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{p}$ für keine Primzahl $q \nmid p$ im über k galoisschen Körper*

$$K_q = k\,(\sqrt[q]{1},\ \sqrt[q]{a})$$

voll zerlegt ist.

Weil die Normen der Primdivisoren aus k durchweg Potenzen der festen Zahl p sind, ist klar, daß wir hier die Basisprimzahl von p (die Charakteristik von k) für die Primzahlen q außer Betracht zu lassen haben. Im folgenden wird für die Primzahlen q stets die Einschränkung $q \nmid p$ gemacht, auch wo dies nicht ausdrücklich hervorgehoben ist.

2. 2. Auch hier gilt wie in 1. 2., daß die im Körper K_q voll zerlegten Primdivisoren $\mathfrak{p}$ den reziproken Grad von K_q über k zur Dichte haben. Die in K_q nicht voll zerlegten p haben also die Dichte

$$1 - \frac{1}{n\,(K_q)},$$

wobei $n\,(K_q)$ wieder den Grad von K_q über k bezeichnet.

Da die algebraischen Funktionenkörper K_{q_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots)$ nicht zu je endlich vielen voneinander unabhängig sind, vielmehr einen k echt umfassenden Körper zum Durchschnitt haben können, tritt für das weitere eine Abweichung gegenüber dem Abschnitt 1 ein.

Jetzt ist nämlich

$$k_q = k\,(\sqrt[q]{1}) = k\,\Omega_q$$

Erweiterung des Körpers k auf den endlichen Körper

$$\Omega_q = \Omega\,(\sqrt[q]{1})$$

als neuen Konstantenkörper. Somit ist der Grad

$$[k_q : k] = [\Omega_q : \Omega] = f\,(q)$$

einfach die Ordnung von p mod. q, also der kleinste positive Exponent mit

$$p^{f\,(q)} \equiv 1 \bmod. q$$

für die *feste* Zahl p statt oben *aller* $\mathfrak{N}\,\mathfrak{p}$.

Für endlich viele verschiedene Primzahlen $q, q', \ldots$ mit dem Produkt

$$m = q\,q' \ldots$$

ist daher das Kompositum

$$k_m = k_q k_{q'} \ldots = k\Omega_q \Omega_{q'} \ldots = k\Omega_m$$

die Erweiterung von k auf den endlichen Körper

$$\Omega_m = \Omega_q \Omega_{q'} \ldots$$

als neuen Konstantenkörper. Daher ist der Grad

$$[k_m : k] = [\Omega_m : \Omega] = \{f(q),\ f(q'), \ldots\}$$

nach der Theorie der endlichen Körper[7]) das kleinste gemeinsame Multiplum von $f(q), f(q'), \ldots$, und wie man sofort sieht, ist diese Zahl gleich der Ordnung von p mod. m; also

$$[k_m : k] = f(m) = \{f(q),\ f(q'), \ldots\}$$

(während in 1.2 der Grad $f(m)$ das Produkt $f(q) \cdot f(q') \cdot \ldots$ und nicht mehr die Ordnung $\{f(q),\ f(q'), \ldots\}$ der Menge aller $\mathfrak{N}\,\mathfrak{p}$ mod. m ist).

Das uns interessierende Kompositum

$$K_m = K_q K_{q'} \ldots = k_m(\sqrt[q]{a},\ \sqrt[q']{a}, \ldots)$$

hat dann den Grad

$$n(K_m) = [K_m : k] = [K_m : k_m] \cdot [k_m : k] = m_a \cdot f(m),$$

wobei m_a dasjenige Teilprodukt der q bezeichnet, das durch Weglassen der Primzahlen q mit $a \underset{q}{=} 1$ aus m entsteht.

Unter Berücksichtigung dieser formalen Abweichung gegenüber dem algebraischen Zahlkörper liefert die Artinsche Überlegung, wie wir noch zeigen werden, hier

$$w(\mathfrak{M}_a) = \sum_{(m,\,p)=1} \frac{\mu(m)}{m_a \cdot f(m)} \tag{5}$$

als zu erwartenden Wert für die Dichte von $\mathfrak{M}_a$.

Wir werden im folgenden — unter Anwendung der Riemannschen Vermutung (u. A. d. R. V.) für die Zetafunktionen der Körper K_q — beweisen, daß die Menge $\mathfrak{M}_a$ in der Tat die Dichte (5) besitzt.

Beschränkt man sich auf solche Elemente a, welche für keine Primzahl $q \nmid p$ eine q-te Potenz sind, so ist der Wert der Dichte einfach

$$w(\mathfrak{M}_a) = \sum_{(m,\,p)=1} \frac{\mu(m)}{m \cdot f(m)}, \tag{6}$$

also von a unabhängig.

Romanoff[8]) hat die absolute Konvergenz der Reihe (6) bewiesen; einen einfacheren Beweis, der gleich ein allgemeineres Resultat liefert,

---

[7]) E. Steinitz in Crelle **137** (1910), S. 277 ff.

[8]) Math. Annalen **109** (1934), S. 673 ff.

gaben Erdös-Turán[9]). Aus dem Romanoffschen Satz ergibt sich die absolute Konvergenz der Reihe für $w(\mathfrak{M}_a)$ in ihrem allgemeinsten Falle (5). Weil nämlich nach Voraussetzung a keine Einheitswurzel sein soll, existieren höchstens endlich viele Primzahlen q mit $a \underset{q}{=} 1$, und daher ist die Koeffizientenfolge $\frac{m}{m_a}$, durch deren Anbringung die Romanoffsche Reihe in die allgemeine Reihe für $w(\mathfrak{M}_a)$ übergeht, für alle m mit $\mu(m) \neq 0$ beschränkt.

Ferner haben Davenport-Heilbronn[10]) bewiesen, daß

$$(7)\qquad w(\mathfrak{M}_a) = \sum_{(m,\,p=1)} \frac{\mu(m)}{m_a \cdot f(m)} \geqq \prod_q \left(1 - \frac{1}{q_a \cdot f(q)}\right)$$

ist.

Zerlegen wir nun das Produkt rechts in (7), wie oben, in zwei Teilprodukte, so haben wir

$$(8)\qquad w(\mathfrak{M}_a) \geqq \prod_{a \underset{q}{\neq} 1} \left(1 - \frac{1}{q \cdot f(q)}\right) \cdot \prod_{a \underset{q}{=} 1} \left(1 - \frac{1}{f(q)}\right).$$

Das erste unendliche Teilprodukt ist nach dem Romanoffschen Satze absolut konvergent; da kein Faktor 0 ist, ist es also von 0 verschieden. Das zweite Teilprodukt in (8) ist jedenfalls endlich.

Ist es gleich 0, d. h. gibt es ein q mit $a \underset{q}{=} 1$ und $f(q) = 1$, dann fällt der Körper K_q mit dem Körper k zusammen, und in k zerfallen die Primdivisoren $\mathfrak{p}$, so daß nach Satz 2. 1 für kein $\mathfrak{p}$ unser a PW ($\mathfrak{p}$) sein kann.

Wir erhalten daher als Ergebnis den

Satz: *Sei k ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten über endlichem Konstantenkörper, dann ist u. A. d. R. V. jedes Element $a \neq 0$ aus k zu unendlich vielen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ Primitivwurzel; abgesehen von den beiden Fällen:*

I. *a ist eine Einheitswurzel,*

II. *$a \underset{q}{=} 1$ mit einem q, für das k die q-ten Einheitswurzeln enthält (d. h. $q \mid p - 1$ ist).*

3. Wir gehen nun zum Existenzbeweis und der Wertbestimmung von $w(\mathfrak{M}_a)$ über.

---

[9]) Mitt. d. Forsch. Inst. f. Math. u. Mech. Tomsk 1 (1935), S. 101—103. Dort wird allgemeiner die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{(m,\,p)=1} \frac{1}{m \cdot f(m)^{\varepsilon}}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ bewiesen. Diese Verallgemeinerung ist jedoch für unsere Untersuchung nebensächlich.

[10]) Wird von den Verfassern demnächst veröffentlicht werden.

3.1. Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von Primdivisoren aus k. Wir sagen dann, $\mathfrak{M}$ besitzt eine Dirichletdichte $w(\mathfrak{M})$, wenn für die Häufigkeitsfunktion

$$(9) \qquad w(s, \mathfrak{M}) = \frac{\sum\limits_{\substack{m \geqq 1 \\ \mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{M}}} (m\, \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{ms})^{-1}}{\sum\limits_{\substack{m \geqq 1 \\ \mathfrak{p} \text{ in } k}} (m\, \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{ms})^{-1}} \qquad (s > 1)$$

der Grenzwert

$$(10) \qquad w(\mathfrak{M}) = \lim_{s \to 1+0} w(s, \mathfrak{M})$$

existiert.

Aus (9) folgt unmittelbar

$$0 \leqq w(s, \mathfrak{M}) \leqq 1.$$

Der Nenner in (9) ist dabei der Logarithmus der Zetafunktion des Grundkörpers k; diese ist nämlich für $\Re s > 1$ definiert durch

$$\zeta(s, k) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{1}{1 - \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{-s}}\right)$$

und dort gleichmäßig konvergent, woraus durch Übergang zum Logarithmus (reeller Zweig) und Dirichletentwicklung in der Tat

$$\log \zeta(s, k) = -\sum_{\mathfrak{p}} \log(1 - \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{-\mathfrak{p}}) = \sum_{\substack{m \geqq 1 \\ \mathfrak{p} \text{ in } k}} \frac{1}{m\, \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{ms}}$$

folgt.

Ist speziell $\mathfrak{M} = (K)$ die Menge der in einem galoisschen Erweiterungskörper K vom Grade $n(K)$ über k voll zerlegten Primdivisoren aus k, so ist

$$w(s, (K)) \leqq \frac{1}{n(K)} \cdot \frac{\log \zeta(s, K)}{\log \zeta(s, k)}.$$

Wegen (9) ist hierzu bloß nachzuweisen, daß

$$\sum_{\substack{m \geqq 1 \\ \mathfrak{p} \text{ in } (K)}} (m\, \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{ms})^{-1}$$

als Bestandteil in der Summe

$$\frac{1}{n(K)} \cdot \log \zeta(s, K) = \frac{1}{n(K)} \sum_{\substack{m \geqq 1 \\ \mathfrak{P} \text{ in } K}} (m\, \mathfrak{N}\mathfrak{P}^{ms})^{-1}$$

enthalten ist, wobei $\mathfrak{P}$ alle Primdivisoren aus K durchläuft. Nun besagt die Zugehörigkeit von $\mathfrak{p}$ zu (K), daß sich $\mathfrak{p}$ im Körper K in das Produkt von $n(K)$ voneinander verschiedenen Primdivisoren $\mathfrak{P}$ vom Relativgrad 1 bezüglich k zerlegt, deren Norm also gleich $\mathfrak{N}\mathfrak{p}$ ist:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_{n(K)}; \quad \mathfrak{N}\mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{N}\mathfrak{p}.$$

Also ist

$$\sum_{\substack{m \geqq 1 \\ \mathfrak{p} \text{ in } (K)}} (m \, \mathfrak{N} \mathfrak{p}^{ms})^{-1} = \frac{1}{n(K)} \sum_{\substack{m \geqq 1 \\ \mathfrak{P} \text{ in } K; \\ \mathfrak{P} \text{ unverzweigt} \\ \text{vom Rel. Grad } 1}} (m \, \mathfrak{N} \mathfrak{P}^{ms})^{-1}$$

$$\leqq \frac{1}{n(K)} \log \zeta(s, K).$$

Da die entsprechende Summe über alle übrigen Primdivisoren $\mathfrak{P}$ von K für $s \to 1 + 0$ einen endlichen Grenzwert hat, ergibt sich hieraus weiter, wie bekannt, die Existenz der Dichte der Menge (K) mit dem Wert

$$w((K)) = \frac{1}{n(K)}.$$

3.2. Wir übernehmen jetzt wieder alle Bezeichnungen aus dem Abschnitt 2. Nach Satz 2.1 handelt es sich um die Menge $\mathfrak{M}_a$ aller derjenigen zu a primen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von k, die für keine Primzahl $q \nmid p$ zur Menge (K_q) gehören, die also für jede Primzahl $q \nmid p$ zur Komplementärmenge

$$(k) - (K_q)$$

gehören. Da es für die Existenz und den Wert der Dichte auf endlich viele $\mathfrak{p}$ nicht ankommt, kann von der Beschränkung auf zu a prime $\mathfrak{p}$ abgesehen werden. An Stelle der Menge $\mathfrak{M}_a$ haben wir also einfach den Durchschnitt

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_a^* = \underset{q}{\triangle} \, [(k) - (K_q)]$$

auf das Vorhandensein einer Dichte und deren Wert zu untersuchen.

Sei q_ν die irgendwie geordnete Folge aller Primzahlen $q \nmid p$, und sei

$$m_n = \prod_{\nu=1}^{n} q_\nu,$$

$$\text{(11)} \qquad \mathfrak{M}_n = \underset{\nu \leqq n}{\triangle} \, [(k) - (K_{q_\nu})].$$

Dann ist

$$\mathfrak{M}^* = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_n.$$

Beachten wir, daß für irgendwelche galoisschen Körper $K, K', \ldots$ über k

$$(K K' \ldots) = \triangle \, [(K), (K'), \ldots]$$

ist, so sieht man aus (11) rein kombinatorisch die folgenden Tatsachen ein, in denen die algebraischen Mengensummen einschließlich der Vielfachheit der Elemente verstanden sind:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_n &= (k) - \sum_{\nu \leqq n} (K_{q_\nu}) + \sum_{\nu < \nu' \leqq n} \triangle [(K_{q_\nu}), (K_{q_{\nu'}})] \\
&\quad - + \ldots + (-1)^n \triangle [(K_{q_1}), \ldots, (K_{q_n})] \\
&= (k) - \sum_{\nu \leqq n} (K_{q_\nu}) + \sum_{\nu < \nu' \leqq n} (K_{q_\nu} K_{q_{\nu'}}) \qquad (12.1) \\
&\quad - + \ldots + (-1)^n (K_{q_1} \ldots K_{q_n}) \\
&= \sum_{m \mid m_n} \mu(m)\,(K_m);
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}_n \geqq \mathfrak{M}_{n+1}; \quad \mathfrak{M}_n \geqq \mathfrak{M}^*; \tag{13.1}$$

$$0 \leqq \mathfrak{M}_n - \mathfrak{M}^* \leqq \sum_{\nu > n} (K_{q_\nu}). \tag{14.1}$$

Diese Tatsachen übertragen sich auch auf die Häufigkeitsfunktion $w(s, \mathfrak{M}_n)$ und es gelten die entsprechenden Formeln:

$$w(s, \mathfrak{M}_n) = \sum_{m \mid m_n} \mu(m) \cdot w(s, (K_m)); \tag{12.2}$$

$$\begin{aligned}
w(s, \mathfrak{M}_n) &\geqq w(s, \mathfrak{M}_{n+1}), \qquad (13.2)\\
w(s, \mathfrak{M}_n) &\geqq w(s, \mathfrak{M}^*);
\end{aligned}$$

$$0 \leqq w(s, \mathfrak{M}_n) - w(s, \mathfrak{M}^*) \leqq \sum_{\nu > n} w(s, (K_{q_\nu})). \tag{14.2}$$

Aus (12.2) folgt die Existenz und der Wert der Dichten

$$\begin{aligned}
w(\mathfrak{M}_n) &= \lim_{s \to 1+0} w(s, \mathfrak{M}_n) = \sum_{m \mid m_n} \mu(m)\, w((K_m)) \qquad (12.3)\\
&= \sum_{m \mid m_n} \frac{\mu(m)}{n(K_m)} = \sum_{m \mid m_n} \frac{\mu(m)}{m_a \cdot f(m)}.
\end{aligned}$$

Aus (13.2) folgt die Existenz und eine Abschätzung des Grenzwertes

$$\lim_{n \to \infty} w(s, \mathfrak{M}_n) \geqq w(s, \mathfrak{M}^*).$$

U. A. d. R. V. für die $\zeta(s, K_q)$ werden wir in 3.3 *beweisen, daß die Reihe*

$$\sum_q \frac{1}{n(K_q)} \frac{\log \zeta(s, K_q)}{\log \zeta(s, k)} \tag{15}$$

für $s > 1$ konvergiert, sogar gleichmäßig in s in jedem Bereich

$$1 < s \leqq s_0 \quad \textit{mit festem} \quad s_0 > 1.$$

Diese Reihe ist aber nach 3.1 eine Majorante der Reihe

$$\sum_q w(s, (K_q)). \tag{16}$$

Daher folgt aus (14.2) zunächst schärfer

$$\lim_{n \to \infty} w(s, \mathfrak{M}_n) = w(s, \mathfrak{M}^*), \tag{14.3}$$

wobei zunächst nur die gewöhnliche Konvergenz der Reihe (16) ausgenutzt ist[11]). Zufolge der Gleichmäßigkeit der Konvergenz gilt auch (14.3) gleichmäßig in s, und diese Tatsache ergibt zusammen mit (12.3) nach dem sogenannten Doppelgrenzwertsatz der Analysis die Vertauschbarkeit der beiden Grenzübergänge $n \to \infty$ und $s \to 1+0$ und damit die Existenz und den Wert der zu untersuchenden Dichte:

$$\begin{aligned} w(\mathfrak{M}^*) &= \lim_{s \to 1+0} w(s, \mathfrak{M}^*) = \lim_{s \to 1+0} \lim_{n \to \infty} w(s, \mathfrak{M}_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \lim_{s \to 1+0} w(s, \mathfrak{M}_n) = \lim_{n \to \infty} w(s, \mathfrak{M}_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{m \mid m_n} \frac{\mu(m)}{m_a \cdot f(m)} = \sum_{(m,p)=1} \frac{\mu(m)}{m_a \cdot f(m)} \end{aligned}$$

Für die Gültigkeit dieser letztgenannten Reihendarstellung des zuvor erhaltenen Grenzwertes beachte man die in 2.2 aus dem Romanoffschen Satze gefolgerte absolute Konvergenz dieser Reihe.

3.3. Nach 2.2 ist $n(K_q) = q \cdot f(q)$, und K_q hat dabei den Konstantenkörper Ω_q von $p^{f(q)}$ Elementen, außer wenn

(17) $$a \underset{q}{=} \alpha_q \text{ in } k_q \text{ mit } \alpha_q \text{ aus } \Omega_q$$

ist. Daraus folgt durch Normbildung

$$a \underset{q}{=} \alpha \text{ in } k \text{ mit } \alpha \text{ aus } \Omega.$$

Da nach Voraussetzung a nicht bereits in Ω liegt, trifft (17) aber für höchstens endlich viele Primzahlen q zu; diese können für den folgenden Konvergenzbeweis von (15) außer Betracht gelassen werden. Es bleibt also nur zu zeigen, daß die über die nunmehr verbleibenden q erstreckte Reihe

$$\sum_q \frac{1}{q \cdot f(q)} \frac{\log \zeta(s, K_q)}{\log \zeta(s, k)}$$

u. A. d. R. V. für $1 < s \leqq s_0$ mit festem $s_0 > 1$ gleichmäßig in s konvergiert.

Bezeichnet R_q den Körper der rationalen Funktionen über Ω_q, $g(K_q)$ das Geschlecht des Körpers K_q, ω_i die Nullstellen von $\zeta(s, K_q)$ in $p^{f(q)s}$, dann ist[12])

(18) $$\zeta(s, K_q) = \zeta(s, R_q) \cdot L(s, K_q)$$

mit

(19) $$L(s, K_q) = \prod_{i=1}^{2g(K_q)} \left(1 - \frac{\omega_i}{p^{f(q)s}}\right).$$

---

[11]) Herrn Witt verdanke ich die Bemerkung, daß (14.3) auch direkt aus (13.2) und der Beziehung

$$\mathfrak{M}^* = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_n$$

gefolgert werden kann.

[12]) S. Hasse in [6]).

Die Riemannsche Vermutung für $\zeta(s, K_q)$ besagt

$$\omega_i = p^{f(q)/2},$$

wir werden jedoch mit der schwächeren Annahme

$$\omega_i = p^{f(q)(1-\vartheta)} \tag{20}$$

mit einem von q unabhängigen $\vartheta > 0$ (und eo ipso $\leqq 1/2$) auskommen.

Gemäß (18) zerfällt der Beweis für die gleichmäßige Konvergenz von (15) in zwei Teile. Danach ist zu zeigen:

$$\sum_q \frac{1}{q \cdot f(q)} \frac{\log \zeta(s, R_q)}{\log \zeta(s, k)}, \tag{15. 1}$$

$$\sum_q \frac{1}{q \cdot f(q)} \frac{\log L(s, K_q)}{\log \zeta(s, k)} \tag{15. 2}$$

sind für $1 < s \leqq s_0$ gleichmäßig konvergent.

Beweis für (15. 1): Ist R der Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten über Ω, dann ist

$$\frac{1}{q \cdot f(q)} \frac{\log \zeta(s, R_q)}{\log \zeta(s, k)} = \frac{1}{q \cdot f(q)} \frac{\log \zeta(s, R_q)}{\log \zeta(s, R)} \cdot \frac{\log \zeta(s, R)}{\log \zeta(s, k)}. \tag{21}$$

Da $\sum\limits_q (q \cdot f(q))^{-1}$ nach dem Romanoffschen Satze konvergiert, ist es hinreichend, die Beschränktheit der beiden Logarithmenquotienten rechts in (21) für $1 < s \leqq s_0$ und alle Primzahlen q zu beweisen.

Weil jede Zetafunktion > 1 für alle $s > 1$ ist, sind einerseits diese Quotienten sicherlich > 0 für alle $s > 1$ und alle q. Andererseits ist die Zetafunktion von R explizit gegeben durch[13])

$$\zeta(s, R) = \left(1 - \frac{p}{p^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1};$$

$\zeta(s, R_q)$ entsteht aus dieser Formel durch Ersetzen von p durch $p^{f(q)}$. Da durchweg $f(q) \geqq 1$ ist, folgt stets

$$\zeta(s, R_q) \leqq \zeta(s, R),$$

also

$$\log \zeta(s, R_q) \leqq \log \zeta(s, R),$$

und somit wegen der Positivität

$$0 < \frac{\log \zeta(s, R_q)}{\log \zeta(s, R)} \leqq 1$$

für alle $s > 1$ und alle q.

Für den von q unabhängigen letzten Quotienten in (21) gilt

$$\frac{\log \zeta(s, R)}{\log \zeta(s, k)} \to 1 \text{ für } s \to 1 + 0,$$

[13]) S. Hasse in [6]).

also existiert zu $s_0 > 1$ ein positives $c = c(s_0)$ so, daß für alle s mit $1 < s \leqq s_0$

$$\frac{\log \zeta(s, R)}{\log \zeta(s, k)} \leqq 1 + c$$

ist. Damit ist unsere Behauptung für (15.1) bewiesen.

Beweis für (15.2):

Hilfssatz 1: Es ist

$$2\, g(K_q) < q\, r \tag{22}$$

mit von q unabhängigem $r > 0$.

Beweis: Das Geschlecht $g(K_q)$ des Körpers K_q ist gegeben durch[14])

$$2\, g(K_q) = 2\, q\, g(k_q) + 2\, v.$$

Dabei ist v das Relativgeschlecht von K_q/k_q und gegeben durch

$$2\, v = (q-1)\cdot(r_q - 1),$$

wo r_q der Grad bezüglich k_q des Produktes derjenigen Primdivisoren aus k_q ist, die in a mit durch q unteilbarem Exponenten aufgehen. Da k_q aus k durch bloße Konstantenerweiterung hervorgeht, kann r_q auch als die entsprechende Gradsumme in k definiert werden. Daher ist r_q höchstens gleich der von q unabhängigen Gradsumme r' überhaupt aller Primdivisoren von a in k. Ferner ist das Geschlecht gegenüber Konstantenerweiterung invariant, also $g(k_q) = g(k)$. Daraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 2: Sei $\vartheta > 0$. Dann ist

$$\sum_{q \nmid p} \frac{1}{p^{f(q)\vartheta} f(q)} \tag{23}$$

konvergent.

Beweis: Nach Definition von $f(q)$ ist $q \mid p^{f(q)} - 1$ und daher $p^{f(q)} > q$.

I. Sei $p^{f(q)\vartheta} \geqq q$. Dann ist die entsprechende Teilsumme

$$\sum_{\substack{q \nmid p \\ q \leqq p^{f(q)\vartheta}}} \frac{1}{p^{f(q)\vartheta} f(q)} \leqq \sum_{p \nmid q} \frac{1}{q \cdot f(q)}$$

nach dem Romanoffschen Satze konvergent.

II. Sei $q > p^{f(q)\vartheta}$ $(> q^{\vartheta})$. Dann mögen zu einem gegebenen Werte $f(q) = f$ genau $n = n(f)$ verschiedene Primzahlen $q_{\nu_1}, q_{\nu_2}, \ldots, q_{\nu_n}$ gehören. Dann ist auch $q_{\nu_1} \ldots q_{\nu_n} \mid p^f - 1$ und daher $p^f > q_{\nu_1} \ldots q_{\nu_n}$. Da hierbei jedes $q_{\nu_i} > p^{f\vartheta}$ sein soll, folgt $p^f > p^{f\vartheta n}$, also durchweg

$$n(f) < \frac{1}{\vartheta}.$$

Daher wird die Teilsumme

$$\sum_{\substack{q \nmid p \\ q > p^{f(q)\vartheta}}} \frac{1}{p^{f(q)\vartheta} f(q)}$$

---

[14]) Hasse in Crelle 172 (1934), S. 43.

majorisiert durch die konvergente Reihe

$$\frac{1}{\vartheta}\sum_{f=1}^{\infty}\frac{1}{p^{f\vartheta}f} \qquad \left(= \frac{1}{\vartheta}\log\left(1-\frac{1}{p^{\vartheta}}\right)\right).$$

Aus I. und II. folgt die Behauptung.

Für alle $s > 1$ folgt aus (19), der Annahme (20) und dem Hilfssatz 1

$$L(s, K_q) = \prod_{i=1}^{2g(K_q)}\left(1-\frac{\omega_i}{p^{f(q)s}}\right)\begin{cases} \leqq \left(1+\dfrac{p^{f(q)(1-\vartheta)}}{p^{f(q)s}}\right)^{2g(K_q)} < \left(1+\dfrac{1}{p^{\vartheta f(q)}}\right)^{qr} \\ \geqq \left(1-\dfrac{p^{f(q)(1-\vartheta)}}{p^{f(q)s}}\right)^{2g(K_q)} > \left(1-\dfrac{1}{p^{f(q)\vartheta}}\right)^{qr}. \end{cases}$$

Also

$$q\,r\log\left(1-\frac{1}{p^{f(q)\vartheta}}\right) < \log L(s, K_q) < q\,r\log\left(1+\frac{1}{p^{f(q)\vartheta}}\right). \tag{24}$$

Wegen

$$0 < \log\left(1+\frac{1}{p^{f(q)\vartheta}}\right) < \frac{1}{p^{f(q)\vartheta}}$$

und

$$\begin{aligned} 0 < -\log\left(1-\frac{1}{p^{f(q)\vartheta}}\right) &< \frac{1}{p^{f(q)\vartheta}}+\frac{1}{p^{2f(q)\vartheta}}+\dots \\ &\leqq \frac{1}{p^{f(q)\vartheta}}\left(1+\frac{1}{p^{\vartheta}}+\frac{1}{p^{2\vartheta}}+\dots\right) \\ &= \frac{p^{\vartheta}}{p^{\vartheta}-1}\,\frac{1}{p^{f(q)\vartheta}} \end{aligned}$$

folgt aus (24) weiter

$$|\log L(s, K_q)| < r\,\frac{p^{\vartheta}}{p^{\vartheta}-1}\,\frac{q}{p^{f(q)\vartheta}}$$

für alle $s > 1$.

Schließlich existiert wegen $1 < \zeta(s, k) \to \infty$ für $s \to 1$ zu s_0 ein positives $C = C(s_0)$ so, daß für $1 < s \leqq s_0$

$$0 < \frac{1}{\log \zeta(s, k)} \leqq C$$

wird.

Zusammengenommen ergibt sich daraus für $1 < s \leqq s_0$

$$\left|\frac{1}{q\cdot f(q)}\,\frac{\log L(s, K_q)}{\log \zeta(s, k)}\right| < C\,r\,\frac{p^{\vartheta}}{p^{\vartheta}-1}\,\frac{1}{p^{f(q)\vartheta}f(q)}.$$

Nach Hilfssatz 2 ergibt sich hieraus die Behauptung für (15. 2).

4. Wir geben zum Abschluß ein Beispiel, in welchem eine positive Dirichletdichte existiert, aber keine natürliche Dichte.

4. 1. Sei $k = R = \Omega(x)$ der Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten x über dem endlichen Körper Ω von p Elementen. Unser gegebenes Element a setzen wir gleich x. $\mathfrak{M}_x$ sei die Menge der zu x primen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ aus R, für welche x PW $(\mathfrak{p})$ ist.

Dann ist nach (6) die Dirichletdichte der $\mathfrak{M}_x$ gegeben durch

$$w(\mathfrak{M}_x) = \sum_{(m,\,p)=1} \frac{\mu(m)}{m \cdot f(m)};$$

nach (7) ist diese Dichte positiv.

Zum Beweis dieser Tatsache ist keine R.V. nötig, weil hier die Körper

$$K_q = k_q(\sqrt[q]{x}) = \Omega_q(\sqrt[q]{x})$$

sämtlich rational sind und daher durchweg

$$\zeta(s, K_q) = \zeta(s, R_q),$$
$$L(s, K_q) = 1$$

ist, so daß zum Beweis der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (15) nur die gleichmäßige Konvergenz in s für $1 < s \leqq s_0$ der Reihe (15.1) zu zeigen ist.

4.2. Wir sagen, unsere Menge $\mathfrak{M}_x$ besitzt eine natürliche Dichte $W(\mathfrak{M}_x)$, wenn für die relative Häufigkeit

$$(25) \qquad W(n, \mathfrak{M}_x) = \frac{\sum\limits_{\substack{\mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{M}_x \\ \mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq p^n}} 1}{\sum\limits_{\substack{\mathfrak{p} \text{ in } R \\ \mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqq p^n}} 1} = \frac{\pi_x(n)}{\pi(n)}$$

der Grenzwert

$$(26) \qquad W(\mathfrak{M}_x) = \lim_{n \to \infty} W(n, \mathfrak{M}_x)$$

existiert.

Lassen wir noch im Nenner von (25) den sowieso zu x nicht primen Nennerprimdivisor von x beiseite, dann ist $\pi(n)$ einfach die Anzahl aller Primpolynome $P_\nu(x)$ vom Grade $\nu \leqq n$ über Ω. Diese ist bekanntlich

$$\pi(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \sum_{d \mid \nu} \mu(d)\, p^{\frac{\nu}{d}}.$$

Um den Zähler $\pi_x(n)$ zu bestimmen, beachten wir, daß der Restklassenkörper $\Omega(x)$ mod. $P_\nu(x)$ zyklisch vom Grade ν über Ω, also einem endlichen Körper Ω_ν von p^ν Elementen isomorph ist, dessen multiplikative Gruppe zyklisch von der Ordnung $p^\nu - 1$ ist. Ist nun x PW $(P_\nu(x))$, so entspricht x einer der $\varphi(p^\nu - 1)$ Erzeugenden dieser Gruppe, und umgekehrt. $\xi_i, \xi_i^p, \ldots, \xi_i^{p^{\nu-1}}$ seien alle Erzeugenden der zyklischen Gruppe, in Systeme konjugierter aufgeteilt. Diese sind dann Nullstellen von $\frac{\varphi(p^\nu - 1)}{\nu}$ Primpolynomen $P_\nu^{(i)}(x)$ ν-ten Grades $\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{\varphi(p^\nu - 1)}{\nu}\right)$. Jedes $P_\nu(x)$, für welches x PW $(P_\nu(x))$ ist, ist dann eines der Polynome $P_\nu^{(i)}(x)$, und umgekehrt ist jedes $P_\nu^{(i)}(x)$ ein gesuchtes $P_\nu(x)$.

Somit ergibt sich für die Anzahl der Primpolynome ν-ten Grades, für welche x Primitivwurzel ist, der Wert $\frac{1}{\nu}\varphi(p^\nu - 1)$, also

$$\pi_x(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\varphi(p^\nu - 1).$$

Nach (26) ergäbe sich also für die natürliche Dichte der Limes

$$W(\mathfrak{M}_x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\varphi(p^\nu - 1)}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \sum\limits_{d \mid \nu} \mu(d)\, p^{\frac{\nu}{d}}}. \tag{27}$$

4.3. Man sieht fast unmittelbar, daß dieser Limes nicht existiert[15]).

I. Bezeichnet $\tau(\nu)$ die Anzahl der positiven Teiler von ν, dann gilt für den Nenner in (27)

$$\pi(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} p^\nu + O\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\tau(\nu)\, p^{\frac{\nu}{2}}\right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} p^\nu + O\left(p^{\frac{n}{2}+\varepsilon}\right) = \frac{p^n}{n}\left(1 - \frac{1}{p}\right) + o\left(\frac{p^n}{n}\right).$$

II. Für den Zähler geben wir zwei unendliche Teilfolgen, welche, durch den Nenner dividiert, verschiedenen Grenzwerten zustreben:

II. a) Sei $Q > 0$ und werde

$$n = \prod_{\substack{q \leqq Q \\ q \nmid p}} f(q)$$

gesetzt, dann ist für $q \leqq Q$, $q \nmid p$

$$q \mid p^n - 1,$$

also

$$\varphi(p^n - 1) \leqq (p^n - 1) \cdot \prod_{\substack{q \leqq Q \\ q \nmid p}} \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Wächst Q über alle Grenzen, dann gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\varphi(p^\nu - 1) = o\left(\frac{p^n}{n}\right).$$

II. b) Durchläuft n die Folge der Primzahlen, dann ist

$$\varphi(p^n - 1) = (p^n - 1) \prod_{f(q)=1} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \prod_{f(q) = \text{Primzahl}} \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

[15]) Diesen kurzen Beweis verdanke ich einer schriftlichen Mitteilung von Herrn Davenport vom September 1936.

Das erste Produkt ist sicherlich endlich und ungleich 0. Das zweite unendliche Produkt konvergiert aber nach dem Romanoffschen Satz; daraus folgt dann bloß

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\,\varphi(p^\nu - 1) = O\left(\frac{p^n}{n}\right), \quad \text{aber} \quad \neq o\left(\frac{p^n}{n}\right).$$

5. Um die Artinsche Überlegung für den in 1. angeführten Fall eines algebraischen Zahlkörpers k zu beweisen, reicht es nach dem Schema in Abschnitt 3. hin, die gleichmäßige Konvergenz in s für $1 < s \leqq s_0$ der Reihe

$$(15') \qquad \sum_{q} \frac{1}{n(K_q)} \frac{\log \zeta(s, K_q)}{\log \zeta(s, k)}$$

zu zeigen, wo jetzt für fast alle q gilt

$$n(K_q) = q \cdot (q-1).$$

Als naturgemäßer Ansatz für diesen Beweis ergibt sich aus der Analogie mit dem in 3. 3 behandelten Fall eines algebraischen Funktionenkörpers die Heranziehung der Weierstraßschen Produktzerlegung für die $\zeta(s, K_q)$. Bisher ist es jedoch nicht gelungen, auf diesem Wege zum Ziel zu kommen.

Göttingen, am 15. Januar 1937.

(Eingegangen am 23. 1. 1937.)

Elementarteilertheorie unendlicher Matrizen.

Von

Helmut Ulm in Münster (Westf.) *).

In dieser Arbeit wird eine Elementarteilertheorie unendlicher zeilenfiniter Matrizen aufgestellt, d. h. es werden die Bedingungen untersucht, unter denen zwei zeilenfinite Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit Koeffizienten aus einem Körper K durch eine zeilenfinite Matrix $\mathfrak{P}$ mit eindeutiger zeilenfiniter Reziproken ineinander transformierbar sind: $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{P}$. Das Problem, Bedingungen für die so definierte Ähnlichkeit der Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu finden, hängt aufs engste mit dem Problem zusammen, die Typen nichtisomorpher abzählbar-unendlicher abelscher Gruppen zu bestimmen. Nach Definition der Zuordnung einer abelschen Gruppe einerseits und einer zeilenfiniten Matrix andererseits (Definition 1) erhält man das Resultat, daß zwei Matrizen dann und nur dann ähnlich sind, wenn die ihnen zugeordneten Gruppen isomorph sind (Satz 3). Eine wichtige Invariante ähnlicher Matrizen ist das Spektrum, d. h. die Menge derjenigen Werte λ, für die die Matrizenschar $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ keine eindeutige Reziproke besitzt. Es wird gezeigt, daß das Spektrum einer zeilenfiniten Matrix entweder abzählbar ist, oder daß alle λ-Werte bis auf höchstens abzählbar viele zum Spektrum gehören. Diesen beiden verschiedenen Typen des Spektrums entsprechen abelsche Gruppen, die nur Elemente endlicher Ordnung enthalten, bzw. solche, die mindestens ein Element unendlicher Ordnung enthalten.

In § 2 werden dann Normalformen für die Klassen ähnlicher Matrizen, die ein abzählbares Spektrum besitzen, aufgestellt. Hierzu wird die bekannte Theorie der abzählbar-unendlichen abelschen Gruppen, die nur Elemente endlicher Ordnung enthalten, herangezogen. Es ist nicht mehr wie im Falle endlicher Matrizen möglich, jeder Matrizenklasse eine eindeutig bestimmte Normalform zuzuordnen. Vielmehr gibt es zu jeder Klasse unendlich viele Normalformen, aus denen aber sofort eindeutig die Invarianten der betreffenden Klasse ablesbar sind und die also untereinander ähnlich sind.

---

*) Habilitationsschrift, angenommen von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Münster.

§ 1.

Abelsche Gruppen und Elementarteilertheorie.

Im folgenden sollen abelsche Gruppen mit dem Operatorenbereich $K[\lambda]$, d. h. dem Ring aller Polynome $h(\lambda)$ über dem Körper der komplexen Zahlen (oder einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper), betrachtet werden. In der Gruppe soll ein abzählbares Erzeugendensystem (im folgenden abgekürzt E. S.) existieren, d. h. ein System von Gruppenelementen $\mathfrak{x} = (x_k)$ derart, daß sich jedes Element der Gruppe in der Form

$$x = \sum_k a_k x_k$$

darstellen läßt, wo die a_k in $K[\lambda]$ liegen und unter Σ wie immer in dieser Arbeit eine endliche Summe zu verstehen ist, d. h. nur endlich viele a_k sind von Null verschieden. Da nur abelsche Gruppen mit dem angegebenen Operatorenbereich und höchstens abzählbarem E. S. in dieser Arbeit betrachtet werden, reden wir im folgenden einfach von „Gruppen", ein Zusatz „abzählbar" soll sich immer auf das E. S., nicht auf die Mächtigkeit der Gruppe beziehen. Die Gruppen werden additiv geschrieben.

Frobenius[1]) hat einer abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ wie folgt eine Matrix zugeordnet: Gegeben sei ein E. S. $\mathfrak{x} = (x_k)$, dann bilden alle Darstellungen des Nullelementes der Gruppe durch dieses E. S. einen Linearformenmodul $\mathfrak{N}$. Aus diesem sei eine Basis $\mathfrak{y} = (y_i) = \sum\limits_k a_{ik} x_k = 0$ ausgewählt. Die Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ heiße „Frobeniusmatrix" der Gruppe $\mathfrak{G}$ (abgekürzt: F-Matrix von $\mathfrak{G}$). Sie ist im allgemeinen eine unendliche zeilenfinite Matrix, d. h. eine unendliche Matrix, die in jeder Zeile höchstens endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten enthält. $\mathfrak{G}$ ist isomorph dem Restklassenmodul des Moduls aller (d. h. aller endlichen) Linearformen $\mathfrak{M}$ nach $\mathfrak{N}$. Übe ich auf $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ unimodulare zeilenfinite Transformationen aus, d. h. Transformationen, deren Koeffizientenmatrizen auch eindeutige zeilenfinite Reziproken mit Koeffizienten in $K[\lambda]$ haben, so geht $\mathfrak{A}$ über in

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{Q},$$

wo

$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}^{-1} = \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$$

ist.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ heißen äquivalent: $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}'$. Da durch jede zeilenfinite Matrix $\mathfrak{A}$ mit Koeffizienten aus $K[\lambda]$ — es werden nur solche vorkommen

[1]) Frobenius-Stickelberger, Über Gruppen mit vertauschbaren Elementen Journ. reine angew. Math. 86, S. 217—262. Es werden dort nur endliche Gruppen betrachtet.

und wir sagen daher abgekürzt: Matrix — eine Gruppe $\mathfrak{G}$ bestimmt ist, nämlich, wenn wir $\mathfrak{A}$ als F-Matrix einer Gruppe $\mathfrak{G}$ auffassen, folgt sofort, daß zu äquivalenten Matrizen isomorphe Gruppen gehören. Da aber ein beliebiges, von $\mathfrak{x}$ verschiedenes E. S. $\mathfrak{x}^*$ nicht durch eine unimodulare Transformation aus $\mathfrak{x}$ hervorzugehen braucht, läßt sich die Umkehrung nicht so einfach schließen[2]). Sie ist aber für endliche E. S. mit gleicher Erzeugendenzahl richtig, für unendliche E. S. nur unter gewissen Voraussetzungen[3]).

Wir werden daher statt des bisher betrachteten beliebigen E. S. ein spezielles, reduziertes E. S. genannt, einführen.

Definition 1. $\mathfrak{x} = (x_k)$ heiße ein reduziertes Erzeugendensystem (= r. E. S.) der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn die Gleichungen

$$y_i = (\lambda + \lambda_i)\,x_i + \sum_{k<i} a_{ik}\,x_k = 0,$$

wo i, k die gleiche geordnete (im allgemeinen aber nicht wohlgeordnete) Indexmenge durchlaufen, eine Basis des Moduls $\mathfrak{R}$ bilden. Die λ_i und a_{ik} sind Elemente aus K, deren für festes i nur endlich viele von Null verschieden sind.

Es soll nun gezeigt werden, daß für jede Gruppe ein r. E. S. existiert.

Satz 1. *Ist $\mathfrak{G}$ eine abzählbare abelsche Gruppe, so existiert in $\mathfrak{G}$ ein r. E. S.*

Beweis: (Konstruktion des r. E. S.) x'_l, x''_m (l, m durchlaufen die natürlichen Zahlen oder endliche Teilmengen davon) sei ein E. S. von $\mathfrak{G}$ derart, daß die x'_l in bezug auf $K[\lambda]$ unabhängig sind und ferner jedes x''_m von ihnen abhängig ist. Ein solches E. S. läßt sich sofort auswählen. Ich füge jetzt weitere Gruppenelemente x_{lj} mit folgenden Relationen zu diesem E. S. hinzu:

$$x'_l = x_{l1}, \quad z_{l1} = x_{l2} + \lambda x_{l1} = 0, \quad z_{l2} = x_{l3} + \lambda x_{l2} = 0, \; \ldots .$$

Da die x'_l unabhängig sind, bilden dann die Relationen

$$z_{lj} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

eine Basis für alle zwischen den x_{lj} bestehenden Relationen.

Ich kann ferner annehmen, daß die x''_m bereits so ausgewählt sind, daß x''_m nicht in der von

$$\{x_{lj},\, x''_1,\, x''_2,\, \ldots,\, x''_{m-1}\}$$

---

[2]) Einige in der Literatur vorkommende Beweise, die nicht die volle Elementarteilertheorie voraussetzen, enthalten an entscheidender Stelle Lücken. K. Shoda, Proc. Imp. Acad. Jap. 6 (1930), S. 217—219 und M. Tazawa, ebenda 9 (1933), S. 468—471.

[3]) Man müßte hier den Äquivalenzbegriff erweitern, wie dies in der Arbeit des Verf., Math. Annalen 107, S. 774, oder wie dies in der Arbeit von W. Alexander, Annals of Math. 35 (1934), S. 130, geschehen ist.

erzeugten Gruppe liegt, hingegen $(\lambda + \lambda_m) x''_m$ in dieser Gruppe enthalten ist (λ_m in K); durch Hinzufügung geeigneter Vielfachen der x''_m zum E. S. läßt sich dies erreichen. Für jedes Element x''_m besteht dann eine Relation der Form

$$z''_m = (\lambda + \lambda_m) x''_m + \sum_{r=1}^{m-1} c_{m r} x''_r + \sum_{lj} b_{m l j} x_{l j} = 0,$$

wo die Summe $\sum_{lj}$ endlich ist. Durch Hinzufügung geeigneter Vielfachen der Relationen $z''_1, \ldots, z''_{m-1}$ läßt sich erreichen, daß die $c_{m r}$ Polynome nullten Grades in λ sind, ebenso unter Benutzung der Relationen $z_{l j}$, daß die $b_{m l j}$ in K liegen.

Ordne ich jetzt die $x_{l j}$ und x''_m derart, daß die $x_{l j}$ vor den x''_m stehen, ferner daß $x_{l j}$ vor $x_{l' j'}$ steht, wenn $l > l'$, und für $l = l'$, daß $x_{l j}$ vor $x_{l j'}$ steht, wenn $j > j'$ ist, ferner daß x''_m vor $x''_{m'}$ steht, wenn $m < m'$ ist, so ist $x_{l j}$, x''_m mit den analog geordneten Relationen $z_{l j}$, z''_m ein Definition 1 genügendes r. E. S.

Um schließlich noch die gleiche Bezeichnungsweise wie in Definition 1 zu haben, lasse ich den Index k von x_k eine geordnete Menge vom gleichen Typus durchlaufen, wie die eben angegebene der $x_{l j}$, x''_m — deren Typus $(\omega^2)^* + \omega$ oder ein Teil davon ist — und definiere zwischen den x_k die gleichen und in gleicher Weise angeordneten Relationen z_i (i durchläuft also auch die Menge $(\omega^2)^* + \omega$) wie die Relationen $z_{l j}$, z''_m zwischen den $x_{l j}$, x''_m.

Nenne ich schließlich eine zeilenfinite Matrix $\mathfrak{A}$ mit Koeffizienten aus K „regulär", wenn $a_{ik} = 0$ für $i < k$, so läßt sich Satz 1 auch wie folgt aussprechen:

Satz 1*. *Zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt es ein r. E. S. $\mathfrak{x} = (x_k)$ derart, daß eine zu diesem E. S. gehörende F-Matrix die Form $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ hat, wo $\mathfrak{A}$ eine reguläre zeilenfinite Matrix mit Koeffizienten aus K, und $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix ist. Die Matrixindizes i, k durchlaufen im allgemeinen Mengen vom Typus $(\omega^2)^* + \omega$. (Oder beide Indizes die gleiche Teilmenge davon.)*

Dann gilt der Satz:

Satz 2. *Sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ abzählbare abelsche Gruppen mit den zugehörigen F-Matrizen*

$$\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{A}' + \lambda\mathfrak{E},$$

so sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ dann und nur dann isomorph, wenn $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A}' + \lambda\mathfrak{E}$ äquivalent sind[4]).

Beweis: a) Gilt

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E})\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}' + \lambda\mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}^{-1} = \mathfrak{E},$$

[4]) Für ein r. E. S. sind die in Anm. [3]) erwähnten Erweiterungen des Äquivalenzbegriffes nicht erforderlich.

so vermittelt die in $K[\lambda]$ invertierbare Matrix $\mathfrak{Q}$ eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'$.

b) Ist $\mathfrak{G}$ isomorph auf $\mathfrak{G}'$ abgebildet, so werden den Elementen $\mathfrak{x} = (x_k)$ die Elemente $\mathfrak{P}'\mathfrak{x}'$ zugeordnet, wo die $\mathfrak{x}'$ ein r. E. S. von $\mathfrak{G}'$ bilden und wo $\mathfrak{P}'$ eine zeilenfinite Matrix mit Koeffizienten aus $K[\lambda]$ ist, die aber im allgemeinen keine Reziproke zu haben braucht. Werden umgekehrt den Elementen $\mathfrak{x}'$ die Elemente $\mathfrak{Q}'\mathfrak{x}$ zugeordnet, so braucht im allgemeinen nur zu gelten

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}' = \mathfrak{E} + \mathfrak{W}(\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}).$$

Ersetze ich aber $\mathfrak{P}'$ durch $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \mathfrak{V}(\mathfrak{A}' + \lambda\mathfrak{E})$, so gilt $\mathfrak{P}\mathfrak{x}' = \mathfrak{P}'\mathfrak{x}'$. Bestimme ich nun — was immer möglich ist — in

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \mathfrak{V}(\mathfrak{A}' + \lambda\mathfrak{E}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}' + \mathfrak{U}(\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E})$$

die Matrizen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ so, daß $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ Matrizen mit Elementen aus K werden, so folgt wegen

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{E} + \mathfrak{W}'(\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}),$$

daß $\mathfrak{W}' = 0$, also

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$$

ist.

Analog folgt für diese Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, daß $\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ ist.

Es gilt somit $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E})\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}' + \lambda\mathfrak{E}$, wo $\mathfrak{P}^*$ eine in $K[\lambda]$ invertierbare Matrix ist. Da die Koeffizienten von $\mathfrak{Q}$ in K liegen, folgt $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{Q}^{-1}$.

Definition 2. Zwei zeilenfinite Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ mit Koeffizienten aus K heißen ähnlich, wenn es eine zeilenfinite Matrix $\mathfrak{P}$ mit Koeffizienten aus K und einer zeilenfiniten Reziproken $\mathfrak{P}^{-1}$ gibt, so daß

$$\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{A}'$$

ist. Der Beweis von Satz 2 liefert dann auch sofort den Satz:

Satz 3. *Die zeilenfiniten Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ mit Koeffizienten aus K sind dann und nur dann ähnlich, wenn die zu den F-Matrizen $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A}' + \lambda\mathfrak{E}$ gehörigen Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ isomorph sind.*

Satz 3 zeigt also, daß das Ähnlichkeitsproblem zeilenfiniter Matrizen äquivalent ist dem Strukturproblem abzählbarer abelscher Gruppen. Mit einer Lösung des Strukturproblems würde man auch sofort das Ähnlichkeitsproblem gelöst haben. Da eine umfangreiche Klasse abelscher Gruppen[5]) — nämlich die Klasse der Gruppen, in denen zu jedem Element x ein Polynom $h(\lambda)$ existiert mit $h(\lambda)x = 0$, wir sagen dann auch, das Element x

[5]) Die Sätze 7 und 9 sind in der unter Anm. [3]) zitierten Arbeit des Verfassers erstmalig bewiesen. Später dann rein gruppentheoretisch von L. Zippin in Ann. of Math. 36 (1935), S. 86. In beiden Fällen handelt es sich zwar um gewöhnliche abelsche Gruppen; die erforderliche Verallgemeinerung ist aber trivial. Vgl. ferner eine demnächst erscheinende Arbeit des Verfassers.

hat endliche Ordnung — ihrer Struktur nach bekannt sind, wird im § 2 dieser Arbeit für die zu diesen Gruppen gehörigen F-Matrizen $\mathfrak{A}+\lambda\mathfrak{E}$ das Ähnlichkeitsproblem gelöst werden, d. h. es werden Normalformen für die Klassen der Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{P}=\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{P}$ variabel) aufgestellt werden.

Vorher wollen wir aber diese Matrizen noch in anderer Weise charakterisieren.

$\mathfrak{A}$ sei wieder eine zeilenfinite Matrix mit Koeffizienten aus K. Dann sei unter dem Spektrum der Matrix $\mathfrak{A}$ folgendes verstanden:

Definition 3. Die Gesamtheit der Werte λ, für die die Matrix $\mathfrak{A}+\lambda\mathfrak{E}$ keine eindeutige Reziproke besitzt, heiße das Spektrum der Matrix $\mathfrak{A}$.

Bekanntlich hat eine endliche Matrix nur endlich viele, nämlich höchstens n, wenn n die Zeilenzahl der quadratischen Matrix $\mathfrak{A}$ ist, Spektralwerte λ. Bei abzählbaren Matrizen braucht jedoch die Anzahl der Spektralwerte keine abzählbare Menge zu bilden, wie etwa von den Hilbertschen beschränkten Matrizen her bekannt ist. Wir wollen jetzt folgenden für zeilenfinite Matrizen bemerkenswerten Satz beweisen:

Satz 4. *Eine abzählbare zeilenfinite Matrix $\mathfrak{A}$ mit Koeffizienten aus K bezitzt als Spektrum: entweder höchstens abzählbar viele Werte λ aus K oder alle Elemente aus K mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen.*

Beweis. Da ähnliche Matrizen das gleiche Spektrum haben, und es nach Satz 1 zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ ein r. E. S. gibt, kann ich nach Satz 3 annehmen, daß die Matrix $\mathfrak{A}$ so gebildet ist, wie im Beweis von Satz 1 angegeben. $\mathfrak{A}$ hat also folgende Form:

$$\mathfrak{A}=\begin{vmatrix} . & . & . & . & . \\ . & \mathfrak{A}_3 & 0 & 0 & 0 \\ . & 0 & \mathfrak{A}_2 & 0 & 0 \\ . & 0 & 0 & \mathfrak{A}_1 & 0 \\ . & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{A}_0 \end{vmatrix},$$

wo für $i>0$

$$\mathfrak{A}_i=\begin{vmatrix} . & . & . & . & . \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

und

$$\mathfrak{A}_0=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & . \\ a_{21} & \lambda_2 & 0 & 0 & . \\ a_{31} & a_{32} & \lambda_3 & 0 & . \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \lambda_4 & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

und $\mathfrak{B}_i$ zeilenfinite Matrizen sind. Speziell kann es natürlich auch so sein, daß nur endlich viele Matrizen $\mathfrak{A}_i$ oder gar keine in $\mathfrak{A}$ vorkommen, also daß in letzterem Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$ ist. Ferner ist es möglich, daß die Matrix $\mathfrak{A}_0$ eine endliche quadratische Matrix ist oder auch völlig fehlt.

Wir betrachten jetzt die folgenden zwei Fälle.

a) $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$,

b) In $\mathfrak{A}$ kommt wenigstens eine Matrix $\mathfrak{A}_i$ mit $i > 0$ vor.

a) $\mathfrak{A}_0 + \lambda\mathfrak{E}$ hat offensichtlich nur für die Werte λ keine Reziproke, für die $\lambda + \lambda_i$ für mindestens ein i verschwindet. Für alle anderen Werte λ, für die also $\lambda + \lambda_i \neq 0$ für jedes i, läßt sich die Reziproke bestimmen. Dies geschieht etwa derart, daß man sukzessive die erste, zweite, dritte, ... Zeile einer Matrix $\overline{\mathfrak{A}}$ aus $\mathfrak{E} = (\mathfrak{A}_0 + \lambda\mathfrak{E})\overline{\mathfrak{A}}$ bestimmt. Da $\overline{\mathfrak{A}}$ ebenfalls zeilenfinit wird und jeder Koeffizient sich eindeutig bestimmt, gilt auch $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_0 + \lambda\mathfrak{E}) = \mathfrak{E}$.

b) Ich behandle zunächst den Fall, daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ ist, und behaupte, daß dann $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ für kein λ eine eindeutige Reziproke hat. Zunächst für $\lambda = 0$ enthält die letzte Spalte von $\mathfrak{A}$ nur Nullen, also kann $\mathfrak{A}$ keine vordere Reziproke haben. Im Falle $\lambda \neq 0$ lassen sich sukzessive eindeutig die letzte, vorletzte, drittletzte, ... Zeile einer Matrix $\overline{\mathfrak{A}}$ mit $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}) = \mathfrak{E}$ bestimmen, wo λ beliebig, aber ungleich Null ist. Da aber, wie sich aus der Ausrechnung unmittelbar ergibt, alle Koeffizienten der letzten Zeile von $\overline{\mathfrak{A}}$ von Null verschieden sind, ist $\overline{\mathfrak{A}}$ nicht zeilenfinit. Es existiert also zu $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ keine vordere zeilenfinite Reziproke, d. h. auch jedes $\lambda \neq 0$ gehört zum Spektrum.

Besteht $\mathfrak{A}$ aus endlich oder unendlich vielen Matrizen $\mathfrak{A}_i$ $(i > 0)$ — also $\mathfrak{A}_0$ und damit die $\mathfrak{B}_i$ sollen nicht vorkommen —, so kann $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ nur dann eine Reziproke haben, wenn jedes $\mathfrak{A}_i + \lambda\mathfrak{E}$ eine solche hat; da das nicht zutrifft, kann $\mathfrak{A}$ keine Reziproke haben, und unser Satz ist auch für diesen Fall bewiesen.

Es bleibt also nur noch der Fall zu diskutieren, daß sowohl $\mathfrak{A}_i$ mit $i > 0$ wie $\mathfrak{A}_0$ in $\mathfrak{A}$ vorkommen. Da, wie unter a) gezeigt, für $\lambda + \lambda_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ die Matrix $\mathfrak{A}_0 + \lambda\mathfrak{E}$ eine Reziproke hat, so müßte, wenn $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ eine Reziproke für $\lambda + \lambda_i \neq 0$ hätte, auch

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathfrak{A}_3 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & \mathfrak{A}_2 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & \mathfrak{A}_1 & 0 \\ \cdot & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{E} \end{vmatrix}$$

und damit auch

$$\mathfrak{A}^* = \begin{vmatrix} . & . & . & . & . \\ . & \mathfrak{A}_3 & 0 & 0 & 0 \\ . & 0 & \mathfrak{A}_2 & 0 & 0 \\ . & 0 & 0 & \mathfrak{A}_1 & 0 \\ . & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{E} \end{vmatrix}$$

eine Reziproke haben. Da die $\mathfrak{A}_i$ aber keine haben, so hat auch $\mathfrak{A}^*$ und damit $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ keine für $\lambda + \lambda_i \neq 0$. In diesem Fall besteht also das Spektrum aus allen Werten λ, höchstens bis auf die höchstens abzählbar vielen Werte $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, \ldots$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Im Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$ folgt aber für das zur k-ten Spalte von $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ gehörige Element x_k des E. S. von $\mathfrak{G}$, daß ein Polynom höchstens k-ten Grades $h(\lambda)$ existiert, mit $h(\lambda)x_k = 0$. Existiert ein solches Polynom, so sagten wir, x_k hat endliche Ordnung. Da alle Elemente des E. S. endliche Ordnung haben, hat überhaupt jedes Element aus $\mathfrak{G}$ endliche Ordnung.

Enthält aber $\mathfrak{A}$ auch nur eine Matrix der Form $\mathfrak{A}_i$, so folgt aus dem Beweise von Satz 1, daß die zu $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ gehörige Gruppe $\mathfrak{G}$ Elemente unendlicher Ordnung, d. h. Elemente x enthält, zu denen es kein Polynom $h(\lambda)$ mit $h(\lambda)x = 0$ gibt. Es gilt somit der Satz:

Satz 5. *Ist $\mathfrak{A}$ eine zeilenfinite Matrix mit Koeffizienten aus K, so sind folgende Aussagen gleichwertig: $\mathfrak{A}$ hat ein abzählbares Spektrum: Die zu $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ gehörige Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält nur Elemente endlicher Ordnung. $\mathfrak{A}$ hat alle λ bis auf höchstens abzählbar viele zum Spektrum: $\mathfrak{G}$ enthält mindestens ein Element unendlicher Ordnung.*

§ 2.

Elementarteilertheorie zeilenfiniter Matrizen, die lediglich ein abzählbares Spektrum besitzen.

In diesem Paragraphen werden wir einerseits aus den Sätzen des vorigen Paragraphen, andererseits aus den bereits bekannten Sätzen über die Struktur abzählbarer abelscher Gruppen, die nur Elemente endlicher Ordnung enthalten, die volle Elementarteilertheorie derjenigen zeilenfiniten Matrizen ableiten, die nur ein abzählbares Spektrum besitzen.

Nach Satz 5 enthält die zu einer zeilenfiniten Matrix mit abzählbarem Spektrum gehörige Gruppe $\mathfrak{G}$ nur Elemente endlicher Ordnung. Wir müssen daher im folgenden einiges über die Struktur dieser Gruppen anführen.

Satz 6. *Hat in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ jedes Element endliche Ordnung, so ist $\mathfrak{G}$ direkte Summe von primären Gruppen $\mathfrak{G}_i$, d. h. Gruppen $\mathfrak{G}_i$, deren jedes Element als Ordnung eine Potenz von $\lambda + \lambda_i$ hat.* ($\lambda_i \neq \lambda_k$ *für* $i \neq k$.)

Der Beweis ist bekannt und ergibt sich ohne weiteres aus der Tatsache, daß die Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Ordnungen Potenzen von $\lambda + \lambda_i$ sind, eine eindeutig bestimmte Untergruppe von $\mathfrak{G}$ bilden. Dieser Satz gilt im Gegensatz zu den weiteren Aussagen über primäre Gruppen für beliebige Mächtigkeit der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Wir können uns nunmehr im folgenden auf primäre Gruppen beschränken und führen den von Prüfer stammenden Begriff des Höhenexponenten ein.

Definition 4. Ein Element x einer primären zu $\lambda + \lambda_0$ gehörigen Gruppe $\mathfrak{G}$ hat den Höhenexponenten n, wenn die Gleichung $x = (\lambda + \lambda_0)^n y$ durch ein Element y aus $\mathfrak{G}$ lösbar ist, die Gleichung $x = (\lambda + \lambda_0)^{n+1} y$ aber unlösbar ist. Ist die Gleichung $x = (\lambda + \lambda_0)^n y$ für jeden Exponenten n lösbar, so hat x den Höhenexponenten ∞.

Da die Menge aller Elemente von unendlichem Höhenexponenten in $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\mathfrak{H}^1_\infty$ bilden, kann ich durch transfinite Induktion definieren:

Definition 5. $\mathfrak{H}^0_\infty = \mathfrak{G}$. Ist die Ordnungszahl α Nichtlimeszahl, so sei $\mathfrak{H}^\alpha_\infty$ die Untergruppe aller Elemente von unendlichem Höhenexponenten in $\mathfrak{H}^{\alpha-1}_\infty$. Ist α Limeszahl, so sei $\mathfrak{H}^\alpha_\infty$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{H}^\beta_\infty$ mit $\beta < \alpha$.

Setzen wir nunmehr abzählbare Mächtigkeit für das E. S. der primären Gruppe $\mathfrak{G}$ voraus, so folgt, daß es eine abzählbare Ordnungszahl τ gibt mit $\mathfrak{H}^\tau_\infty = \mathfrak{H}^{\tau+1}_\infty$. Da dann nach Definition 5 bereits jedes Element von $\mathfrak{H}^\tau_\infty$ in $\mathfrak{H}^\tau_\infty$ unendlichen Höhenexponenten hat, gilt $\mathfrak{H}^\tau_\infty = \mathfrak{H}^{\tau+1}_\infty = \mathfrak{H}^{\tau+2}_\infty = \ldots$. Die Zahl τ ist also eine Invariante von $\mathfrak{G}$.

Der folgende Satz gibt uns nunmehr einen vollständigen Überblick über die Struktur der primären Gruppe $\mathfrak{G}$.

Satz 7. *Zwei primäre Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ sind dann und nur dann isomorph, wenn für jede Ordnungszahl α*

$$\mathfrak{H}^\alpha_\infty / \mathfrak{H}^{\alpha+1}_\infty \quad \textit{isomorph} \quad \mathfrak{H}'^\alpha_\infty / \mathfrak{H}'^{\alpha+1}_\infty,$$

und

$$\mathfrak{H}^\tau_\infty \qquad \textit{isomorph} \quad \mathfrak{H}'^\tau_\infty$$

ist[6]).

Die Invarianten der allgemeinsten primären abzählbaren abelschen Gruppen sind also bereits durch die von $\mathfrak{H}^\tau_\infty$ und $\mathfrak{H}^\alpha_\infty / \mathfrak{H}^{\alpha+1}_\infty$ bestimmt. Es gilt aber der Satz:

---

[6]) Vgl. Anm. [5]).

Satz 8. *Die Gruppen $\mathfrak{H}_\infty^\alpha/\mathfrak{H}_\infty^{\alpha+1}$, die für jedes α nur Elemente von endlichem Höhenexponenten*[7]) *enthalten, sind direkte Summe von zyklischen Gruppen, deren erzeugende Elemente die Ordnung $(\lambda+\lambda_0)^n$, wo $n = 1, 2, 3, \ldots$, haben. Die Invarianten einer solchen Gruppe sind die Anzahlen der Zyklen vom Typus $(\lambda+\lambda_0)^n$ für jedes n. Die Gruppe $\mathfrak{H}_\infty^\tau$, die nur Elemente von unendlichem Höhenexponenten in $\mathfrak{H}_\infty^\tau$ enthält, ist direkte Summe von zyklischen Gruppen vom Typus*[8]) *$(\lambda+\lambda_0)^\infty$; die Invariante ist die Anzahl der Zyklen vom Typus $(\lambda+\lambda_0)^\infty$. Außerdem ist $\mathfrak{H}_\infty^\tau$ direkter Summand von $\mathfrak{G}$.*

Daß eine Gruppe, die keine oder nur Elemente von unendlichem Höhenexponenten enthält, in eine direkte Summe von Zyklen zerlegbar ist, bewies schon Prüfer[9]).

Wenn wir nunmehr Normalformen für alle nichtähnlichen zeilenfiniten Matrizen aufstellen wollen, brauchen wir außer den obigen Sätzen 7 und 8 noch einen Existenzsatz, d. h. einen Satz, der eine Aussage darüber macht, daß zu einem vorgegebenen System von Invarianten auch eine primäre abelsche Gruppe gehört, deren Unter- bzw. Faktorgruppen $\mathfrak{H}_\infty^\tau$ und $\mathfrak{H}_\infty^\alpha/\mathfrak{H}_\infty^{\alpha+1}$ diese Invarianten aufweisen.

Da nach Satz 8 $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_\infty^\tau \oplus \mathfrak{H}$ ist, genügt es wegen Anm. [8]), die Existenz von $\mathfrak{H}$ zu beweisen. Nach Satz 8 und Definition 5 gilt für die Gruppe $\mathfrak{H}$ bei entsprechender Bezeichnungsweise $\mathfrak{H}_\infty^\tau = 0$. Es gilt nun der Satz:

Satz 9. *Ist $N = N(\alpha, n)$, wo $0 \leqq \alpha < \tau$ und $0 < n < \omega$ ist, eine endliche Kardinalzahl oder gleich $\aleph_0$, so gibt es dann und nur dann eine primäre abzählbare abelsche Gruppe $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}_\infty^\tau = 0$, deren Faktorgruppen $\mathfrak{H}_\infty^\alpha/\mathfrak{H}_\infty^{\alpha+1}$ $N = N(\alpha, n)$ Zyklen vom Typus $(\lambda+\lambda_0)^n$ enthalten, wenn für kein α von einem gewissen n_0 ab alle $N(\alpha, n)$ mit $n > n_0$ gleich Null sind. Ausgenommen von dieser Bedingung sind höchstens im Falle, daß τ nicht Limeszahl ist, die Zahlen $N(\tau-1, n)$.*

Beweis. Ich beweise zunächst, daß die Bedingung notwendig ist. Zunächst muß $\mathfrak{H}_\infty^{\alpha+1}$ für $\alpha+1<\tau$ definitionsgemäß Elemente enthalten, die in $\mathfrak{H}_\infty^{\alpha+1}$ endlichen Höhenexponenten haben, und damit auch ein solches x vom Höhenexponenten Null. Da $x = (\lambda+\lambda_0)^n y$ in $\mathfrak{H}_\infty^\alpha$ für beliebiges n lösbar sein muß, und $(\lambda+\lambda_0)^{n-1} y$ nicht in $\mathfrak{H}_\infty^{\alpha+1}$ liegen kann, folgt, daß es in $\mathfrak{H}_\infty^\alpha/\mathfrak{H}_\infty^{\alpha+1}$ Elemente beliebig hoher Ordnung gibt.

---

[7]) Da das Nullelement immer den Höhenexponenten unendlich hat, wird es bei den Aussagen dieses Satzes nicht gezählt.

[8]) Die Struktur dieser Gruppe vom Typus $(\lambda+\lambda_0)^\infty$ wird durch das folgende r. E. S. mit den Relationen $(\lambda+\lambda_0)x_1 = 0$, $x_{m-1} + (\lambda+\lambda_0)x_m = 0$, wobei $m = 2, 3, \ldots$, gekennzeichnet. Die zugehörige Matrix $\mathfrak{A}' + \lambda\mathfrak{E}$ geht durch sinnvolle Verallgemeinerung aus der Matrix $\mathfrak{A}_n$ von S. 504 hervor.

[9]) Prüfer, Math. Zeitschr. 17 (1923), S. 35.

Also darf für kein α — ausgenommen höchstens $\alpha = \tau - 1$ — die Zahl $N(\alpha, n)$ gleich Null sein für alle $n > n_0$.

Ist nun $x_{\alpha k}$ ein E. S., wobei $0 \leqq \alpha < \tau$ und $0 < k < \omega$ ist, so ordne ich die $x_{\alpha k}$ so an, daß $x_{\alpha k}$ vor $x_{\alpha' k'}$ steht, wenn

$$\alpha > \alpha'$$

und für

$$\alpha = \alpha' \quad \text{wenn} \quad k < k'$$

ist.

Dann denke ich mir ein quadratisches Schema S gegeben, dessen Zeilen und Spalten in gleicher Weise geordnet sind wie die $x_{\alpha k}$, so daß also jede Zeile bzw. Spalte durch Angabe eines Indexes (α, k) fixiert ist. Jeder Spalte entspricht also ein $x_{\alpha k}$. In die Hauptdiagonale dieses Schemas schreibe ich zu jedem α die Größe $(\lambda + \lambda_0)^n$ genau $N(\alpha, n)$-mal hinein. Weiterhin werden in das Schema noch Einsen eingetragen, und zwar nach folgenden Regeln:

a) jede Zeile erhält höchstens eine Eins, die unterhalb der Hauptdiagonalen steht;

b) von den Elementen einer Spalte mit dem Spaltenindex (α', k') und den Zeilenindizes (α, k), wo α fest und k variabel ist, sind unendlich viele gleich Eins zu setzen, wenn $\alpha' > \alpha$ ist. Außerdem sollen die Einsen noch so verteilt sein, daß unter den mit den Einsen in gleicher Zeile stehenden Hauptdiagonalelementen beliebig hohe Potenzen von $(\lambda + \lambda_0)$ vorkommen;

c) sind α' bzw. α erster Spalten- bzw. Zeilenindex irgendeiner so eingetragenen Eins und sind $(\lambda + \lambda_0)^{n'}$ bzw. $(\lambda + \lambda_0)^n$ die in dieser Spalte bzw. Zeile stehenden Hauptdiagonalelemente, so soll immer $n' < n$ gelten;

d) alle übrigen Elemente des Schemas sind gleich Null zu setzen (also insbesondere alle oberhalb der Hauptdiagonalen stehenden).

Es ist ersichtlich, daß a) bis d) miteinander verträglich sind, wenn man berücksichtigt, daß unter den Hauptdiagonalelementen der Zeilen mit erstem Index $\alpha \neq \tau - 1$ sicher beliebig hohe Potenzen von $(\lambda + \lambda_0)$ vorkommen.

Ich zeige jetzt, daß die Restklassengruppe aller endlichen Linearformen in den $x_{\alpha k}$ nach dem durch das Schema S erzeugten Modul $\mathfrak{N}$ eine primäre abelsche Gruppe mit den vorgegebenen Invarianten $N(\alpha, n)$ ist.

Zunächst ist die Gruppe primär, denn steht in der zu $x_{\alpha k}$ gehörigen Spalte $(\lambda + \lambda_0)^n$ etwa, so ist die Ordnung von $x_{\alpha k}$ wegen c) höchstens gleich $(\lambda + \lambda_0)^m$, wo $m = \frac{n}{2}(n+1)$ also jedenfalls eine Potenz von $(\lambda + \lambda_0)$.

Die Elemente $x_{\alpha k}$ mit $\alpha > 0$ erzeugen die Untergruppe $\mathfrak{H}^1_\infty$, denn nach b) haben die $x_{\alpha k}$ mit $\alpha > 0$ alle unendlichen Höhenexponenten. Gäbe es weitere Elemente von unendlichem Höhenexponenten, so müßte

es auch in der Restklassengruppe nach der von allen $x_{\alpha k}$ mit $\alpha > 0$ erzeugten Gruppe Elemente von unendlichem Höhenexponenten geben. Das ist aber nicht der Fall, da diese Restklassengruppe direkte Summe von Zyklen vom Typus $(\lambda + \lambda_0)^n$ ist.

Ferner stimmen die Anzahlen dieser Zyklen gerade mit den Zahlen $N(0, n)$ überein. Damit ist für $\mathfrak{H}^0_\infty/\mathfrak{H}^1_\infty$ alles bewiesen. Durch transfinite Induktion nach α beweist man die entsprechende Aussage für $\mathfrak{H}^\alpha_\infty/\mathfrak{H}^{\alpha+1}_\infty$.

Die durch obiges Schema S angegebene Matrix ist F-Matrix der primären Gruppe $\mathfrak{H}$. Die $x_{\alpha k}$ bilden aber noch kein r. E. S. Um dies zu erreichen, müssen wir noch eine leichte Umformung vornehmen. Ist nämlich x ein erzeugendes Element einer primären zyklischen Gruppe vom Typus $(\lambda + \lambda_0)^n$, so führe ich weitere erzeugende Elemente durch folgende Relationen ein:

$$x_1 + (\lambda + \lambda_0)x = 0,\; x_2 + (\lambda + \lambda_0)x_1 = 0, \ldots, x_{n-1} + (\lambda + \lambda_0)x_{n-2} = 0,$$

dann gilt $(\lambda + \lambda_0)x_{n-1} = 0$, und die zu diesem r. E. S. gehörige F-Matrix ist:

$$\mathfrak{A}_n = \begin{vmatrix} \lambda+\lambda_0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+\lambda_0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+\lambda_0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \lambda+\lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 & \lambda+\lambda_0 \end{vmatrix}.$$

Sie läßt sich in der Form $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$ schreiben. Um das analoge für die oben angegebene zu $\mathfrak{H}$ gehörige F-Matrix zu erreichen, brauche ich nunmehr nur noch, wenn in der Spalte des Elementes $x_{\alpha k}$ das Polynom $(\lambda + \lambda_0)^n$ steht, die einreihige Matrix $(\lambda + \lambda_0)^n$ durch die eben angegebene n-reihige Matrix $\mathfrak{A}_n$ zu ersetzen. Steht in der zu $(\lambda + \lambda_0)^n$ gehörigen Zeile eine Eins, so soll sie an die gleiche Stelle der ersten zu $\mathfrak{A}_n$ gehörigen Zeile gesetzt werden, stehen in der zu $(\lambda + \lambda_0)^n$ gehörigen Spalte Einsen, so sollen sie an die entsprechenden Stellen der letzten zu $\mathfrak{A}_n$ gehörigen Spalte gesetzt werden. Die übrigen Elemente der hinzugefügten Zeilen und Spalten werden mit Nullen ausgefüllt. Dies sei für alle $x_{\alpha k}$ ausgeführt. Das neue so entstehende E. S. ist ein r. E. S. derselben Gruppe $\mathfrak{G}$ und die zugehörige F-Matrix hat die Form $\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{E}$, wo $\mathfrak{A}$ Koeffizienten aus K hat.

Nach Anm. [8]) gibt es auch in $\mathfrak{H}_r$ für jeden direkten Summanden vom Typus $(\lambda + \lambda_0)^\infty$ ein r. E. S. mit der dort angegebenen Matrix $\mathfrak{A}' + \lambda\mathfrak{E}$. Da die primäre Gruppe $\mathfrak{G}$ direkte Summe von $\mathfrak{H}^r_\infty$ und $\mathfrak{H}$ ist, stellt die Matrix

$$\mathfrak{A}^* + \lambda\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}' & 0 \\ 0 & \mathfrak{A} \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} \mathfrak{E} & 0 \\ 0 & \mathfrak{E} \end{pmatrix}$$

eine zu einem r. E. S. gehörige F-Matrix von $\mathfrak{G}$, wobei die Invarianten von $\mathfrak{G}$ beliebig vorgegeben sind, dar. ($\mathfrak{A}''$ ensteht durch Aneinandersetzen von endlich oder unendlich vielen Matrizen $\mathfrak{A}'$.) Diese Überlegung läßt sich sofort auf abelsche Gruppen, die nur Elemente endlicher Ordnung enthalten, vermöge Satz 6 übertragen. Durch das Schema S und Anm. [*]) wird also jeder abzählbaren Gruppe $\mathfrak{G}^*$ mit nur Elementen endlicher Ordnung eine Matrix $\mathfrak{A}^* + \lambda\,\mathfrak{E}$ zugeordnet, die wir als „Normalform" einer zu $\mathfrak{G}^*$ gehörigen F-Matrix bezeichnen wollen.

Jeder Gruppe $\mathfrak{G}^*$ werden wegen der beschränkten Willkür in der Verteilung der Einsen in Schema S unendlich viele Normalformen zugeordnet, aus denen man aber sofort eindeutig die Invarianten von $\mathfrak{G}^*$ ablesen kann. Wir haben also den Satz gewonnen:

Satz 10. *Allen abelschen Gruppen mit nur Elementen endlicher Ordnung werden durch S und Anm.* [*]) *Normalformen zugeordnet, aus denen eindeutig die Invarianten der Gruppen ablesbar sind. Vermöge Satz* 3 *haben wir dadurch Normalformen für jede Klasse ähnlicher Matrizen.*

Auf Grund der vorliegenden Sätze ließen sich beispielsweise Fixpunktsätze der linearen Transformationen eines unendlich-dimensionalen projektiven Raumes aufstellen.

(Eingegangen am 15. 2. 1937.)

Identical relations in groups. I.

Von

B. H. Neumann in Cambridge (England) *).

Introduction.

§ 1.

W. Burnside (3) has proved that a group of matrices (of finite degree) is finite, if the orders of the elements are bounded. A theorem due to I. Schur (13) states that a group of matrices is finite, if it is generated by a finite set of elements and the orders of the elements are finite. The first theorem does not hold for groups in general; it is not known whether the second remains true in the general case, but it seems very unlikely.

Combining the conditions of the two theorems, but dropping the assumption that the groups consist of matrices, one gets an interesting problem: whether a group with a finite number of generators is necessarily finite, if the orders of all its elements are bounded. This problem has been solved only in the simplest non-trivial case, viz. that the orders of the elements do not exceed 3; cf. (9).

This question is in its general form equivalent to, although in its special cases (i. e. for given bound of the orders) different from, a famous problem due to Burnside (2): whether a group with a finite number n of generators is necessarily finite if the orders of all its elements divide a fixed number k, and what is the structure of the maximal group $B_{n,k}$ with these properties. The expression "maximal group" has a well-defined meaning, even if the group should prove infinite. For among the groups in which every k-th power is the unit element and which can be generated by n elements, there is one of which all the others are homomorphic images.

The Burnside problem has so far been solved in some special cases only, viz. for $k = 2$, n arbitrary[1]); $k = 3$, n arbitrary[2]); $k = 4$, $n = 2$[3]);

*) Dies ist, mit einigen Abänderungen, der erste Teil einer Arbeit, die 1935 der Universität Cambridge zur Erlangung des Grades eines Ph. D. vorgelegen hat.

1) This case is trivial; cf. (2).

2) Finiteness in (2); exact order of $B_{n,3}$ equal to $3^{\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}$ in (7); for $n = 2$ and $n = 3$ also (2), where 3^{2^n-1} is wrongly given as the order for all n.

3) Finiteness in (2); exact order of $B_{2,4}$ equal to 2^{10}: P. Hall, unpublished; in (2), 2^{12} is wrongly given as the order.

and partly for $k = 5$, $n = 2$[4]). In all but the last one of these cases the finiteness of $B_{n,k}$ has been established.

§ 2.

In $B_{n,k}$ the relation

$$x^k = 1\text{[5]})$$

holds identically, i. e. for every choice of x. Similarly, in a finite group of order g

$$x^g = 1$$

is an identical relation. For Abelian groups

$$x^{-1}y^{-1}xy = 1$$

is another example.

The identical relations which hold in a given group are well worth being closely studied; whereas the relations which connect the generators of a group depend on the choice of the set of generators, the identical relations clearly depend only on the group itself: they are an invariant property of the group. Naturally, the problem which suggests itself first is, how to find the identical relations which hold in a given group. The solution of this problem is the principal aim of this paper, but it will be attained for certain special types of groups only.

Identical relations, not only in groups but in far more general abstract algebraic systems, have been dealt with by G. Birkhoff (1). Many of the results stated in the first part of this paper are only special cases of his theorems; but they have been arrived at, and will be proved, independently.

§ 3.

A group G can be given by a set of generators $g_1, \ldots, g_m$ and the relations

$$r_1(g_1, \ldots, g_m) = 1, \ldots$$

which hold between them[6]). The left-hand sides[7]) of the relations form a self-conjugate subgroup $\mathfrak{R}_m$ of the free group $\mathfrak{F}_m$ of the generators $g_1, \ldots, g_m$, and $G \cong \mathfrak{F}_m/\mathfrak{R}_m$. Similarly the left-hand sides of the identical

[4]) If $B_{2,5}$ is finite, its order equals 5^{10}: P. Hall, unpublished.

[5]) Throughout the paper, 1 stands not only for the number, but also for the unit element of every group which occurs except where otherwise stated.

[6]) Throughout the paper we consider groups of finite or denumerably infinite order only, although this restriction is in no way necessary. The number m of generators need not be finite.

[7]) Relations will always be written in the form $r = 1$; then the expression "left-hand side" is not ambiguous.

relations in n variables, which hold in G, form a subgroup $\mathfrak{B}_n$ of the free group $\mathfrak{F}_n$ of the variables. $\mathfrak{B}_n$ is a self-conjugate subgroup of $\mathfrak{F}_n$, but it is more than that.

3. 1. Definition. *A homomorphism of a group into itself or part of itself is called an "endomorphism" of the group*[8]).

3. 2. Definition. *A subgroup of a group is called "fully invariant" if it admits (i. e. is mapped into itself or part of itself by) every endomorphism of the whole group*[9]).

$\mathfrak{B}_n$ will be shown to be a fully invariant subgroup of $\mathfrak{F}_n$. Its factor group

$$V_n = \mathfrak{F}_n / \mathfrak{B}_n$$

has many interesting properties. It is defined by the identical relations in n variables which hold in G. But its usefulness for our purposes lies in the fact that it can be defined directly from G without explicit recurrence to identical relations and that, on the other hand, the identical relations of G can be derived from it. It will be denoted by $V_n(G)$; the greater part of this paper will be concerned with its structure.

As the number n of variables ranges over the set of natural numbers, we obtain a sequence $V_1(G)$, $V_2(G)$, ... of "V-groups" belonging to G. $V_n(G)$ determines the identical relations in n variables; to find *all* the identical relations one has to consider the whole series of V-groups.

§ 4.

The first part gives definitions and results of a general character. The most important facts are that $V_n(G)$ is finite if G is finite, and that the factor group of its commutator group is the direct product of n cyclical groups whose (common) order can be easily found. For the investigation of their commutator groups certain general properties of commutator groups had to be derived, and their generators studied. The methods are not new, nor many, if any, of the results.

The special parts deal with certain simple types of metabelian groups. The V-groups and identical relations are studied in detail for a series of groups including the symmetric group on three symbols, the alternating group on four symbols, all the dihedral groups, and other interesting metabelian groups. The difficulties involved seem to indicate that the methods developed in this paper will hardly be applicable to more complicated

---

[8]) This expression was introduced by Mr Hall. Endomorphisms will be written as right-hand operators.

[9]) "Vollinvariant" subgroups were first studied by F. Levi (6).

groups. But Mr Hall, working — partly at least — on different lines, has determined the V-groups for the icosahedral group[10]).

I wish to thank several friends, and in the first place Mr Hall, for many helpful suggestions and for the kind and patient interest they have constantly shown in the preparation of this paper.

Chapter 1.

§ 5.

An arbitrary group G is given. We consider "functions" $w(x_1, \ldots, x_n)$ in n "variables" $x_1, \ldots, x_n$, i. e. words in $x_1, \ldots, x_n$[11]). They form, *qua* words in n symbols, the free group $\mathfrak{F}_n$ of n generators; the products and inverses of functions are defined as the products and inverses in $\mathfrak{F}_n$.

Substituting arbitrary "arguments" $a_1, \ldots, a_n$, i. e. elements of the given group G, for the variables in the function $w(x_1, \ldots, x_n)$, we get the "value"

$$w(a_1, \ldots, a_n) = a$$

of the function at the "point" $(a_1, \ldots, a_n)$. Of course, the value is again an element of G.

Where it is more convenient we shall write $w(\xi_n)$ for $w(x_1, \ldots, x_n)$ and α_n, β_n &c. for the points $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ &c. If Θ is an endomorphism of the group G, written as right-hand operator, the point $(a_1\Theta, \ldots, a_n\Theta)$ will similarly be denoted by $\alpha_n\Theta$. Where no ambiguity need be feared, the suffix n is sometimes omitted. $a_1, \ldots, a_n$ are called the "coordinates" of α_n.

Obviously, the functions and their values have the following properties.

5. 1. *The value of the inverse in a point is the inverse of the value in the point.*

5. 2. *The value of a product in a point is the product of the values in the point.*

5. 3. *If Θ is an endomorphism of G, then*

$$w(a_1\Theta, \ldots, a_n\Theta) = w(a_1, \ldots, a_n)\Theta.$$

5. 4. Theorem. *The values of a function or, more generally, of a set of functions, in all the points of G generate a fully invariant subgroup of G.*

For if $w, w', \ldots$ is a set of functions in $n, n', \ldots$ variables,

$$W(w(a_1, \ldots, a_n), w'(a'_1, \ldots, a'_{n'}), \ldots)$$

---

[10]) Cf. (5). The result is not stated explicitly.

[11]) We do not at present consider the more general and very interesting notion of functions which involve "constants" also, i. e. fixed elements of the given group G.

an arbitrary element of the subgroup generated by the values of $w, w', \ldots$, and Θ an arbitrary endomorphism of G, then

$$\begin{aligned} & W(w(a_1, \ldots, a_n), w'(a'_1, \ldots, a'_{n'}), \ldots)\Theta \\ & \qquad = W(w(a_1, \ldots, a_n)\Theta, w'(a'_1, \ldots, a'_{n'})\Theta, \ldots) \\ & \qquad = W(w(a_1\Theta, \ldots, a_n\Theta), w'(a'_1\Theta, \ldots, a'_{n'}\Theta), \ldots) \end{aligned}$$

is again an element of the subgroup.

§ 6.

Theorem 5.4 shows a way to obtain fully invariant subgroups of an arbitrary group G. But this way does not, in general, lead to all fully invariant subgroups. We therefore introduce a special name for the subgroups which are obtained by 5.4.

6.1. Definition. *A (necessarily fully invariant) subgroup of a group G is called a "word-group"* [12] *(or word-subgroup), if it can be generated by the values of a set $\mathfrak{S}$ of functions in all the points of G; it will be denoted by $G^{(\mathfrak{S})}$.*

Examples of word-groups are the terms of the "derived series" (iterated commutator groups) and of the "lower central series" [13] and the "subgroups $\mho_\alpha$" in regular groups of prime power order [13], or, more generally, the subgroups generated by the k-th powers of all the elements of the group. Examples of fully invariant subgroups which are not necessarily word-groups, are furnished by the "subgroups Ω_β" in regular groups of prime power order [13], or, more generally, the subgroups generated by all the solutions of $x^k = 1$ in the group. The terms of the "upper central series" [13] are characteristic, but not, in general, fully invariant [14].

§ 7.

If $G^{(\mathfrak{S})}$ and $G^{(\mathfrak{T})}$ are two word-subgroups of the group G, then their join $\{G^{(\mathfrak{S})}, G^{(\mathfrak{T})}\}$ is obviously generated by all the values of the functions belonging to $\mathfrak{U} = \mathfrak{S} + \mathfrak{T}$ (the join of $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{T}$ *qua* sets). We have therefore

7.1. *The join of two word-groups is a word-group:*

$$\{G^{(\mathfrak{S})}, G^{(\mathfrak{T})}\} = G^{(\mathfrak{S}+\mathfrak{T})}.$$

The meet of two word-groups, however, is not necessarily a word-group, as is shown by the following example.

---

[12]) This name was proposed by Mr Hall.

[13]) Cf. (4).

[14]) Cf. (6).

7. 2. *Let G be generated by four elements a, b, c, d with the relations*

$$a^9 = b^3 = c^9 = d^3 = 1;$$
$$a^{-1} b^{-1} a b = c^3;$$
$$a^{-1} c^{-1} a c = d;$$
$$a^{-1} d^{-1} a d = b^{-1} c^{-1} b c = b^{-1} d^{-1} b d = c^{-1} d^{-1} c d = 1.$$

(Clearly the group can be generated by a, b, and c alone.) Let $H_1 = \{a^3, c^3\}$ and $H_2 = \{c^3, d\}$. Then H_1 and H_2 are word-subgroups of G, but their common part $H = \{c^3\}$ is not.

H_1 is generated by the values of the function x_1^3, H_2 by the values of $x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2$; hence they are word-groups. They are both Abelian; therefore their meet H consists of the powers of c^3. We shall show that a function $w(x_1, \ldots, x_n)$, whose every value falls into H, equals the unit element in every point and therefore does not generate H.

First we note that in G every 9th power equals the unit element, and every commutator is permutable with every element of the group. Hence the set of values assumed by a function $w(\xi_n)$ is not affected if we multiply $w(\xi_n)$ by 9th powers of certain variables, or if we rearrange commutators of variables, or if we replace conjugates of commutators by the commutators themselves.

We now substitute a for one of the arguments, say x_1, and 1 for all the others. The value of the function then becomes a^{α}, where α is the sum of exponents with which x_1 enters the function. Since — by assumption — the value is contained in H, it has to be 1; therefore α is divisible by 9. Multiplying $w(\xi_n)$ by $x_1^{-\alpha}$ (which is a 9th power), we get a function which assumes the same values as $w(\xi_n)$ and involves x_1 with the sum of exponents 0. Continuing thus with $x_2, \ldots, x_n$, we get at last a function where the sum of exponents vanishes for every variable.

Such a function is a "commutator function", i. e. an element of the commutator subgroup of the free group $\mathfrak{F}_n$ of the variables. It can be represented as a product of commutators of the variables and their conjugates. Instead of the conjugates we put the commutators themselves and rearrange them so that the new function is of the form[15])

$$\overline{w}(\xi_n) \equiv \prod_{\mu < \nu} (x_\mu^{-1} x_\nu^{-1} x_\mu x_\nu)^{\alpha_{\mu\nu}}.$$

$\overline{w}(\xi_n)$ still assumes the same values as $w(\xi_n)$. Substituting a for x_μ, c for x_ν, and 1 for all other variables, we obtain $d^{\alpha_{\mu\nu}}$ as a value of the function. Since this must belong to H, $\alpha_{\mu\nu}$ is a multiple of 3. Hence only cubes of commutators enter the function $\overline{w}(\xi_n)$; but in G the third powers of commutators are all 1. Therefore $\overline{w}(\xi_n) = 1$ for every choice of arguments in G.

§ 8.

A set $\mathfrak{S}$ of functions is a group if it contains with every function its inverse, and with every pair of functions their product.

8. 1. Definition. *A set of functions will be called "n-closed", if its elements involve n variables only, and if it is closed with respect to*

[15]) For equality in free groups we use the identity symbol $\equiv$.

substitution of arbitrary words in these variables for the variables. If the number of variables is denumerably infinite, the set is called "ω-closed" or simply "closed".

If $\mathfrak{S}$ is a set of functions involving not more than n variables, say $x_1, \ldots, x_n$, there is a uniquely determined "minimal" n-closed *group* of functions $\overline{\mathfrak{S}}_n$, containing $\mathfrak{S}$, viz. the meet of all n-closed groups (of functions in $x_1, \ldots, x_n$) containing $\mathfrak{S}$.

8. 2. Definition. *If $\mathfrak{S}$ involves not more than n variables, $\overline{\mathfrak{S}}_n$ is called the "n-closure" of $\mathfrak{S}$; if the number of variables is denumerably infinite, we speak of the "ω-closure" $\overline{\mathfrak{S}}_\omega$ or simply "closure" $\overline{\mathfrak{S}}$ of $\mathfrak{S}$.*

8. 3. Lemma. *For arbitrary G and $\mathfrak{S}$*

$$G^{(\mathfrak{S})} = G^{(\overline{\mathfrak{S}}_n)} \; (= G^{(\overline{\mathfrak{S}})}),$$

provided $\overline{\mathfrak{S}}_n$ is defined (i. e. provided $\mathfrak{S}$ involves not more than n variables).

For the subgroup of G generated by all the values of the elements of $\mathfrak{S}$ contains all the values of the functions derived from those in $\mathfrak{S}$ by repeated (i) inversion, (ii) multiplication, and (iii) substitution of arbitrary words in the variables which enter $\mathfrak{S}$ for these variables (cf. § 5). But the functions thus derived form just the n-closure of $\mathfrak{S}$.

8. 4. Lemma. *The n-closed groups of functions are word-subgroups of the free group $\mathfrak{F}_n$ of the variables, and the word-subgroups of $\mathfrak{F}_n$ are n-closed.*

The proof is obvious.

§ 9.

A word-group is always fully invariant. Although the converse is not in general true, it is true in free groups; and more generally in the factor groups of free groups with respect to fully invariant subgroups.

9. 1. Theorem. *A fully invariant subgroup $\mathfrak{W}_n$ of the free group $\mathfrak{F}_n$ is a word-subgroup of $\mathfrak{F}_n$. A fully invariant subgroup W_n of the group $V_n = \mathfrak{F}_n/\mathfrak{V}_n$, where $\mathfrak{V}_n$ is a fully invariant subgroup of $\mathfrak{F}_n$, is a word-subgroup of V_n.*

$\mathfrak{F}_n$ is generated by $x_1, \ldots, x_n$. If

$$y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n)$$

are arbitrary words in $x_1, \ldots, x_n$, then

$$x_1 \to y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_n \to y_n(x_1, \ldots, x_n)$$

is an endomorphism of $\mathfrak{F}_n$. Hence $\mathfrak{W}_n$, as a fully invariant subgroup of $\mathfrak{F}_n$, has to contain with every word $w(x_1, \ldots, x_n)$ all the words

$w(y_1(\xi_n), \ldots, y_n(\xi_n))$, i. e. all the values of $w(\xi_n)$ for arguments in $\mathfrak{F}_n$. This proves the first part of 9.1 which will be used for the proof of the second part.

V_n is generated by $v_1, \ldots, v_n$ corresponding to the generators $x_1, \ldots, x_n$ of $\mathfrak{F}_n$. If

$$r(v_1, \ldots, v_n) = 1$$

is a relation between these generators,

$$r(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{B}_n.$$

By the proof of the first part of 9.1, $\mathfrak{B}_n$ being fully invariant in $\mathfrak{F}_n$,

$$r(y_1(\xi_n), \ldots, y_n(\xi_n)) \in \mathfrak{B}_n$$

where $y_1, \ldots, y_n$ are again arbitrary words in $x_1, \ldots, x_n$. Hence

$$r(y_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, y_n(v_1, \ldots, v_n)) = 1$$

is again a relation between the generators of V_n, and

$$v_1 \to y_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, v_n \to y_n(v_1, \ldots, v_n)$$

an endomorphism of V_n. Hence W_n, as fully invariant subgroup of V_n, has to contain with every word $w(v_1, \ldots, v_n)$ all the words $w(y_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, y_n(v_1, \ldots, v_n))$, i. e. all the values of $w(\xi_n)$ for arguments in V_n. This completes the proof of 9.1.

9.2. Corollary. *Every relation which holds between the n generators $v_1, \ldots, v_n$ of V_n, holds between any n elements of V_n, i. e. holds identically in V_n.*

9.3. Definition. *The factor group of a free group $\mathfrak{F}_n$ with respect to a fully invariant subgroup $\mathfrak{B}_n$ will be called a "V_n-group" or simply "V-group".*

§ 10.

If we are given a group G and a subgroup H, we ask for the system $\mathfrak{S}$ of functions of n variables which assume values in H for every point of G. By 6.1 the group $G^{(\mathfrak{S})}$ generated by the values of these functions is a word-subgroup of G, and it is obviously the largest word-subgroup of G contained in H. Since $G^{(\mathfrak{S})} = G^{(\overline{\mathfrak{S}}_n)}$ (lemma 8.3) $\mathfrak{S}$ must be n-closed. Application of 8.4 yields immediately

10.1. Theorem. *The functions in n variables*[16]) *which assume values out of a subgroup H of G for all arguments in G, form a fully invariant subgroup of the free group $\mathfrak{F}_n$ generated by the variables.*

10.2. Definition. *The fully invariant subgroup of $\mathfrak{F}_n$ consisting of all the functions in n variables which assume the value 1 in every point*

[16]) Not all of which need occur in every function.

of G, will be denoted by $\mathfrak{V}_n(G)$; *the factor group* $\mathfrak{F}_n/\mathfrak{V}_n(G)$ *by* $V_n(G)$. $V_n(G)$ *is called the n-th V-group of* G.

We have immediately

10.3. Theorem. *The function* $w(\xi_n)$ *belongs to* $\mathfrak{V}_n(G)$ *if and only if*

$$w(\alpha_n) = 1$$

for every point α_n *of* G, *i. e. if and only if*

$$w(\xi_n) = 1$$

is an identical relation in G.

10.4. Theorem. $V_n(G)$ *consists of the functions* $f(\xi_n)$ *in n variables, two functions* $f_1(\xi_n)$ *and* $f_2(\xi_n)$ *being reckoned as equal if their quotient* $f_1(\xi_n)f_2^{-1}(\xi_n)$ *is identically* 1 *in* G, *i. e. if*

$$f_1(\alpha_n) = f_2(\alpha_n)$$

for every point α_n *of* G. *A function equals the unit element in* $V_n(G)$ *if and only if it is the left-hand side of an identical relation of* G.

The variables and functions will be denoted by the same symbols, both as elements of $V_n(G)$ and as elements of $\mathfrak{F}_n$; but $w(\xi_n)$, &c. will usually stand for elements of $\mathfrak{F}_n$, $f(\xi_n)$, &c. for elements of $V_n(G)$. To avoid ambiguity, we use the sign $=$ for equality in $V_n(G)$, the sign $\equiv$ for equality in $\mathfrak{F}_n$.

§ 11.

Before discussing certain properties of $V_n(G)$, we study $\mathfrak{V}_n(G)$ in more detail. $\mathfrak{V}_n(G)$ can be characterized without explicit recurrence to identical relations.

11.1. Theorem. $\mathfrak{V}_n(G)$ *is the common part of all self-conjugate subgroups* $\mathfrak{S}$ *of* $\mathfrak{F}_n$ *whose factor groups in* $\mathfrak{F}_n$ *are isomorphic with subgroups of* G.

11.2. Theorem. *If* G *is isomorphic with* $\mathfrak{F}_n/\mathfrak{R}_n$, $\mathfrak{R}_n$ *being a suitably chosen self-conjugate subgroup of* $\mathfrak{F}_n$[17]), *then* $\mathfrak{V}_n(G)$ *is the greatest fully invariant subgroup of* $\mathfrak{F}_n$ *contained in* $\mathfrak{R}_n$.

Proof of 11.1. Choose $\alpha_n = (a_1, \ldots, a_n)$ arbitrarily in G. The elements $w \equiv w(\xi_n)$ of $\mathfrak{F}_n$, for which

11.3 $$w(\alpha_n) = 1,$$

form a self-conjugate subgroup $\mathfrak{S}_{\alpha_n}$ of $\mathfrak{F}_n$ whose factor group is the subgroup of G generated by $a_1, \ldots, a_n$. Conversely if $\mathfrak{S}$ is a self-conjugate subgroup of $\mathfrak{F}_n$, and $\mathfrak{F}_n/\mathfrak{S}$ is isomorphic with a subgroup of G,

[17]) Such a self-conjugate subgroup exists if and only if G can be generated by n elements.

then there exist n elements $a_1, \ldots, a_n$[18]) for which $\mathfrak{S}_{a_n}$ coincides with $\mathfrak{S}$. Now if

11.4 $$w(\xi_n) = 1$$

holds identically in G, i. e. if w belongs to $\mathfrak{V}_n(G)$, then 11.3 is fulfilled for every choice of α_n and w belongs to every $\mathfrak{S}_{\alpha_n}$. Conversely, if w belongs to every $\mathfrak{S}_{\alpha_n}$, 11.3 holds for every choice of α_n, i. e. 11.4 is an identical relation of G, and therefore w belongs to $\mathfrak{V}_n(G)$. This completes the proof of 11.1.

Proof of 11.2. Owing to 11.1 $\mathfrak{V}_n(G)$ is contained in $\mathfrak{N}_n$. It remains only to be shown that it contains every other fully invariant subgroup $\overline{\mathfrak{V}}_n$ of $\mathfrak{F}_n$ which is contained in $\mathfrak{N}_n$. We choose an arbitrary isomorphism of $\mathfrak{F}_n/\mathfrak{N}_n$ onto G. Then to the generators $x_1, \ldots, x_n$ of $\mathfrak{F}_n$ correspond generators $g_1, \ldots, g_n$ of G, and the elements of $\mathfrak{N}_n$ are just those words $w(\xi_n)$, for which

$$w(g_1, \ldots, g_n) = 1.$$

If an element $w \equiv w(\xi_n)$ belongs to $\overline{\mathfrak{V}}_n$, then, since $\overline{\mathfrak{V}}_n$ is fully invariant in $\mathfrak{F}$, every word $w(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ belongs to $\overline{\mathfrak{V}}_n$, where

$$\bar{x}_1 \equiv \bar{x}_1(\xi_n), \ldots, \bar{x}_n \equiv \bar{x}_n(\xi_n)$$

are arbitrary words in $x_1, \ldots, x_n$. As $\overline{\mathfrak{V}}_n$ is contained in $\mathfrak{N}_n$ by assumption, we get the relations

$$w(\bar{x}_1(g_1, \ldots, g_n), \ldots, \bar{x}_n(g_1, \ldots, g_n)) = 1.$$

But since $g_1, \ldots, g_n$ generate G, the arbitrary words $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ can be chosen such that the arguments are an arbitrary system $a_1, \ldots, a_n$ of elements in G.

$$w(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

is therefore an identical relation of G, and w belongs to $\mathfrak{V}_n(G)$; which proves the theorem[19]).

§ 12.

We shall next discuss some simple characteristic properties of $V_n(G)$.

12.1. *$V_n(G)$ can be generated by n elements.*

For $V_n(G)$ is generated by the n functions

$$f_1(\xi_n) \equiv x_1, \ldots, f_n(\xi_n) \equiv x_n.$$

---

[18]) Depending on the choice of the subgroup in G — there may be several isomorphic ones — and on the choice of the isomorphism.

[19]) The characterization of $\mathfrak{V}_n(G)$ given in 11.2 is, unlike the other definitions of $\mathfrak{V}_n(G)$ and $V_n(G)$, not formally invariant: it depends on the actual choice of $\mathfrak{N}_n$.

We shall see later that $V_n(G)$ cannot be generated by less than n elements, except in a trivial case.

12.2. *Every relation which holds between the generators $x_1, \ldots, x_n$ of $V_n(G)$, is an identical relation of G.*

For a word in $x_1, \ldots, x_n$ is equal to the unit element in $V_n(G)$ (if and) only if it is the left-hand side of an identical relation of G; cf. 10.4.

12.3. *Every identical relation in G holds identically in $V_n(G)$ also.*
For if

$$12.4 \qquad w(y_1, \ldots, y_m) = 1$$

is an identical relation of G, and if we substitute in it arbitrary functions

$$f_1 = f_1(\xi_n), \ldots, f_m = f_m(\xi_n)$$

for the variables $y_1, \ldots, y_m$, we again get an identical relation of G

$$12.5 \qquad w(f_1(\xi_n), \ldots, f_m(\xi_n)) = 1.$$

The left-hand side of 12.5 is an element of $V_n(G)$, and since it is identically 1 in G, it is equal to the unit element *qua* element of $V_n(G)$. Now the $f_i(\xi_n)$ are *arbitrary* elements of $V_n(G)$. Thus 12.5 holds everywhere in $V_n(G)$, and therefore 12.4 is an identical relation of $V_n(G)$.

12.6. Theorem. *The properties* 12.1—12.3 *characterize $V_n(G)$, i. e. if a group W possesses a system of n generators with the property* 12.2 *and if W fulfils* 12.3, *then it is isomorphic with $V_n(G)$.*

For by 12.3 every identical relation of G in n variables holds (identically in W, and *a fortiori*) as relation between the n generators of W. Hence the relations between these generators are just the identical relations in n variables which hold in G, and therefore they define a group isomorphic with $V_n(G)$.

Finally we prove the "maximal property" of the V-groups.

12.7. Theorem. *Every group with the properties* 12.1 *and* 12.3, *i. e. every group with n generators in which all the identical relations of G hold identically, is a homomorphic image of $V_n(G)$.*

Let W be such a group, and let $w_1, \ldots, w_n$ be a set of generators of W. A relation between the generators $x_1, \ldots, x_n$ of $V_n(G)$ is, by 12.2, an identical relation of G, therefore an identical relation of W by assumption, and *a fortiori* a relation between $w_1, \ldots, w_n$. Consequently $x_i \to w_i$ is a homomorphism.

12.8. Corollary. *If G can be generated by n elements, then it is a factor group of $V_n(G)$.*

Corollary. *Every subgroup of $V_n(G)$ which can be generated by n elements, is at the same time a factor group of $V_n(G)$* [20].

Another consequence of 12.7 is

12.9. Theorem. *If H is a subgroup or a factor group of G, then $V_n(H)$ is a factor group of $V_n(G)$.*

For the identical relations of G hold *a fortiori* identically in H.

§ 13.

Another definition of $V_n(G)$ can be obtained, if we start from a Boolean algebra B [21]. The elements of the Boolean algebra will be denoted by $\alpha, \beta, \ldots$, the zero element by 0, the unit element by 1. To avoid confusion, we shall in this paragraph denote the unit element of G by e, the unit element of the group which will be defined presently by E.

With the help of G we form the "group algebra" over B [22]. Its elements are of the form

$$\sum_{a \in G} \alpha_a \cdot a,$$

the summation extending over all elements of G. Addition and multiplication are defined as usual

$$\alpha'_a \cdot a + \alpha''_a \cdot a = (\alpha'_a + \alpha''_a) \cdot a,$$

$$\alpha_a \cdot a \cdot \alpha_e \cdot b = (\alpha_a \alpha_b) \cdot a\, b.$$

The algebra contains a unit element

$$E = 1 \cdot e.$$

In this algebra we take n elements

$$z_1 = \sum_{a \in G} \alpha'_a \cdot a,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$z_n = \sum_{a \in G} \alpha_a^{(n)} \cdot a,$$

with the conditions

13.1 $$\begin{cases} \alpha_a^{(i)} \cdot \alpha_b^{(i)} = 0 & \text{whenever } a \neq b, \\ \sum_{a \in G} \alpha_a^{(i)} = 1 & \text{for } i = 1, \ldots, n; \end{cases}$$

13.2 $$\alpha'_{a_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{a_n}^{(n)} \neq 0$$

for every choice of $a_1, \ldots, a_n$ in G [23]. To ensure that the last condition can be fulfilled we assume that the Boolean algebra has at least 2^{g^n} elements, where g is the (not necessarily finite) order of G.

---

[20]) One easily defines a V-group $V_\omega(G)$ with a denumerably infinite number of generators. Then every subgroup of $V_\omega(G)$ is at the same time a factor group of $V_\omega(G)$.

[21]) This representation is included only to show the connection of this paper with the note (8) (which actually set this investigation in motion). For the remainder of this paper § 13 is irrelevant. Proofs are mostly omitted.

[22]) Cf. (14) and (8).

[23]) 13.1 ensures that the z_i can be represented as "orthogonal" Boolean matrices. 13.2 may be called a condition of "independence"; cf. (8).

Owing to 13.1 the z_i generate a group. If

13.3 $$z = \sum_{a \in G} \alpha_a \cdot a$$

is an arbitrary element of this group, its coefficients also fulfil the conditions

13.4 $$\begin{cases} \alpha_a \cdot \alpha_b = 0 & \text{whenever } a \neq b \\ \sum_{a \in G} \alpha_a = 1. & \end{cases}$$

The inverse of the element 13.3 is given by

$$z^{-1} = \sum_{a \in G} \alpha_a \cdot a^{-1}.$$

A word in the generators $z_1, \ldots, z_n$ has the form

13.5 $$w(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{a_1, \ldots, a_n} \alpha'_{a_1} \cdot \ldots \cdot \alpha^{(n)}_{a_n} \cdot w(a_1, \ldots, a_n),$$

where $a_1, \ldots, a_n$ range independently over G.

If

13.6 $$w(y_1, \ldots, y_m) = e$$

is an identical relation in G, and if we substitute in it for $y_1, \ldots, y_m$ arbitrary words in $z_1, \ldots, z_n$

$$\bar{z}_1 \equiv \bar{z}_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, \bar{z}_m \equiv \bar{z}_m(z_1, \ldots, z_n),$$

we get a certain expression

$$w(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m) \equiv \bar{w}(z_1, \ldots, z_n).$$

Considering for the moment $z_1, \ldots, z_n$ as variables in G, we see that the function $\bar{w}$ is identically e in G. Thus we obtain from 13.5

$$w(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m) = \sum_{a_1, \ldots, a_n} \alpha'_{a_1} \cdot \ldots \cdot \alpha^{(n)}_{a_n} \cdot e = 1 \cdot e = E.$$

Since $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m$ are arbitrary words in $z_1, \ldots, z_n$, we conclude that 13.6 is an identical relation in the group generated by $z_1, \ldots, z_n$.

Conversely if

$$w(z_1, \ldots, z_n) = E$$

is a relation between $z_1, \ldots, z_n$, we have

$$w(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{a_1, \ldots, a_n} \alpha'_{a_1} \cdot \ldots \cdot \alpha^{(n)}_{a_n} \cdot w(a_1, \ldots, a_n) = E = 1 \cdot e.$$

Here the coefficient of every element of G, other than e, vanishes. This is only possible, if no $w(a_1, \ldots a_n)$ gives an element, other than e, of G. For if

$$w(\bar{a}_1, \ldots, a_n) = a \neq e$$

for the particular choice of arguments $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$, then the coefficient of a would be at least $\alpha'_{\bar{a}_1} \cdot \ldots \cdot \alpha^{(n)}_{\bar{a}_n}$ and therefore, owing to 13.2, different from zero. Hence every relation between $z_1, \ldots, z_n$ holds identically in G.

By 12.6 we have therefore

13.7. **Theorem.** *The group generated by $z_1, \ldots, z_n$ is isomorphic with $V_n(G)$.*

All the "orthogonal" elements, i. e. those for which 13.4 holds, in a Boolean group algebra form a group which is the direct product of a certain system of groups, each isomorphic with G[24]). This fact leads to yet another, still rather similar, characterization of $V_n(G)$.

§ 14.

To every point $\alpha_n = (a_1, \ldots, a_n)$ of G we form a group G_{α_n}, isomorphic with G, and consider the direct product of all these groups[25]). We choose n elements $t_1, \ldots, t_n$ in it such that the component of t_i in the direct factor G_{α_n} is a_i.

The component of a word $w(t_1, \ldots, t_n)$ in G_{α_n} obviously is $w(\alpha_n)$. Hence $w(t_1, \ldots, t_n)$ is equal to the unit element if, and only if, $w(\alpha_n) = 1$ for every choice of α_n, i. e. if, and only if, $w(\xi_n) = 1$ is an identical relation of G. Therefore

14.1. Theorem. *The group generated by* $t_1, \ldots, t_n$ *is isomorphic with* $V_n(G)$.

We have now obtained $V_n(G)$ as a subgroup of a direct product. The number of direct factors is equal to the number of points α_n; if g is the order of G, we have therefore g^n direct factors. Every one of them is isomorphic to G and so has order g. Hence the order of the whole direct product is g^{g^n}.

14.2. Theorem. *If G is finite, then every $V_n(G)$ is finite. If g is the order of G, then the order $v_n(G)$ of $V_n(G)$ divides g^{g^n}. If, on the other hand, G contains an infinite subgroup with a finite number of generators, then from a certain suffix n_0 onwards all the V-groups of G are infinite*[26]).

14.3. Corollary. *Every subgroup of finite index in the free group $\mathfrak{F}_n$ contains a fully invariant subgroup of $\mathfrak{F}_n$ whose index is also finite.*

The second part of the theorem follows immediately from 12.8 and 12.9. The first part might have been easily derived from 10.4 or from the definition in § 13.

For the investigation of finite groups and their V-groups theorem 14.2 is one of the most important facts. It ensures that the determination of $V_n(G)$ for finite G and arbitrary but fixed n can be carried out in a finite number of steps. Since the relations connecting the

---

[24]) This fact escaped my attention when I wrote the note (8). Wedderburn (14) does not mention it either.

[25]) A direct product of an infinite number of groups is sometimes defined with the restriction that in every element only a finite number of components differ from the unit element ("limited direct product"). Here the term is used without this restriction.

[26]) Cf. (1), Theorem 10, Corollary 2.

generators can be found by a finite procedure, the determination of all identical relations in n variables for finite groups is a finite problem.

But to get *all* the identical relations we have to know something about $V_n(G)$ for *every* n. Whether this question can still be reduced to a finite problem cannot be decided now. Besides, the bound given in 14.2 for the order of $V_n(G)$ suggests that even for small values of n we may have to deal with comparatively large groups[27]).

§ 15.

The upper bound given for the order $v_n(G)$ of $V_n(G)$ can be substantially reduced. In the first place we may drop, one after the other, those direct factors G_{α_n}, for which $\alpha_n = \bar{\alpha}_n \Theta$ with a suitable endomorphism Θ — but of course only if $G_{\bar{\alpha}_n}$ has not previously been left out of the direct product[28]). Besides we obviously need not take G_{α_n} isomorphic with G in every case, but only with the subgroup generated by the coordinates $a_1, \ldots, a_n$ of α_n.

Let G e. g. be the symmetric group on three symbols 1, 2, 3. The seven pairs of elements of G

$$15.1 \qquad \left|\begin{array}{ll} \alpha = ((12)(3), & (1)(23)), \\ \beta = ((12)(3), & (123)), \\ \gamma = ((123), & (12)(3)), \\ \delta = ((123), & (123)), \\ \varepsilon = ((123), & (132)), \\ \zeta = ((123), & (1)(2)(3)), \\ \eta = ((1)(2)(3), & (123)) \end{array}\right.$$

have the property that every ordered pair of elements of G is obtained from one of them by an endomorphism. The first three pairs generate G, the last four the cyclical group of order 3. Hence $V_2(G)$ is a subgroup of the direct product of seven groups, three of which are isomorphic with G, the remaining four being cyclical of order 3: $v_2(G)$ therefore divides $6^3 \cdot 3^4$. This is a considerable improvement on the bound given in 14.2, viz. 6^{36}.

§ 16.

Let G be an arbitrary group and U_n a (not necessarily proper) subgroup of its n-th V-group $V_n(G)$.

16.1. Definition. *A point α is called "irrelevant" for U_n, if $f(\alpha) = 1$ for every element $f(\xi)$ of U_n. The relevant points with respect*

[27]) Yet in certain cases, where large groups with given properties are required, this would seem of advantage.

[28]) Later this reduction will be studied more in detail. It is closely connected with 5.3; cf. § 17.

to U_n are those in which at least one function of U_n differs from the unit element[29]).

16.2. Definition. *A point β is said to "depend" on the set of points $\alpha, \alpha', \ldots$ with respect to U_n, if every element $f(\xi)$ of U_n which equals the unit element in $\alpha, \alpha', \ldots$, equals the unit element also in β*[30]). *The set of points $\beta, \beta', \ldots$ depends on the set $\alpha, \alpha', \ldots$ with respect to U_n, if every point of the first set depends on the second.*

16.3. Definition. *A set Σ of points is called a "basis" for U_n, if every point depends on Σ with respect to U_n: it is called "minimal basis" if it is a basis but no proper part of it is a basis.*

One easily derives from these definitions

16.4. Lemma. *A basis Σ with respect to U_n is characterized by the property that every element $f(\xi)$ of U_n which equals the unit element in every point of Σ is identically the unit element. A minimal basis fulfils the further condition that to every proper subset of it there exist elements of U_n which equal the unit element everywhere on the subset, but not identically*[31]).

The values of all the elements $f(\xi)$ of U_n in a certain point α form a subgroup $U^{(\alpha)}$ of G[32]). If Σ is a basis for U_n, consisting of the points $\alpha, \alpha', \ldots$, we form the direct product

$$U^{(\Sigma)} = U^{(\alpha)} \times U^{(\alpha')} \times \ldots.$$

Now to every element $f(\xi)$ of U_n there corresponds a unique element

$$f^{(\Sigma)} = f(\alpha) \times f(\alpha') \times \ldots$$

of $U^{(\Sigma)}$. This correspondence is, in consequence of 5.2, a homomorphism. But since Σ was supposed to be a basis with respect to U_n, $f^{(\Sigma)}$ is the unit element only if $f(\xi)$ equals the unit element (identically, and therefore) *qua* element of $V_n(G)$, owing to 16.4. Hence the correspondence is an isomorphism, and we have

16.5. Theorem. *If U_n is a subgroup of $V_n(G)$ and Σ a basis with respect to U_n, then U_n is isomorphic with a subgroup of the direct product $U^{(\Sigma)}$, the isomorphism being established by the correspondence*

$$f(\xi) \rightleftarrows f^{(\Sigma)}.$$

---

[29]) E. g. the point $(1, \ldots, 1)$ is irrelevant for every subgroup of $V_n(G)$. For the group $\{1\}$ no point is relevant.

[30]) If β depends on the set consisting of α alone, then it is simply said to depend on α. An irrelevant point depends on every other point.

[31]) And therefore not everywhere on Σ.

[32]) If $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, $U^{(\alpha)}$ is contained in the subgroup of G generated by $a_1, \ldots, a_n$.

If we call the isomorphic image of U_n in $U^{(\Sigma)}$ for the moment U, we conclude from the second part of 16.4

16.6. Corollary. *If Σ is a minimal basis, then the common part of U with every component $U^{(\alpha)}, U^{(\alpha')}, \ldots$ of $U^{(\Sigma)}$ is different from the unit group.*

§ 17.

From the definitions 16.1—16.3 one obtains at once

17.1. Lemma. *If the point α is irrelevant with respect to a group U_n, it is irrelevant with respect to every subgroup of U_n. If the point β depends on the points $\alpha, \alpha', \ldots$ with respect to U_n, then β depends on $\alpha, \alpha', \ldots$ with respect to every subgroup of U_n. A basis with respect to U_n is a basis with respect to every subgroup of U_n.*

Now 5.3 together with 16.5 gives immediately

17.2. Lemma. *The point $\alpha\Theta$ depends on the point α with respect to $V_n(G)$, and therefore with respect to every subgroup of $V_n(G)$*[33]).

This, combined with 16.5, is the reason underlying the statements of § 15.

§ 18.

We specialize now by taking for U_n the commutator group $V'_n(G)$[34] of $V_n(G)$. In this case we obviously have

18.1. Theorem. *With respect to $V'_n(G)$ all those points α_n are irrelevant whose coordinates are permutable with each other.*

We call such a point "Abelian". If G_{α_n} denotes the subgroup of G generated by the coordinates $a_1, \ldots, a_n$ of α_n, the point α_n is Abelian or non-Abelian, according as G_{α_n} is Abelian or non-Abelian. For $V'_n(G)$ only non-Abelian points are relevant.

In our case 16.5 becomes

18.2. Theorem. *If Σ is a basis with respect to $V'_n(G)$ consisting of the points $\alpha, \alpha', \ldots$, then $V'_n(G)$ is isomorphic with a subgroup of the direct product*

$$G'_\alpha \times G'_{\alpha'} \times \ldots.$$

We return for a moment to the example studied in § 15, the second V-group of the symmetric group G in three symbols. Since $x_1^6 = 1$ holds identically in G, the orders of the two generators of $V_2(G)$ divide 6. Hence the index of $V'_2(G)$ in $V_2(G)$ divides 6^2. A basis with respect to $V'_2(G)$ arises from 15.1; for 15.1 is a basis for $V_2(G)$ and therefore a basis for $V'_2(G)$. But for $V'_2(G)$ only the first three points α, β, γ of 15.1 are relevant, the other four being Abelian. Conse-

---

[33]) Here Θ need not be an endomorphism of the whole group G, but may be a homomorphism of one subgroup (generated by the coordinates of α) into another.

[34]) The commutator subgroup of G, $\mathfrak{F}_n$, $V_n(G)$, &c. is denoted by G', $\mathfrak{F}'_n$, $V'_n(G)$, &c.

quently α, β, γ constitute a basis with respect to $V_2'(G)$, and, by 18.2, $V_2'(G)$ is isomorphic with a subgroup of $G_\alpha' \times G_\beta' \times G_\gamma'$. These three direct factors are obviously cyclical of order 3. Hence the order of $V_2'(G)$ divides 3^3 and the order of $V_2(G)$ divides $6^2 \cdot 3^3$.

§ 19.

An identical relation $w(\xi_n) = 1$ is said to "follow" from a set of identical relations, if its left-hand side belongs to the closure of the left-hand sides of the relations in the set, i. e. if its left-hand side is obtained from them by (repeated) multiplication, inversion, and substitution of arbitrary words in the variables for the variables[35]).

For the purpose of determining the identical relations of a group it is sufficient to find a set from which all the identical relations follow. Such a set will be called "complete".

A simple fact will be of great help towards finding the identical relations of a group.

19.1. Theorem. *All the identical relations in a group G follow from a relation*[36])

19.11 $$x_1^k = 1$$

where k is the "common order" of G, i. e. the L. C. M. *of the orders of all the elements of G*[37]), *and "commutator relations", i. e. relations whose left-hand sides belong to the commutator group of the free group of the variables.*

Obviously k is the smallest positive exponent for which 19.11 holds identically in G. If

19.2 $$w(\xi_n) = 1$$

is an arbitrary identical relation in G, then we can write w in the form

$$w(\xi_n) \equiv x_1^{\varkappa_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varkappa_n} \cdot \overline{w}(\xi_n)$$

where $\overline{w}$ is a "commutator function", i. e. contained in the commutator group of the free group $\mathfrak{F}_n$. Substituting now in 19.2 for $x_1, \ldots, x_n$ the words

$$\overline{x}_1(\xi_n) \equiv x_\nu,$$
$$\overline{x}_i(\xi_n) \equiv 1 \text{ for } i = 2, \ldots, n,$$

with ν in turn equal to $1, \ldots, n$, we get the identical relations

19.3 $$x_1^{\varkappa_\nu} = 1, \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

From the definition of k we see that every $\varkappa_\nu$ is divisible by k; hence 19.3 is a consequence of 19.11. Therefore

19.4 $$\overline{w}(\xi_n) = 1$$

---

[35]) Cf. (1), Definition 5.

[36]) Which may be absent.

[37]) If it exists; otherwise there is no relation 19.11.

also is an identical relation of G, and 19.2 follows from 19.4 and 19.11, which proves the theorem[38]). If no k exists such that $x_1^k = 1$ holds identically in G, then all the identical relations are commutator relations. With the help of 19.1 we can easily prove

19.5. **Theorem.** *If k is the smallest positive exponent such that 19.11 holds identically in G, then the factor group of $V_n(G)$ with respect to its commutator group $V_n'(G)$ is the direct product of n cyclical groups of order k. If no such k exists, the factor group is the direct product of n infinite cyclical groups.*

For after making $V_n(G)$ Abelian, there remain $x_i^k = 1$, $i = 1, \ldots, n$, as the only defining relations between the variables. Theorem 19.5 again yields immediately

19.6. **Corollary.** *$V_n(G)$ coincides with its commutator group only in the trivial case $G = \{1\}$. Except for this case, $V_n(G)$ cannot be generated by less than n generators, and all the V-groups of G are actually different.*

§ 20.

We add some simple facts relating to $\mathfrak{V}_n(G)$ and $V_n(G)$.

20.1. **Theorem.** *If G is a direct product*

$$G = G_1 \times G_2,$$

then $\mathfrak{V}_n(G)$ is the meet of $\mathfrak{V}_n(G_1)$ and $\mathfrak{V}_n(G_2)$:

$$\mathfrak{V}_n(G_1 \times G_2) = \mathfrak{V}_n(G_1) \frown \mathfrak{V}_n(G_2).$$

For a function assumes the value 1 everywhere in G if and only if it assumes the value 1 everywhere in both G_1 and G_2.

If the meet is direct, i. e. if $\{\mathfrak{V}_n(G_1), \mathfrak{V}_n(G_2)\} = \mathfrak{F}_n$, then $V_n(G)$ is the direct product of the V-groups of the factors:

$$V_n(G_1 \times G_2) \cong V_n(G_1) \times V_n(G_2).$$

This case arises if the common order of G_1 is prime to that of G_2. For in this case $\mathfrak{V}_n(G_1)$ and $\mathfrak{V}_n(G_2)$ contain powers with relatively prime exponents of every variable, and therefore every variable belongs to their join. But if the common orders k_1 and k_2 of G_1 and G_2 have a common divisor $k > 1$[39]), then $\{\mathfrak{V}_n(G_1), \mathfrak{V}_n(G_2)\}$ is a proper subgroup of $\mathfrak{F}_n$. For then even $\{\mathfrak{V}_n(G_1), \mathfrak{V}_n(G_2), \mathfrak{F}_n'\}$ is a proper subgroup of $\mathfrak{F}_n$, as is seen from 19.1. Hence we have

20.2. **Theorem.** *The V-groups of a direct product of finite groups are the direct products of the corresponding V-groups of the factors, if, and only if, the orders of the factors are prime to each other.*

---

[38]) It can easily be derived from results of Levi's (6).

[39]) k is the common order of G, as is easily seen.

20.3. Corollary. *The V-groups of direct products of groups of prime power order are direct products of groups of prime power order*[40].

20.4. Theorem. *If the r-th commutator group $G^{(r)}$ of G is $\{1\}$, then so is the r-th commutator group $V_n^{(r)}(G)$ of $V_n(G)$. If G is soluble, then so are its V-groups.*

For $G^{(r)}$ is a word-subgroup of G, generated by the values of the r times iterated commutators. Analogous results are obtained if one substitutes any other word-subgroup of G for $G^{(r)}$.

List of references.

G. Birkhoff.
(1) Proc. Cambridge Phil. Soc. 31 (1935), p. 433—454.
W. Burnside.
(2) Quart. Journ. 33 (1902), p. 230—238.
(3) Proc. London Math. Soc. (2) 3 (1905), p. 435—440.
P. Hall.
(4) Proc. London Math. Soc. (2) 36 (1933), p. 29—95.
(5) Quart. Journ. (Oxford Ser.) 7 (1936), p. 134—151.
F. Levi.
(6) Math. Zeitschr. 37 (1933), p. 90—97.
F. Levi und B. L. van der Waerden.
(7) Abh. Hamburg 9 (1932), p. 154—158.
B. H. Neumann.
(8) Jahresber. D. M. V. 42 (1933), p. *126—130.*
(9) Journ. London Math. Soc., 12, III, in print.
K. Reidemeister.
(10) Abh. Hamburg 5 (1926), p. 7—23.
(11) „Einführung in die kombinatorische Topologie“, Braunschweig 1932.
O. Schreier.
(12) Abh. Hamburg 5 (1927), p. 161—183.
I. Schur.
(13) Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. 1911, p. 619—627.
J. H. M. Wedderburn.
(14) Annals of Math. (2) 35 (1934), p. 185—194.

---

[40]) This, of course, can also be derived from the fact that $V_n(G)$ is a subgroup of a direct product whose factors are isomorphic with G or subgroups of G. Cf. §§ 14, 15.

(Eingegangen am 24. 2. 1937.)

Bemerkung zu einem Irreduzibilitätskriterium des Herrn Petterson.

Von

Oskar Perron in München.

I. Herr E. L. Petterson hat kürzlich auf erstaunlich einfache Weise mit Hilfe des Rouchéschen Satzes das folgende Irreduzibilitätskriterium gefunden[1]):

Satz A. *Sei $f(x) = x g(x) + M(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und dem höchsten Koeffizienten* 1. *Wenn es dann eine Zahl ϱ gibt, derart, daß*

$$g(x) \neq 0 \quad \textit{für} \quad |x| < \varrho,$$

$$\varrho\,|g(x)| > |M(x)| \quad \textit{für} \quad |x| = \varrho,$$

$$1 \leqq |M(0)| \leqq \varrho,$$

so ist $f(x)$ irreduzibel.

Bei Anwendung auf die Gleichung

$$\text{(B)} \qquad x(x^m - a) + x^m - b = 0 \quad (a, b \text{ ganz};\ b \neq 0)$$

fand dann Herr Petterson $|a + b| > 2|b|^m$ als hinreichende Irreduzibilitätsbedingung. Beim Beweis ist aber ein Rechenfehler unterlaufen, indem dafür, daß

$$|x^m - a| > |x^m - b| \quad \text{für} \quad |x| = \varrho$$

ist, die Bedingung $|a + b| > 2\varrho^m$ als hinreichend angesehen wurde. Das kann aber schon deshalb nicht stimmen, weil die Bedingung in a und b symmetrisch ist (Gegenbeispiel: $a = 0$, $b = 3$, $\varrho = 1$). Das Resultat ist aber trotzdem richtig und, wie wir sehen werden, aus Satz A erhältlich. In den folgenden Zeilen soll aber aus Satz A noch mehr für die Gleichung (B) herausgeholt werden, und auch gleich für die allgemeinere Gleichung

$$\text{(C)} \qquad x(x^m - a) + c(x^m - b) = 0 \quad (a, c, cb \text{ ganz};\ |b| \geqq 1,\ |c| \geqq 1^{2)}).$$

II. Nach Satz A handelt es sich um die Existenz einer Zahl ϱ, für die

$$\text{(1)} \qquad |a| \geqq \varrho^m,$$

$$\text{(2)} \qquad \varrho\,|x^m - a| > |c(x^m - b)| \quad \text{für} \quad |x| = \varrho,$$

$$\text{(3)} \qquad |bc| \leqq \varrho$$

[1]) Math. Annalen 114 (1937), S. 79.

[2]) b braucht nicht ganz zu sein; nur wegen der späterhin bequemeren Rechnung schreiben wir das konstante Glied in der Produktform $- cb$ statt einfacher $- b$. Die Bedingung $|b| \geqq 1$ werden wir später fallen lassen.

ist. Wir wählen $\varrho = |bc|$; dann ist Bedingung (3) von selbst erfüllt und Bedingung (1) besagt:

$$(1\,\mathrm{a}) \qquad |a| \geqq |bc|^m.$$

Die Bedingung (2) ersetzen wir durch

$$(2\,\mathrm{a}) \qquad \sigma\,|x^m - a| > |x^m - b| \quad \text{für} \quad |x| = |bc|,$$

wobei σ eine Zahl des Intervalles $1 \leqq \sigma \leqq |b|$ bedeutet. Die Forderung (2a), die sich für $\sigma = |b|$ mit (2) deckt, ist um so stärker, wird also ein um so ungünstigeres Kriterium liefern, je kleiner man σ wählt. Für $\sigma = 1$ wird also das ungünstigste Kriterium kommen, für $\sigma = |b|$ das günstigste.

Die Ungleichung (2a) bedeutet, wenn zunächst $\sigma > 1$ ist, für $|x^m|$ das Äußere des Apollonischen Kreises

$$(\mathrm{D}) \qquad \left| x^m - \frac{\sigma^2 a - b}{\sigma^2 - 1} \right| > \frac{\sigma|a-b|}{\sigma^2-1}.$$

Diese Ungleichung ist dann und nur dann für alle x vom absoluten Betrag $|x| = |bc|$ erfüllt, wenn

$$|bc|^m - \frac{|\sigma^2 a - b|}{\sigma^2 - 1} \begin{cases} \text{entweder} > \dfrac{\sigma|a-b|}{\sigma^2-1} \\[2ex] \text{oder} < -\dfrac{\sigma|a-b|}{\sigma^2-1}. \end{cases}$$

Hier scheidet nun die erste Möglichkeit aus, weil sonst

$$|bc|^m > \frac{|\sigma^2 a - b| + \sigma|a-b|}{\sigma^2-1} \geqq \frac{\sigma^2|a| - |b| + |a-b|}{\sigma^2-1} \geqq \frac{\sigma^2|a| - |a|}{\sigma^2-1} = |a|$$

wäre, was der Forderung (1a) widerspricht. Somit bleibt nur die zweite Möglichkeit, d. h.

$$(\mathrm{E}) \qquad |bc|^m < \frac{|\sigma^2 a - b| - \sigma|a-b|}{\sigma^2-1}.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so ist auch (1a) von selbst erfüllt; denn der in (E) auftretende Bruch ist

$$\text{für } \frac{a}{b} \leqq 0: \qquad = \frac{\sigma^2|a| + |b| - \sigma|a| - \sigma|b|}{\sigma^2-1} = \frac{\sigma|a| - |b|}{\sigma+1} < |a|,$$

$$\text{für } 0 < \frac{a}{b} \leqq \frac{1}{\sigma^2}: = \frac{|b| - \sigma^2|a| - \sigma|b| + \sigma|a|}{\sigma^2-1} = \frac{-\sigma|a| - |b|}{\sigma+1} < 0 \leqq |a|.$$

$$\text{für } \frac{1}{\sigma^2} < \frac{a}{b} \leqq 1:$$

$$= \frac{\sigma^2|a| - |b| - \sigma|b| + \sigma|a|}{\sigma^2-1} = \frac{\sigma|a| - |b|}{\sigma-1} \leqq \frac{\sigma|a| - |a|}{\sigma-1} = |a|,$$

$$\text{für } \frac{a}{b} > 1:$$

$$= \frac{\sigma^2|a| - |b| - \sigma|a| + \sigma|b|}{\sigma^2-1} = \frac{\sigma|a| + |b|}{\sigma+1} < \frac{\sigma|a| + |a|}{\sigma+1} = |a|.$$

Somit ist die Bedingung (E), wenn σ eine Zahl des Intervalles $1 < \sigma \leqq |b|$ bedeutet, hinreichend für die Irreduzibilität der Gleichung (C).

Für $\sigma = 1$ tritt an Stelle des Apollonischen Kreises (D) eine Halbebene, und zwar

$$\text{für } a > b\colon\ R(x^m) < \frac{a+b}{2},$$

$$\text{für } a < b\colon\ R(x^m) > \frac{a+b}{2}.$$

Diese Ungleichungen sind dann und nur dann für alle x vom absoluten Betrag $|x| = |bc|$ erfüllt, wenn

$$\text{für } a > b\colon\ |bc|^m < \frac{a+b}{2}, \quad \text{also } a+b > 0,$$

$$\text{für } a < b\colon\ |bc|^m < -\frac{a+b}{2}, \text{ also } a+b < 0.$$

Man kann beide Fälle zusammenfassen in

$$(\mathrm{E}_1) \qquad |bc|^m < \frac{|a+b|}{2}, \quad \operatorname{sign}(a-b) = \operatorname{sign}(a+b).$$

Dieselbe Bedingung ergibt sich auch aus (E) durch den Grenzübergang $\sigma \to 1$.

In (E_1) ist nun die zweite Bedingung überflüssig, da sie eine Folge der ersten ist. In der Tat, wenn $\operatorname{sign}(a-b) = -\operatorname{sign}(a+b)$ wäre, so wäre $(a-b)(a+b) < 0$, also $a^2 < b^2$, $|a| < |b|$ und folglich

$$\frac{|a+b|}{2} \leqq \frac{|a|+|b|}{2} < |b| \leqq |bc| \leqq |bc|^m,$$

was der ersten Bedingung von (E_1) widerspricht. Auch die Bedingung (1a) ist wieder von selbst erfüllt wegen

$$2|bc|^m < |a+b| \leqq |a| + |b| \leqq |a| + |bc| \leqq |a| + |bc|^m.$$

Somit ergibt sich

$$(\mathrm{E}_2) \qquad |bc|^m < \frac{|a+b|}{2}$$

als hinreichende Irreduzibilitätsbedingung für die Gleichung (C). Sie stellt das einfachste, aber nach obigem auch das ungünstigste Kriterium dar, während sich das günstigste aus (E) für $\sigma = |b|$ ergeben muß. Es lautet für $|b| > 1$

$$(\mathrm{E}_3) \qquad |bc|^m < |b| \frac{|ab-1| - |a-b|}{b^2-1},$$

während es für $|b| = 1$ sich mit (E_2) deckt.

Beide Kriterien besagen, daß die Gleichung (C) bei festem m, b, c für alle hinreichend großen $|a|$ irreduzibel ist; aber (E_3) gibt für $|a|$ eine bessere Schranke als (E_2). Für $m = 4$, $b = 2$, $c = 1$ ist z. B. (E_2) erst erfüllt für $a > 30$ und für $a < -34$, (E_3) aber schon für $a > 23$ und für $a < -25$.

III. Auch der Fall $0 < |b| < 1$ läßt sich behandeln, also die Gleichung

$(\overline{C})$ $x(x^m - a) + c(x^m - b) = 0$ $(a, c, cb$ ganz; $0 < |b| < 1, |c| > 1)$.

Die Ungleichung (2a), bei der wieder $\sigma \leqq |b|$ sein muß und die für $\sigma = |b|$ wieder das günstigste Resultat liefert, bedeutet aber diesmal das *Innere* des Apollonischen Kreises:

$$(\overline{D}) \qquad \left| x^m - \frac{b - \sigma^2 a}{1 - \sigma^2} \right| < \frac{\sigma |a - b|}{1 - \sigma^2}.$$

Diese Ungleichung ist dann und nur dann für alle x vom absoluten Betrag $|x| = |bc|$ erfüllt, wenn

$$|bc|^m + \frac{|b - \sigma^2 a|}{1 - \sigma^2} < \frac{\sigma |a - b|}{1 - \sigma^2},$$

oder also

$$(\overline{E}) \qquad |bc|^m < \frac{\sigma |a - b| - |b - \sigma^2 a|}{1 - \sigma^2}.$$

Das ist nun wieder die Bedingung (E), nur stehen in Zähler und Nenner die umgekehrten Vorzeichen. Die Bedingung (1a) ist jetzt wieder von selbst erfüllt; denn der in $(\overline{E})$ auftretende Bruch ist

$$\text{für } \frac{a}{b} \leqq 0: \quad = \frac{\sigma|a| + \sigma|b| - |b| - \sigma^2|a|}{1 - \sigma^2} = \frac{\sigma|a| - |b|}{1 + \sigma} < |a|,$$

$$\text{für } 0 < \frac{a}{b} \leqq 1: = \frac{\sigma|b| - \sigma|a| - |b| + \sigma^2|a|}{1 - \sigma^2} = \frac{-\sigma|a| - |b|}{1 + \sigma} < 0 \leqq |a|,$$

$$\text{für } 1 < \frac{a}{b} \leqq \frac{1}{\sigma^2}: = \frac{\sigma|a| - \sigma|b| - |b| + \sigma^2|a|}{1 - \sigma^2}$$

$$= \frac{\sigma|a| - |b|}{1 - \sigma} \leqq \frac{\sigma|a| - \sigma^2|a|}{1 - \sigma} = \sigma|a| \leqq |a|,$$

$$\text{für } \frac{a}{b} > \frac{1}{\sigma^2}: \quad = \frac{\sigma|a| - \sigma|b| - \sigma^2|a| + |b|}{1 - \sigma^2}$$

$$= \frac{\sigma|a| + |b|}{1 + \sigma} < \frac{\sigma|a| + \sigma^2|a|}{1 + \sigma} = \sigma|a| \leqq |a|.$$

Somit erhalten wir, wenn wir in $(\overline{E})$ den günstigsten Wert $\sigma = |b|$ einsetzen, die folgende mit (E_3) übereinstimmende hinreichende Irreduzibilitätsbedingung für die Gleichung $(\overline{C})$:

$$(\overline{E}_3) \qquad |bc|^m < |b| \frac{|a - b| - |ab - 1|}{1 - b^2}.$$

(Eingegangen am 9. 3. 1937.)

Über die Nullstellen einiger Klassen von Polynomen.

Von

Nikola Obreschkoff in Sofia.

Laguerre[1]) hat folgenden Satz bewiesen: Sei $P(x)$ ein Polynom mit reellen Nullstellen. Setzen wir

$$\frac{1}{P(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots, \tag{1}$$

so hat das Polynom

$$Q_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n \tag{2}$$

höchstens eine reelle Nullstelle.

Laguerres Beweis ist sehr einfach. In der Tat zeigen (1) und (2), daß

$$f(x) = P(x) Q_n(x) = 1 - c'_{n+1} x^{n+1} - \ldots.$$

Weil das Polynom $f(x)$ n Lücken hat, schließt man mittels der Descartesschen Regel, daß $f(x)$ mindestens $n-1$ komplexe Nullstellen haben muß, die notwendig dem Polynom $Q_n(x)$ angehören müssen. Damit ist der Satz bewiesen. In derselben Arbeit verallgemeinert Laguerre dieses Resultat auf die Entwicklung der Funktion $\frac{1}{P^{\omega}(x)}$, wo ω eine positive Zahl ist, und zwar betrachtet er zuerst den Fall $\omega = \frac{1}{q}$ mit ganzzahligem q. Aber sein Beweis ist nicht stichhaltig und man sieht keinen Weg, ihn zu verbessern. Er schließt nämlich folgendermaßen:

Wir setzen

$$\frac{1}{\sqrt[q]{P(x)}} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots \tag{3}$$

und bezeichnen zur Vereinfachung der Schreibweise mit $O(x^n)$ eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x, die mit einem Glied $a_n x^n$ beginnt. Dann hat man aus (3)

$$\frac{1}{\sqrt[q]{P(x)}} = Q_n(x) + O(x^{n+1}),$$

---

[1]) E. Laguerre, Oeuvres, I, Paris, 1898, S. 108–118. Siehe auch: J. Grommer, Journal für die reine und ang. Mathematik 144 (1914), S. 130–131. G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II. Berlin 1925, S. 45 und 230.

woraus man schließt

$$\frac{1}{P(x)} = Q_n^q(x) + O(x^{n+1}).$$

Also treten in dem Polynom $f(x) = P(x)Q_n^q(x) = 1 + O(x^{n+1})$ genau n Lücken auf, und nach der Descartesschen Regel hat dieses Polynom also wenigstens $n-1$ komplexe Nullstellen. Hieraus schließt Laguerre, daß das Polynom $Q_n(x)$ mindestens $n-1$ komplexe Nullstellen hat. In Wirklichkeit kann man nur schließen, das $Q_n(x)$ mindestens $\frac{n-1}{q}$ komplexe Nullstellen, d. h. höchstens $n - \frac{n-1}{q}$ reelle Nullstellen hat. — Zur Betrachtung beliebiger Exponenten macht Laguerre weiterhin einen Grenzübergang, der auch nicht schlüssig ist.

In dieser Arbeit werden wir mittels einer neuen Methode Sätze ableiten, die sich auf viel allgemeinere Funktionen beziehen und auch die Laguerresche Vermutung in wichtigen Fällen zu beweisen gestatten. Wir haben einen Abriß unserer Resultate in einer Note in den Comptes Rendus veröffentlicht[2]).

1. Wir beweisen die folgenden Sätze:

Satz 1. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ positive Zahlen, die wir nach der Größe geordnet denken, ferner $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ reelle Zahlen, die algebraisch kleiner sind als 1 und außerdem der folgenden Bedingung genügen:

Die Summen $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s$ $(1 \leqq s \leqq m)$ sollen, soweit sie nicht ganze Zahlen sind, größte Ganze $[\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s]$ entweder ausschließlich geraden oder ausschließlich ungeraden Charakters enthalten.

Wir setzen:

$$f(x) = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\nu_1}\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)^{\nu_2}\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_m}\right)^{\nu_m}} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots. \tag{1}$$

Dann hat das Polynom

$$P_{p,n}(x) = c_p + c_{p+1}x + \ldots + c_{p+n}x^n \tag{2}$$

höchstens eine reelle Nullstelle, wenn

$$p > -\nu, \quad \nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m.$$

Ferner hat man: Für ungerades n hat das Polynom $P_{p,n}(x)$ keine komplexen Nullstellen in den Winkelräumen

$$-\frac{\pi}{n+1} \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{n+1}, \quad \pi - \frac{\pi}{n+1} \leqq \arg x \leqq \pi + \frac{\pi}{n+1}$$

und für gerades n keine Nullstellen in dem Winkelraum

$$-\frac{\pi}{n+1} \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{n+1}.$$

---

[2]) N. Obreschkoff, Sur un théorème de Laguerre, Comptes Rendus **203** (1936), S. 760.

Beweis: Aus der Cauchy'schen Formel erhält man

$$P_{p,n-1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z^{n+p}}\,\frac{z^n - x^n}{z - x}\,dz,$$

wo C eine einfache geschlossene Kurve ist, die den Nullpunkt umschließt, dagegen keinen der Punkte α_s in ihrem Innern enthält.

Das Integral über einen Kreis $|z| = R$ ist dem Betrag nach kleiner als

$$\frac{K}{R^{p+\nu}} \text{ mit konstantem } K$$

und geht gegen 0, wenn $R \to \infty$. Ferner sieht man unmittelbar, weil $\nu_s < 1$ ist, daß das über einen kleinen Kreis vom Mittelpunkt α_s erstreckte Integral mit abnehmendem Radius gegen 0 geht. Bezeichnen wir also mit L das Schleifenintegral $\alpha_1 \ldots + \infty$, erstreckt längs des positiven reellen Halbstrahles, so finden wir aus (3)

$$(4) \qquad P_{p,n-1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z^{n+p}}\,\frac{z^n - x^n}{z - x}\,dz.$$

Für $\arg f(z)$ ergibt sich

$$\arg f(z) = \eta - \nu_1 \arg(\alpha_1 - z) - \nu_2 \arg(\alpha_2 - z) - \ldots - \nu_m \arg(\alpha_m - z),$$

wenn η eine Konstante ist. Einfache Überlegungen zeigen folgendes:

a) für reelles z hat man am unteren Rande des Querschnittes L

$$\arg(\alpha_s - z) = \begin{cases} \pi & \text{für } z > \alpha_s, \\ 0 & \text{für } z < \alpha_s, \end{cases}$$

b) am oberen Rande hat man

$$\arg(\alpha_s - z) = \begin{cases} -\pi & \text{für } z > \alpha_s, \\ 0 & \text{für } z < \alpha_s. \end{cases}$$

Demnach ist am unteren Rand des Querschnittes für $\alpha_{k-1} < z < \alpha_k$

$$\arg f(z) = \eta - (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{k-1})\pi,$$

und der entsprechende Anteil des Integrals (3) hat den Wert:

$$(5) \qquad \frac{e^{i\eta}}{2\pi i}\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{\alpha_{s+1}}^{\alpha_s} g_p(z)|f(z)|\,e^{-(\nu_1+\ldots+\nu_s)\pi i}\,dz,$$

$$g_p(z) = \frac{z^n - x^n}{z^{n+p}(z - x)}, \qquad \alpha_{m+1} = \infty.$$

Für den oberen Rand muß man nach a) und b) in dem Ausdruck (5) immer π durch $-\pi$ ersetzen. Danach erhält man für den zugehörigen Teil des Integrales

$$(6)\qquad \frac{e^{i\eta}}{2\pi i}\sum_{s=1}^{m}\int_{a_s}^{a_s+1} g_p(z)\,|f(z)|\,e^{(\nu_1+\dots+\nu_s)\pi i}\,dz.$$

Aus den Formeln (5) und (6) erhält man für $P_{p,\,n-1}(x)$

$$(7)\qquad \pi e^{-i\eta}P_{p,\,n-1}(x)=\sum_{s=1}^{m}\sin(\nu_1+\dots+\nu_s)\pi\int_{a_s}^{a_s+1} g_p(z)\,|f(z)|\,dz.$$

Weil die Zahlen $[\nu_1+\dots+\nu_s]$, $1\leqq s\leqq m$, (soweit $\nu_1+\dots+\nu_s$ nicht ganzzahlig und also $\sin(\nu_1+\dots+\nu_s)\pi=0$ ist) entweder sämtlich gerade oder sämtlich ungerade sind, sind ihre sin entweder sämtlich positiv oder sämtlich negativ.

Sei n ungerade. Für $z>0$ und reelles x ist die Funktion $g_p(z)$ positiv und die Formel (7) beweist, daß $P_{p,\,n-1}(x)\neq 0$ für jedes reelle x.

Sei andererseits n gerade. Aus (7) folgt

$$\pi e^{-i\eta}P'_{p,\,n-1}(x)=\sum_{s=1}^{m}\sin(\nu_1+\dots+\nu_s)\pi\int_{a_s}^{a_s+1} \varphi_p(z)\,|f(z)|\,dz,$$

wo

$$\varphi_p(z)=z^{-n-p}\frac{d}{dx}\left(\frac{z^n-x^n}{z-x}\right).$$

Man sieht leicht ein, daß für $z>0$ und reelles x die Funktion $\varphi_p(z)$ keinen Zeichenwechsel hat. Also hat $P'_{p,\,n-1}(x)$ keine reellen Nullstellen und das Polynom $P_{p,\,n-1}(x)$ hat nur eine reelle Nullstelle.

Damit ist der erste Teil des Satzes 1 bewiesen. Wir beweisen jetzt den zweiten Teil. Sei x eine komplexe Zahl, $x=re^{i\varphi}$, $0\leqq\varphi<2\pi$, und z reell. Für den Imaginärteil $\mathfrak{I}(g_p(z))$ der Funktion $g_p(z)$ erhält man leicht die Formel

$$z^{n+p}\,\mathfrak{I}(g_p(z))=\frac{r\,\psi(r)}{|z-x|^2},\quad \psi(r)=z^n\sin\varphi+r^n\sin(n-1)\varphi-z\,r^{n-1}\sin n\varphi.$$

Wir haben $\psi(0)=z^n\sin\varphi>0$ für $0<\varphi<\pi$, $z>0$ und

$$\psi'(r)=-z(n-1)r^{n-2}\sin n\varphi+n\,r^{n-1}\sin(n-1)\varphi.$$

Die Wurzeln der Gleichung $\psi'(r)=0$ sind $r_0=0$ und

$$r_1=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\sin n\varphi}{\sin(n-1)\varphi}\cdot z,$$

und wir haben

$$\frac{\psi(r_1)}{z^n\sin\varphi}=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\frac{\sin n\varphi}{n\sin\varphi}\left[\frac{\sin n\varphi}{\sin(n-1)\varphi}\right]^{n-1}.$$

Wir betrachten die Funktion

$$h(\varphi) = \sin n\varphi - n \sin \varphi.$$

Wir haben $h(0) = 0$ und $h'(\varphi) = n(\cos n\varphi - \cos\varphi) \leqq 0$ für

$$0 \leqq \varphi \leqq \frac{2\pi}{n+1}.$$

Also ist für diese Werte von φ auch $h(\varphi) \leqq 0$. Hiernach betrachten wir die Funktion

$$\eta(\varphi) = (n-1)\sin n\varphi - n\sin(n-1)\varphi,$$

für die $\eta(0) = 0$,

$$\eta'(\varphi) = n(n-1)[\cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi] \leqq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{n}.$$

Daher ist für diese Werte von φ auch $\eta(\varphi) \leqq 0$. Aus den erhaltenen Ungleichungen folgt $\psi(r_1) > 0$ für $0 < \varphi \leqq \frac{\pi}{n}$. Andererseits ist $\psi(\infty) > 0$, während $\psi(-\infty)$ das Vorzeichen $(-1)^n$ hat. Da die Zahl r_1 positiv ist, hat man, wenn n gerade ist, $\psi(r) > 0$ für $-\infty < r < +\infty$ und, wenn n ungerade ist, $\psi(r) > 0$, $0 < r < \infty$.

Aus der Formel (7) schließt man

$$(8) \qquad \Im\left(\pi e^{-i\eta} P_{p,n-1}(x)\right) = \sum_{s=1}^{m} \sin(\nu_1 + \ldots + \nu_s)\pi \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \Im(g_p(z))\,|f(z)|\,dz.$$

Daraus sieht man sofort, daß bei geradem n immer $P_{p,n-1}(x) \neq 0$ für $-\frac{\pi}{n} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{n}$, $-\infty < r < \infty$ der Fall ist und bei ungeradem n immer $P_{p,n-1}(x) \neq 0$ für $-\frac{\pi}{n} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{n}$, $0 < r$.

Damit ist der Beweis des Satzes 1 vollständig.

Satz 2. Unter denselben Bedingungen wie für Satz 1 besteht das folgende Ergebnis: *Für $n > -\nu$ verschwindet die Funktion $R_n(x) = f(x) - P_{0,n-1}(x)$ abgesehen vom Nullpunkt nicht in der ganzen durch den positiv reellen Querschnitt $\alpha_1 \ldots + \infty$ aufgeschlitzten Ebene.*

Beweis: Für $R_n(x)$ erhält man nach der früheren Methode die Formel

$$(9) \qquad x^{-n}\pi e^{-i\eta} R_n(x) = \sum_{s=1}^{m} \sin(\nu_1 + \ldots + \nu_s)\pi \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi(z)\,|f(z)|\,dz,$$

wo

$$(10) \qquad \varphi(z) = \frac{1}{z^n(z-x)}.$$

Wenn x reell ist, $x < \alpha_1$, hat man $\varphi(z) > 0$ und der Satz folgt unmittelbar aus (9).

Wenn $x = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, so ist

$$\Im\left(x^{-n}\pi e^{-i\eta} R_n(x)\right) = \sum_{s=1}^{m} \sin(\nu_1 + \ldots + \nu_s)\pi \int_{a_s}^{a_s+1} \frac{\beta}{(z-\alpha)^2+\beta^2} |f(z)| \frac{dz}{z^n}.$$

Also

$$R_n(x) \neq 0.$$

Aus Satz 1 folgt augenscheinlich die folgende Aussage:

Sei $P(x)$ ein Polynom m-ten Grades mit nur reellen positiven Wurzeln, sei ferner ω eine reelle Zahl, so daß $-\frac{1}{m} < \omega < \frac{1}{m}$. Setzt man dann

$$\frac{1}{P^{\omega}(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

so hat das Polynom

$$c_p + c_{p+1} x + \ldots + c_{p+n} x^n, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, n = 1, 2, 3, \ldots,$$

höchstens eine reelle Wurzel.

Hierdurch ist ein Teil der Laguerreschen Vermutung bestätigt.

Satz 3. Sei $f(x)$ eine Funktion, die den Bedingungen des Satzes 1 genügt. *Sei für gerades n ferner $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n$ ein reelles Polynom, das für kein reelles x sein Vorzeichen wechselt, dann hat das Polynom*

$$U_{p,n}(x) = \lambda_0 c_p + \lambda_1 c_{p+1} x + \ldots + \lambda_n c_{p+n} x^n, \quad p > -\nu$$

keine reellen Nullstellen. Ebenso hat für ungerades n das Polynom $U_{p,n}(x)$ höchstens eine reelle Nullstelle, wenn $\lambda'(x)$ keine Zeichenwechsel für reelle x hat.

Sei $h(x)$ ein reelles Polynom

$$h(x) = h_0 + h_1 + \ldots + h_n - h_0 x - h_1 x^2 - \ldots - h_n x^{n+1}$$

derart, daß das Polynom $\frac{h(x)}{1-x} = H(x)$ für $-\infty < x < \infty$ keinen Zeichenwechsel hat, dann hat das Polynom

$$V_{p,n}(x) = h_0 \cdot P_{p,0}(x) + h_1 P_{p,1}(x) + \ldots + h_n P_{p,n}(x)$$

für gerades n keine reellen Nullstellen. Wenn $H'(x)$ für $-\infty < x < +\infty$ keinen Vorzeichenwechsel hat, so hat das Polynom $V_{p,n}(x)$ für ungerades n höchstens eine reelle Nullstelle.

Beweis: Mit Hilfe des gleichen Gedankenganges wie bei dem Satz 1 erhält man die Formeln

$$\pi e^{-i\eta} U_{p,n}(x) = \sum_{s=1}^{m} \sin(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s)\pi \int_{a_s}^{a_s+1} \lambda\left(\frac{x}{z}\right) |f(z)| \frac{dz}{z^{p+1}},$$

$$\pi e^{-i\eta} V_{p,n}(x) = \sum_{s=1}^{m} \sin(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s)\pi \int_{a_s}^{a_s+1} H\left(\frac{x}{z}\right) |f(z)| \frac{dz}{z^{p+1}},$$

aus denen der Satz leicht folgt.

Nimmt man beispielsweise

$$\lambda(x) = 1 + x + \ldots + x^n,$$

so erhält man den ersten Teil vom Satz 1. Ein anderer Spezialfall ergibt sich daraus, daß, wie leicht zu sehen, das Polynom

$$\lambda(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

höchstens eine reelle Nullstelle hat. Also hat nach Satz 3 das Polynom

$$c_p + \frac{c_{p+1}}{1!} x + \frac{c_{p+2}}{2!} x^2 + \ldots + \frac{c_{p+n}}{n!} x^n$$

höchstens eine reelle Nullstelle.

2. Wir wollen schließlich einige Sätze beweisen für den Fall, daß die Zahlen α_s beiderlei Vorzeichen haben.

Satz 4. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ positive Zahlen, die wir nach der Größe geordnet denken, und $\beta_l, \beta_{l-1}, \ldots, \beta_1$ negative Zahlen in der gleichen Anordnung. Ferner seien $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ reelle Zahlen, die (algebraisch) kleiner sind als 1 und deren Summen $\nu_1 + \ldots + \nu_s, \mu_1 + \ldots + \mu_r$ $(1 \leqq s \leqq m, 1 \leqq r \leqq l)$ einer analogen Bedingung genügen wie bei Satz 1.

Enthalten diese Summen, soweit sie nicht ganze Zahlen sind, größte Ganze $[\nu_1 + \ldots + \nu_s]$, $[\mu_1 + \ldots + \mu_r]$ *entweder nur geraden oder nur ungeraden Charakters, dann hat das Polynom*

$$P_{p,n}(x) = c_p + c_{p+1} x + \ldots c_{p+n} x^n, \quad p > -\mu - \nu$$

für gerades $p + n$ *höchstens eine reelle Nullstelle.*

Haben dagegen die Zahlen $1 + [\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s], [\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r]$ *entweder alle geraden oder alle ungeraden Charakter, dann hat das Polynom* $P_{p,n}(x)$ *für ungerades* $p + n$ *höchstens eine reelle Nullstelle.*

Beweis: Es sei C eine einfache geschlossene Kurve, die den Nullpunkt umschließt, aber die Punkte α_s und β_r in ihrem Äußern läßt, dann ist

$$P_{p,n-1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+p}} \cdot \frac{z^n - x^n}{z - x} dz.$$

Mit Hilfe der früher gebrauchten Überlegungen kann man den Integrationsweg durch die beiden Schleifenwege $L_1(\alpha_1 \ldots \infty)$ längs der positiven reellen Achse und $L_2(-\infty \ldots \beta_1)$ längs der negativen reellen Achse ersetzen. Nimmt man als Ausgangspunkt den Punkt $z = \infty$ auf dem unteren Rande des Schleifenwegs L_1, so findet man für das Argument φ von $f(z)$

$$\varphi = \eta - (\mu_1 + \ldots + \mu_l + \nu_1 + \ldots + \nu_m)\pi = \eta - (\mu + \nu)\pi.$$

Dann ergibt unser früherer Beweisgang, daß der vom Schleifenweg L_1 herrührende Teil des Integrales gleich ist

$$(11)\quad \frac{e^{i(\eta-\mu\pi)}}{\pi}\sum_{s=1}^{m}\sin(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_s)\pi\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} g_p(z)\,|f(z)|\,dz,\qquad \alpha_{m+1}=\infty.$$

Für φ erhält man auf dem oberen Rand der Schleife L_1 den Wert $\varphi=\eta\pi-\mu\pi+\nu\pi$. Um φ für $z=-\infty$ auf dem oberen Rand der Schleife L_2 zu finden, hat man zu berücksichtigen, daß die Argumente der Zahlen (α_s-z), (β_r-z) um π zunehmen, wenn z von dem Punkte $+\infty$ auf dem oberen Rand von L_1 bis zum Punkte $z=-\infty$ auf dem oberen Rand von L_2 läuft. Also hat an dem letzteren Punkt φ den Wert

$$\varphi=\eta-\mu\pi+\nu\pi-(\mu+\nu)\pi=\eta-2\mu\pi.$$

Damit ergibt sich, daß der von der Schleife L_2 herrührende Bestandteil des Integrales gleich ist

$$(12)\qquad -\frac{e^{i(\eta-\mu\pi)}}{\pi}\sum_{s=1}^{l}\sin(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_s)\pi\int_{\beta_{s+1}}^{\beta_s} g_p(z)\,|f(z)|\,dz,$$
$$\beta_{l+1}=-\infty.$$

Aus (11) und (12) zusammen erhält man also mit der neuen Bezeichnung $\eta_1=\eta-\mu\pi$ für $P_{p,n-1}(x)$ den Ausdruck

$$(13)\quad \pi e^{-i\eta_1}P_{p,n-1}(x)=\sum_{s=1}^{m}\sin(\nu_1+\ldots+\nu_s)\pi\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} g_p(z)\,|f(z)|\,dz$$
$$-\sum_{s=1}^{l}\sin(\mu_1+\ldots+\mu_s)\pi\int_{\beta_{s+1}}^{\beta_s} g_p(z)\,|f(z)|\,dz.$$

Setzen wir $t=\frac{x}{z}$, so erhält die Funktion $g_p(z)$ die Gestalt

$$g_p(z)=\frac{1}{z^{p+1}}\cdot\frac{1-t^n}{1-t}.$$

Im Falle von ungeradem p und ungeradem n ist $\frac{1-t^n}{1-t}>0$ und es wird für jedes reelle x und z die Funktion $g_p(z)>0$ sein. Im Falle von geradem p und ungeradem n wird $z\cdot g_p(z)>0$ für beliebiges reelles x.

Betrachten wir weiter die Funktion

$$\psi(x)=\frac{d}{dx}g_p(z)=\frac{1}{z^{p+2}}\frac{d}{dt}\frac{1-t^n}{1-t}.$$

Man findet leicht: Bei geradem n besteht für gerades p die Ungleichung $\psi(x)>0$, $-\infty<z<\infty$, und für ungerades p die Ungleichung $z\,\psi(x)>0$, für beliebiges reelles x.

Ferner ergibt sich aus der Formel (13)

$$(14)\quad \pi e^{-i\eta_1} P'_{p,\,n-1}(x) = \sum_{s=1}^{m} \sin(\nu_1 + \dots + \nu_s)\,\pi \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \psi(x)\,|f(z)|\,dz$$

$$- \sum_{s=1}^{l} \sin(\mu_1 + \dots + \mu_s)\,\pi \int_{\beta_{s+1}}^{\beta_s} \psi(x)\,|f(z)|\,dz.$$

Aus den obigen Abschätzungen über g_p und ψ und aus den Formeln (13) und (14) folgt leicht der angekündigte Satz.

Satz 5. *Unter denselben Bedingungen wie bei Satz 4 besteht das folgende Ergebnis: Wenn die Zahlen*

$$1 + [\nu_1 + \dots + \nu_s],\quad [\mu_1 + \dots + \mu_\tau],\quad s = 1, 2, \dots, m;\quad \tau = 1, 2, \dots, q,$$

soweit sie nicht ganzzahlig sind, entweder sämtlich geraden, oder sämtlich ungeraden Charakter haben, dann ist die Funktion

$$R_n(x) = f(x) - (c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}),$$

für gerades n in der ganzen Ebene mit Ausnahme der reellen Achse von Null verschieden. Besitzen dagegen die Zahlen $[\nu_1 + \dots + \nu_s]$, $[\mu_1 + \dots + \mu_r]$, $s = 1, 2, \dots, m$, $r = 1, 2, \dots, l$, die angegebene Eigenschaft, dann ist die Funktion $R_n(x)$ für ungerade n in demselben Gebiet von 0 verschieden. Dabei wird vorausgesetzt, daß $n > -\mu - \nu$ ist.

Beweis: Man findet für $R_n(x)$ die Formel

$$x^{-n} e^{-i\eta_1} R_n(x) = \sum_{s=1}^{m} \sin(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_s)\,\pi \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi(z)\,|f(z)|\,dz$$

$$- \sum_{\tau=1}^{l} \sin(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\tau)\,\pi \int_{\beta_{\tau+1}}^{\beta_\tau} \varphi(z)\,|f(z)|\,dz,$$

wo

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^n (z - x)}.$$

Ist $x = \alpha + i\beta$, so kommt

$$\Im(\varphi(z)) = \frac{\beta}{z^n[(z-\alpha)^2 + \beta^2]}$$

und also hat $x^{-n} e^{-i\eta_1} \cdot R_n(x)$ einen von 0 verschiedenen Imaginärteil.

Man kann natürlich auch für den Fall von Nullstellen beiderlei Zeichens Sätze ableiten, die den früheren Sätzen über die komplexen Nullstellen und über die linearen Kombinationen der Polynome $P_{p,n}(x)$ entsprechen.

Die Anwendung des Satzes 4 auf die Laguerresche Vermutung gestaltet sich folgendermaßen:

Ist $\frac{1}{\omega}$ *größer als die Anzahl der Nullstellen des Polynoms* $P(x)$ *von Formel* (1), *so haben die Polynome* $Q_{2n}(x)$ *höchstens eine Nullstelle.* Dieses Resultat ist weniger vollständig als dasjenige bei nur positiven Nullstellen.

[Zusatz bei der Korrektur.] Kürzlich hat Herr Tschakaloff mit einer anderen Methode gezeigt, daß die Polynome $P_{0,n}(x)$ höchstens eine reelle Nullstelle haben, wenn die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ sämtlich positiv sind [„Sur un problème de Laguerre", Comptes Rendus 204 (15. 3. 1937); siehe auch Chermanesen, ebendort 14. 6. 1937].

(Eingegangen am 8. 3. 1937.)

A note on a theorem of Szegö.

Von

R. Wilson in Swansea (Wales).

Szegö proved the following theorem[1]):

Theorem I. *If among the coefficients of $f(z) = \Sigma c_n z^n$ there is only a finite number of different numbers, then either $f(z) = Q(z)/(1 - z^m)$, where $Q(z)$ is a polynomial and m a positive integer, or else $f(z)$ is not continued beyond $|z| = 1$.*

Now consider a function $f(z)$ consisting of the sum of two functions, $f_1(z)$ possessing only singularities of algebraic-logarithmic type on its circle of convergence $|z| = 1$, of greatest weight[2]) $[\sigma, k]$, and $f_2(z)$ of weight $[\sigma', k']$, less than $[\sigma, k]$, on its circle of convergence $|z| = 1$. The singularities of $f(z)$ of weight $[\sigma, k]$ on $|z| = 1$ are called the *dominant singularities*[3]) of $f(z)$ on $|z| = 1$. Their dominant elements are evidently of algebraic-logarithmic type. We prove the following theorem concerning functions with dominant singularities of algebraic-logarithmic type[4]) on the circle of convergence:

Theorem II. *If $f(z)$ has on $|z| = 1$ dominant singularities of algebraic-logarithmic type and if the coefficients of $f(z) = \Sigma c_n z^n$ have only a finite number of limiting values, all of which are finite and one at least non-zero, then the dominant singularities have each a dominant element*

---

[1]) Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften (1922), S. 88—91.

[2]) A function is said to have an algebraic-logarithmic singularity at the point $z = z'$ if it can be represented in the neighbourhood of this point by the sum of a finite number of terms of the form $(z - z')^{-s} \{\log(z - z')\}^k \varphi(z)$, where s is complex, k a non-negative integer and $\varphi(z)$ is regular and non-zero at $z = z'$. The expression given is said to be of *type* (s, k). If $s \neq 0, -1, -2, \ldots$ the *weight* of the element is $[\sigma, k]$, where $R(s) = \sigma$; if $s = 0, -1, -2, \ldots$ and $k > 0$, the weight is $[s, k-1]$, while the weight of a regular point is $[-\infty, 0]$. The weight $[\sigma, k]$ is said to be greater than the weight $[\sigma', k']$ if either $\sigma > \sigma'$ or $\sigma = \sigma'$ and $k > k'$. The weight of a singularity is defined to be the greatest of the weights of the component elements. Vide R. Jungen, Commentarii Mathematici Helvetici 3 (1931), p. 274.

[3]) R. Wilson, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 42 (1936), p. 211.

[4]) Strictly speaking it is the dominant elements of the dominant singularities which are of algebraic-logarithmic type. The shorter phrase is used for convenience.

which is a simple pole and they are situated at some of the points $e^{2\pi i l/m}$, *where m is a certain positive integer.*

On writing

$$c_n = c'_n + \varepsilon_n,$$

where the number of different c'_n is finite and

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0,$$

we see that

$$\Sigma c_n z^n = \Sigma c'_n z^n + \Sigma \varepsilon_n z^n. \tag{1}$$

Since the c_n are bounded and an infinite number of the c'_n are different from zero, it follows that the weight of $f(z)$ on $|z| = 1$ is [1, 0].

Now the function $\Sigma \varepsilon_n z^n$ cannot contain any of the dominant singularities of $f(z)$ on $|z| = 1$, for if this were the case a *positive* constant C would exist such that[5])

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = C,$$

in contradiction to the hypothesis.

Let $L(z)$ be the polynomial which reduces the weight of $f(z)$ on $|z| = 1$, and write

$$L(z)\, \Sigma c_n z^n = \Sigma \theta_n z^n, \quad L(z)\, \Sigma \varepsilon_n z^n = \Sigma \eta_n z^n. \tag{2}$$

Since the weight of $L(z)\, \Sigma c_n z^n$ on $|z| = 1$ is less than [1, 0]

$$\lim_{n \to \infty} \theta_n = 0, \tag{3}$$

and since the weight of $L(z)\, \Sigma \varepsilon_n z$ cannot exceed that of $\Sigma \varepsilon_n z^n$[6])

$$\lim_{n \to \infty} \eta_n = 0. \tag{4}$$

From (1)

$$L(z)\, \Sigma c_n z^n = L(z)\, \Sigma c'_n z^n + L(z)\, \Sigma \varepsilon_n z^n, \tag{5}$$

and from (2) and (5)

$$\Sigma c''_n z^n = L(z)\, \Sigma c'_n z^n = \Sigma \theta_n z^n - \Sigma \eta_n z^n. \tag{6}$$

By hypothesis the number of c'_n which are different is finite, and since $L(z)$ is a polynomial, the same is true of the c''_n. Thus, either there is an infinite number of c''_n each equal to a non-vanishing constant, or every c''_n, from a certain index onwards, is zero. That the last-named conclusion is correct follows from (3), (4) and (6), which give the result

$$\lim_{n \to \infty} c''_n = \lim_{n \to \infty} \theta_n - \lim_{n \to \infty} \eta_n = 0.$$

Hence $L(z)\, \Sigma c'_n z^n = M(z)$, where $M(z)$ is a polynomial. Employing the same conclusion as in Szegö's proof of Theorem I, we deduce that

---

[5]) R. Wilson, loc. cit. p. 213.

[6]) Ibid. pp. 211—212.

$\Sigma c'_n z^n$ is of the form $Q(z)/(1-z^m)$, where $Q(z)$ is a polynomial and m a positive integer. Since $Q(z)$ and $(1-z^m)$ may not be prime to one another we can only state that *the simple poles are at some of the points* $e^{2\pi i l/m}$, although if the coefficients are all real (from a certain index onwards) these points are conjugate complex points on $|z| = 1$, including possibly $z = 1$ and $z = -1$, while if the coefficients are positive the point $z = 1$ is certainly included[7]).

We have shown that $\Sigma \varepsilon_n z^n$ cannot contain any of the dominant singularities of $f(z)$ on $|z| = 1$, and it therefore follows from (1) that the dominant singularities of $\Sigma c_n z^n$ on $|z| = 1$ are also those of $\Sigma c'_n z^n$, at least in so far as their dominant elements are concerned.

The example

$$(1-z^2)^{-1} + \log(1-z)$$

shows that a dominant singularity may have a non-polar component of smaller weight.

These two remarks show that the dominant elements of the dominant singularities of $f(z)$ on $|z| = 1$ are simple poles at some of the points $e^{2\pi i l/m}$.

---

[7]) R. Wilson, loc. cit. pp. 219—220.

(Eingegangen am 23. 2. 1937.)

Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.

Die Regularitätshüllen niederdimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Von

Karl Stein in Münster (Westf.)[1]).

Wenn eine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ auf dem Rande einer Hyperkugel $\mathfrak{K}$ regulär ist, so ist sie auch regulär und eindeutig in das ganze Innere von $\mathfrak{K}$ hinein fortsetzbar. Setzt man nun die Regularität der Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ nicht mehr für die ganze Oberfläche von $\mathfrak{K}$ voraus, sondern läßt ein kleines, etwa durch eine Hyperebene abgeschnittenes Stück fort, so braucht $f(z_1, \ldots, z_n)$ nicht mehr in der gesamten Hyperkugel regulär zu sein. Es fragt sich aber, ob es auch jetzt noch ein $2n$-dimensionales Gebiet gibt, in das sich jede Funktion, die auf dem Rest der Oberfläche von $\mathfrak{K}$ regulär ist, regulär fortsetzen läßt oder ob eine solche Erscheinung nur eintritt, wenn für den gesamten Rand eines Bereiches die Regularität vorausgesetzt wird. Können überhaupt nichtgeschlossene $(2n\text{-}1)$-dimensionale Hyperflächenstücke $2n$-dimensionale Regularitätshüllen[2]) besitzen?

Die Untersuchung dieser Fragen ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Zunächst beschränken wir uns auf Funktionen zweier komplexer Veränderlichen. Wir beginnen in § 1 mit dem Beweis einiger für das folgende grundlegenden Sätze über die Regularitätshüllen spezieller zwei- und dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. In § 2 untersuchen wir die Frage, unter welchen Bedingungen die Hüllen beliebiger dreidimensionaler Stücke eines vorgegebenen, zweimal stetig differenzierbaren Hyperflächenstücks $\mathfrak{F}$ vierdimensionale Teile enthalten können. Als notwendig und hinreichend hierfür stellt sich heraus, daß der Levische Differentialausdruck auf keiner dreidimensionalen Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{F}$ verschwindet, daß $\mathfrak{F}$ also ein nichtanalytisches Hyperflächenstück ist. Dies Ergebnis läßt sich auf $(2n\text{-}1)$-dimensionale Hyperflächenstücke im Raum von n komplexen Veränderlichen übertragen. Ein Beispiel zeigt, daß die

---

[1]) Seminar Prof. Behnke. — Diese Arbeit ist von der phil. u. nat. Fakultät der Universität Münster als Dissertation angenommen worden.

[2]) Zum Begriff der Regularitätshülle vergleiche H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Erg. d. Math. u. i. Grenzgeb. (1934), abgekürzt: B.-Th., Bericht.

Hülle eines dreidimensionalen Hyperflächenstücks verschiedene getrennte vierdimensionale Bereiche enthalten kann. In den §§ 3 und 4 beweisen wir für die Spezialfälle Reinhardtscher und Hartogsscher Hyperflächen Aussagen über den Verlauf der Regularitätshüllen im Großen. Zu § 3 ist zu bemerken, daß die dort gefundenen Ergebnisse unmittelbar aus bekannten Sätzen über Regularitätshüllen Reinhardtscher Körper folgen, wenn man sich nur auf eindeutige Funktionen beschränkt[3]). In der vorliegenden Arbeit lassen wir diese Einschränkung fallen; unsere Sätze ergeben sich durch Anwendung der auch in den §§ 1 und 2 benutzten Beweismethoden. § 5 enthält Aussagen über Regularitätshüllen zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten im Raum zweier komplexer Veränderlichen. Es zeigt sich, daß die Regularitätshülle einer solchen Mannigfaltigkeit zwei-, drei- und vierdimensionale Stücke enthalten kann. Für jeden dieser Fälle wird ein Beispiel angegeben.

Es sei noch bemerkt, daß fast alle erhaltenen Ergebnisse auch für Meromorphiehüllen gelten, denn der Kontinuitätssatz in der Formulierung von Kneser[4]), der beim Beweis der grundlegenden Sätze in § 1 eine entscheidende Rolle spielt, gilt auch für meromorphe Funktionen. Lediglich an zwei Stellen stößt eine solche Übertragung noch auf Schwierigkeiten.

Um den Gang der späteren Untersuchungen nicht zu unterbrechen, wollen wir hier den Begriff der **Regularitätshülle eines Hyperflächenstücks** in folgender Weise präzisieren:

Gegeben sei ein k-dimensionales Hyperflächenstück $\mathfrak{F}$ ($k < 2n$). Man betrachte die Menge $\mathfrak{M}$ der Funktionen $f(z_1, \ldots, z_n)$, die in einem vorgegebenen Punkt P_0 von $\mathfrak{F}$ regulär sind und sich von hier aus längs jedes auf $\mathfrak{F}$ gelegenen Weges regulär fortsetzen lassen[5]). Dann sei unter der Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ von $\mathfrak{F}$ eine Punktmenge verstanden, die folgendermaßen zu erhalten ist: Man gehe aus von den Funktionselementen der zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Funktionen in P_0. Es sollen nun alle die Punkte zu $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ gehören, in die hinein sich alle diese Funktionselemente von P_0 aus gleichzeitig fortsetzen lassen. Dabei ist jeder Punkt

[3]) Siehe B.-Th. Bericht sowie H. Behnke und E. Peschl, Die unbeschränkten Reinhardtschen Körper, Math. Annalen 112 (1936).

[4]) Vgl. H. Kneser, Der Satz von dem Fortbestehen der wesentlichen Singularitäten einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen, Jahresber. Deutsch. Math.-Vereinigung 41 (1932) und: Ein Satz über die Meromorphiebereiche analytischer Funktionen von mehreren Veränderlichen, Math. Annalen 106 (1932). In der Kneserschen Formulierung des K.-S. ist die Voraussetzung der Eindeutigkeit nicht ausdrücklich angegeben. Vgl. die hierauf bezügliche Bemerkung von Behnke, Math. Annalen 113 (1936), S. 392.

[5]) Wir verlangen nicht, daß die Funktionen der Menge $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{F}$ eindeutig bleiben.

von $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ gekennzeichnet durch seine Koordinaten und durch die Menge der Funktionselemente, die in ihm durch gleichzeitige Fortsetzung der zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Funktionselemente längs eines gewissen in P_0 beginnenden Weges entstehen. Zwei Punkte P_1 und P_2 von $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ mit gleichen Koordinaten sollen dann und nur dann voneinander verschieden sein, also in verschiedenen „Blättern" liegen, wenn es in P_0 mindestens ein zu $\mathfrak{M}$ gehörendes Funktionselement $f(P_0)$ gibt, so daß die gleichzeitigen Fortsetzungen, die zu P_1 und P_2 führen, in diesen Punkten aus $f(P_0)$ verschiedene Funktionselemente erzeugen[5a]).

Inhaltsübersicht.

§ 1.

Folgerungen aus dem Kontinuitätssatz.

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf Funktionen zweier komplexer Veränderlichen. Wir beweisen:

Satz 1: *Sei $\mathfrak{D}$ ein in der Hyperebene $\mathfrak{Y}$ gelegener beschränkter (dreidimensionaler) Bereich mit zusammenhängendem Rande. $f(w, z)$ sei eine auf dem Rande von $\mathfrak{D}$ eindeutige und analytische (bzw. meromorphe) Funktion. Dann läßt sich $f(w, z)$ eindeutig und analytisch (bzw. meromorph) in das ganze Innere von $\mathfrak{D}$ hinein fortsetzen*[5b]).

[5a]) Es ist klar, daß in dieser Definition von $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ die Wahl des Punktes P_0 auf $\mathfrak{F}$ keine wesentliche Rolle spielt.

[5b]) Dieser Satz ist äquivalent mit einem von Severi formulierten entsprechenden Satz über Funktionen einer komplexen und einer reellen Veränderlichen. Der von Severi gegebene Beweis erfaßt jedoch nur gewisse spezielle dreidimensionale Bereiche und bezieht sich nur auf reguläre Funktionen. Vgl. F. Severi, Una proprietà fondamentale dei campi di olomorphismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa, Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, Rendiconti (6) 15 (1932), S. 487—490. — Einen für beliebige Bereiche mit zusammenhängendem Rande, aber auch nur für reguläre Funktionen gültigen Beweis gab Arthur B. Brown an. Vgl. Arthur B. Brown, On certain analytic continuations and analytic homeomorphisms, Duke Mathematical Journal 2, Nr. 1 (1936), S. 20—28. — Der von uns geführte Beweis bezieht sich in gleicher Weise auf reguläre wie auf meromorphe Funktionen.

Beweis: Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{Y}$ die Hyperebene $x = 0$ ist. Wegen des regulären (bzw. meromorphen) Verhaltens von $f(w, z)$ auf dem Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{D}$ gibt es ein dreidimensionales, $\mathfrak{R}$ umfassendes Gebiet in $\mathfrak{Y}$, in dem $f(w, z)$ gleichfalls regulär (bzw. meromorph) und eindeutig bleibt. Daher dürfen wir $\mathfrak{D}$ ersetzen durch einen Bereich $\mathfrak{D}^*$ mit folgenden Eigenschaften:

1. der Rand von $\mathfrak{D}^*$ ist zusammenhängend,
2. $f(w, z)$ ist auf dem Rand von $\mathfrak{D}^*$ eindeutig und analytisch (bzw. meromorph),
3. $\mathfrak{D}^*$ besteht aus endlich vielen gleich großen parallelen Würfeln, deren Kanten keiner analytischen Ebene $y = c$ (c reell) parallel sind,
4. durch jede auf dem Rande von $\mathfrak{D}^*$ liegende Würfelkante gehen höchstens zwei zum Rande von $\mathfrak{D}^*$ gehörige Würfelflächen.

Durch diese Festsetzungen über $\mathfrak{D}^*$ erreichen wir, daß jede analytische Ebene $y = c$, die $\mathfrak{D}^*$ trifft und durch keinen Randeckpunkt von $\mathfrak{D}^*$ hindurchgeht, aus $\mathfrak{D}^*$ eine Menge $\mathfrak{G}(c)$ von zweidimensionalen Gebieten herausschneidet, deren Ränder endlich viele isoliert liegende, geschlossene Jordankurven sind, die jeweils aus endlich vielen Strecken bestehen. Analytische Ebenen, die durch Randeckpunkte hindurchgehen, existieren nur in endlicher Anzahl. Diese Ausnahmeebenen seien $y = c_0$, $y = c_1$, $\ldots$, $y = c_n$ ($c_0 > c_1 > \ldots > c_n$). Der Rand der auf einer solchen Ebene liegenden Gebietsmenge $\mathfrak{G}(c)$ weist isolierte Punkte in höchstens endlicher Anzahl und endlich viele geschlossene, aus jeweils endlich vielen Strecken bestehende Jordankurven auf, die jedoch nicht mehr getrennt voneinander zu liegen brauchen.

Wir werden nun $f(w, z)$ sukzessive innerhalb jedes Abschnittes $c_\nu > y > c_{\nu+1}$ in das Innere von $\mathfrak{D}^*$ hinein fortsetzen. Zunächst zeigt sich die Möglichkeit einer solchen Fortsetzung für den ersten Abschnitt $c_0 > y > c_1$. In der Tat, da $f(w, z)$ in den auf $y = c_0$ gelegenen Randeckpunkten regulär (bzw. meromorph) ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $f(w, z)$ sich ins ganze Innere jedes $\mathfrak{G}(c)$ mit $c_0 > c > c_0 - \varepsilon$ fortsetzen läßt. Angenommen, diese Fortsetzung wäre nicht auf jeder analytischen Ebene des ersten Abschnittes möglich! Dann gäbe es eine solche mit größtem c; dies sei die Ebene $y = c'$ ($c_0 > c' > c_1$). Wir wählen eine Folge von reellen Zahlen c_μ ($\mu = 1, 2, \ldots$) mit $\lim c_\mu = c'$ und $c_0 > c_\mu > c'$. Dann ist $f(w, z)$ eindeutig und regulär (bzw. meromorph) auf dem Rande und im Innern jedes $\mathfrak{G}(c_\mu)$, sowie auf dem Rande von $\mathfrak{G}(c')$. Ferner konvergiert die Folge der Gebietsmengen $\mathfrak{G}(c_\mu)$ gegen $\mathfrak{G}(c')$, da $y = c'$ durch keinen Randeckpunkt von $\mathfrak{D}^*$ hindurchgeht. Nach dem Kontinuitätssatz läßt sich dann $f(w, z)$ ins ganze Innere von $\mathfrak{G}(c')$ eindeutig und regulär

(bzw. meromorph) fortsetzen, im Widerspruch zur Bestimmung von c'. Wir wählen nun eine weitere Zahlenfolge d_μ mit $\lim d_\mu = c_1$ und $c_0 > d_\mu > c_1$. Die Folge der Gebietsmengen $\mathfrak{G}(d_\mu)$ konvergiert gegen eine Gebietsmenge $\mathfrak{G}^*(c_1)$, die $\mathfrak{G}(c_1)$ umfaßt und sich von $\mathfrak{G}(c_1)$ nur dadurch unterscheidet, daß $\mathfrak{G}(c_1)$ höchstens endlich viele isolierte Randpunkte mehr besitzt. In gleicher Weise wie oben folgt, daß $f(w,z)$ auch in das ganze Innere von $\mathfrak{G}^*(c_1)$ eindeutig und regulär (bzw. meromorph) hinein fortsetzbar ist. Es wäre aber möglich, daß die durch diese Fortsetzung entstehenden Funktionselemente in den isolierten Randpunkten, durch die sich $\mathfrak{G}(c_1)$ von $\mathfrak{G}^*(c_1)$ unterscheidet, nicht mit den dort ursprünglich gegebenen Funktionselementen von $f(w,z)$ übereinstimmen. Wir wollen diejenigen Randpunkte von $\mathfrak{G}(c_1)$, für die dieser Fall eintritt, *kritische Randpunkte* nennen. Die Gebietsmengen $\mathfrak{G}(c)$ verändern sich stetig mit c. Daher besitzen auch die kritischen Randpunkte innerhalb des zweiten Abschnittes stetige Fortsetzungen, die wir gleichfalls als *kritische Randmannigfaltigkeiten* bezeichnen. Wir ergänzen nun jedes $\mathfrak{G}(c)$ mit $c_1 > c > c_2$ zu einer Gebietsmenge $\mathfrak{G}^*(c)$, indem wir zu $\mathfrak{G}(c)$ die kritischen Randmannigfaltigkeiten sowie die von diesen umschlossenen Gebiete hinzufügen. Mit Benutzung des Kontinuitätssatzes folgt wie oben, daß $f(w,z)$ eindeutig und analytisch (bzw. meromorph) in das ganze Innere jedes $\mathfrak{G}^*(c)$ mit $c_1 > c > c_2$ fortsetzbar ist, wobei jedoch die auf den kritischen Rändern der $\mathfrak{G}(c)$ durch diese Fortsetzung entstandenen Funktionselemente in keinem Falle mit den dort ursprünglich gegebenen übereinstimmen. Das gleiche trifft zu für diejenige auf der Ebene $y = c_2$ gelegene Gebietsmenge $\mathfrak{G}^*(c_2)$, gegen die die Gebietsmengen $\mathfrak{G}^*(c)$ konvergieren, wenn c innerhalb des Abschnittes $c_1 > c > c_2$ gegen c_2 strebt. $\mathfrak{G}^*(c_2)$ entsteht aus $\mathfrak{G}(c_2)$ wieder durch Hinzufügen von kritischen Randmannigfaltigkeiten und gewissen von ihnen eingeschlossenen Gebieten zu $\mathfrak{G}(c_2)$, sowie möglicherweise durch Hinzunahme von endlich vielen neu auftretenden isolierten Randpunkten, von denen wieder einige kritisch sein können. Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung von $f(w,z)$ in das Innere von $\mathfrak{G}^*(c_2)$ können die kritischen Randmannigfaltigkeiten von $\mathfrak{G}(c_2)$ mit den nichtkritischen nirgends zusammenhängen. Es lassen sich nun sukzessive für jeden Abschnitt $c_\nu > y > c_{\nu+1}$ in entsprechender Weise Gebietsmengen $\mathfrak{G}^*(c)$ definieren. Durch wiederholte Anwendung des Kontinuitätssatzes folgt, daß $f(w,z)$ in das ganze Innere jedes $\mathfrak{G}^*(c)$ eindeutig vom Rande aus fortsetzbar ist. Jede Gebietsmenge $\mathfrak{G}^*(c)$ umfaßt die zugehörige Gebietsmenge $\mathfrak{G}(c)$. Bei stetiger Änderung von c ändern sich die kritischen Ränder der $\mathfrak{G}(c)$ stetig, und auf keiner Ebene $y = c$ hängen kritische und nichtkritische Ränder miteinander zusammen. Das ist aber ein Widerspruch gegen die Voraussetzung, daß der Rand von

$\mathfrak{D}^*$ zusammenhängend sein sollte. Daher können kritische Ränder überhaupt nicht auftreten. $f(w, z)$ ist mithin eindeutig und analytisch (bzw. meromorph) in das ganze Innere von $\mathfrak{D}^*$, und damit auch von $\mathfrak{D}$, vom Rande aus fortsetzbar.

Mit Benutzung eines ähnlichen Beweisverfahrens, auf dessen exakte Durchführung wir hier verzichten, ergibt sich

Satz 2: *Es sei $\mathfrak{D}$ ein in der Hyperebene $\mathfrak{Y}$ gelegener beschränkter (dreidimensionaler) Bereich, zu dessen Rand ein zweidimensionales Gebiet einer analytischen Ebene $\mathfrak{E}$ gehört. Der nicht zu $\mathfrak{E}$ gehörige Rand $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{D}$ sei zusammenhängend. Ist dann eine Funktion $f(w, z)$ auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und regulär (bzw. meromorph), so läßt sie sich eindeutig und regulär (bzw. meromorph) in das ganze Innere von $\mathfrak{D}$ hinein fortsetzen.*

Als Analogon zu Satz 2 im Vierdimensionalen beweisen wir:

Satz 3: *Es sei $\mathfrak{F}$ ein zusammenhängendes abgeschlossenes Hyperflächenstück, das mit einer Hyperebene $\mathfrak{Y}$ zusammen einen beschränkten Bereich $\mathfrak{B}$ begrenzt. $\mathfrak{B}$ liege ganz auf einer Seite von $\mathfrak{Y}$. Ist dann eine Funktion $f(w, z)$ eindeutig und regulär (bzw. meromorph) auf $\mathfrak{F}$, so läßt sie sich eindeutig und regulär (bzw. meromorph) in den ganzen abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$ hinein fortsetzen.*

Beweis: Ähnlich wie im Beweise zu Satz 1 dürfen wir annehmen, daß $\mathfrak{F}$ aus endlich vielen Hyperebenenstücken besteht, und daß keine dieser Hyperebenen zu $\mathfrak{Y}$ parallel ist. Auch die Annahme, daß $\mathfrak{Y}$ die Hyperebene $x = 0$ ist und $\mathfrak{B}$ ganz auf der Seite $x < 0$ von $\mathfrak{Y}$ liegt, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Angenommen nun, die Behauptung des Satzes sei falsch! Dann betrachte man die Schar der zu $\mathfrak{Y}$ parallelen Hyperebenen, die $\mathfrak{B}$ treffen. Jede solche Hyperebene $x = c$ schneidet $\mathfrak{B}$ in endlich vielen dreidimensionalen Gebieten $\mathfrak{D}(c)$, von denen jedes einen eindeutig bestimmten äußeren Rand besitzt. Nach Satz 1 ist nun $f(w, z)$ von diesen äußeren Rändern aus eindeutig und regulär (bzw. meromorph) in alle inneren Punkte und auf die inneren Ränder der $\mathfrak{D}(c)$ fortsetzbar. Indessen können die durch Fortsetzung entstehenden Funktionselemente nicht auf allen diesen inneren Randpunkten mit den dort ursprünglich gegebenen Funktionselementen übereinstimmen, denn sonst wäre die Behauptung unseres Satzes doch erfüllt. Wir wollen solche Ausnahmerandmannigfaltigkeiten, sowie alle von ihnen umschlossenen, zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Punkte kritische Punkte von $\mathfrak{F}$ nennen. Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung können kritische und nichtkritische Punkte innerhalb einer festen Hyperebene $x = c$ nicht miteinander zusammenhängen (vgl. den Beweis zu Satz 1!). Andererseits müssen aber bei stetiger Parallelverschiebung der Hyperebenen $x = c$ kritische in kritische Punkte und nichtkritische in nichtkritische Punkte

übergehen. Dieser Sachverhalt widerspricht jedoch der Voraussetzung, daß $\mathfrak{F}$ zusammenhängend sein sollte. Demnach ist $f(w, z)$ doch eindeutig und regulär (bzw. meromorph) in den ganzen abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$ hinein fortsetzbar.

Ist das Hyperflächenstück $\mathfrak{F}$ einfach zusammenhängend, so ist jedes auf ihm reguläre (bzw. meromorphe) Funktionselement eindeutig. Für diesen Fall liefert unser Satz die Aussage, daß die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ von $\mathfrak{F}$ einen vierdimensionalen Bereich enthält. Für den Beweis ist die Voraussetzung wesentlich, daß $\mathfrak{F}$ mit der Hyperebene $\mathfrak{Y}$ zusammen einen Bereich begrenzt; wir benutzen also eine Eigenschaft von $\mathfrak{F}$ im Großen. Im folgenden Paragraphen kommen wir nun zu Aussagen über Regularitätshüllen vorgegebener Hyperflächen, die sich lediglich auf Eigenschaften dieser Hyperflächen im Kleinen stützen.

§ 2.

Existenzsätze über die Regularitätshüllen von Hyperflächen.

Auch in diesem Abschnitt beschränken wir uns zunächst auf Funktionen zweier komplexer Veränderlichen. Wir beweisen

Satz 4: *Das einmal stetig differenzierbare Hyperflächenstück* $\mathfrak{F}$: $\varphi(u, v, x, y) = 0$ *habe mit der Hyperebene* $\mathfrak{Z}$ *den Punkt* P *gemeinsam und liege in einer Umgebung von* P *ganz auf einer Seite von* $\mathfrak{Z}$. P *sei gewöhnlicher Punkt von* $\varphi(u, v, x, y) = 0$. *Dann gibt es einen vierdimensionalen Bereich* $\mathfrak{B}$, *in dem jede auf* $\mathfrak{F}$ *reguläre Funktion noch regulär ist.*

Beweis: Man darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{Z}$ die Hyperebene $x = 0$, $P = (0, 0, 0, 0)$ ist und daß $\mathfrak{F}$ in einer Umgebung von P ganz auf der Seite $x > 0$ liegt. $\mathfrak{Z}$ ist Tangentialhyperebene von $\varphi(u, v, x, y) = 0$ in P; da P gewöhnlicher Punkt von $\varphi(u, v, x, y) = 0$ ist, muß $\varphi_u(P) = \varphi_v(P) = \varphi_y(P) = 0$, $\varphi_x(P) \neq 0$ sein. Daher läßt sich $\varphi(u, v, x, y) = 0$ in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von P nach x auflösen, und man erhält die für $\mathfrak{U}$ gültige „normierte" Darstellung von $\mathfrak{F}$:

$$x = Q(u, v, y).$$

Nach unserer Voraussetzung über $\mathfrak{F}$ gibt es nun ein $\varepsilon > 0$, so daß für

$$u^2 + v^2 + y^2 \leqq \varepsilon$$

stets

$$Q(u, v, y) \geqq 0$$

ist, wobei das letzte Gleichheitszeichen nur für $u = v = y = 0$ gilt. Sei $M > 0$ das Minimum von $Q(u, v, y)$ für $u^2 + v^2 + y^2 = \varepsilon$. Wir betrachten den Bereich $\mathfrak{B}$, dessen Punkte den Bedingungen

$$u^2 + v^2 + y^2 < \varepsilon,$$

$$Q(u, v, y) < x < M$$

genügen und der die Punkte $(u, v, x, y) = (0, 0, x, 0)$ mit $0 < x < M$ enthält. Das zu $\mathfrak{F}$ gehörige Randstück $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$ ist zusammenhängend; ferner bleibt jedes Funktionselement einer auf $\mathfrak{F}$ regulären Funktion auf $\mathfrak{R}$ eindeutig. Auf den Bereich $\mathfrak{B}$ ist nun Satz 3 anwendbar (die Rolle von $\mathfrak{Y}$ spielt hier die Hyperebene $x = M$); jede auf $\mathfrak{F}$ reguläre Funktion $f(w, z)$ ist also in das ganze Innere von $\mathfrak{B}$ hinein fortsetzbar.

Im folgenden zeigen wir, daß die Regularitätshüllen nichtanalytischer, zweimal stetig differenzierbarer Hyperflächenstücke stets vierdimensionale Bereiche enthalten.

Satz 5: *Sei $\mathfrak{F} : \varphi\,(u, v, x, y) = 0$ ein zweimal stetig differenzierbares Hyperflächenstück, auf dem $L(\varphi)$ nicht überall Null ist. Dann gibt es einen vierdimensionalen Bereich $\mathfrak{B}$, in dem jede Funktion, die auf $\varphi\,(u, v, x, y) = 0$ regulär ist, sich noch regulär verhält.*

Unter $L(\varphi)$ verstehen wir wie üblich den Levischen Differentialausdruck.

Beweis: Auf $\varphi\,(u, v, x, y) = 0$ gibt es sicher einen gewöhnlichen Punkt P, in dem $L(\varphi)$ ungleich Null ist. Es kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $P = (0, 0, 0, 0)$, $L(\varphi_P) > 0$ und $\mathfrak{F} : \varphi\,(u, v, x, y) = 0$ dort in der normierten Form

(I) $\quad \varphi \equiv x + a_1 u^2 + a_2 v^2 + a_3 u v + a_4 u y + a_5 v y + a_6 y^2 + \ldots = 0$

gegeben ist. Die Bedingung $L(\varphi_P) > 0$ bedeutet

$$b = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2) = \tfrac{1}{4} \cdot L(\varphi_P) > 0.$$

Dann verläuft die analytische Hyperfläche $\mathfrak{S}$

$$z = -\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2 - i\,a_3)\,w^2 + A \cdot t^2 + i \cdot B \cdot t \qquad (t \text{ reell})$$

oder reell:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2)(u^2 - v^2) - a_3 u v + A \cdot t^2, \\ y &= \tfrac{1}{2} a_3 (u^2 - v^2) - (a_1 - a_2)\,u v + B \cdot t \end{aligned}$$

(mit geeigneten reellen A und B) in einer Umgebung von P ganz auf der Seite $\varphi\,(u, v, x, y) > 0$. Einsetzen von (II) in (I) liefert nämlich

(III) $\quad \varphi\,(\mathfrak{S}) = b\,(u^2 + v^2) + a_4 B u t + a_5 B v t + (A + a_6 B^2)\,t^2 + \ldots.$

Für das Verhalten von $\mathfrak{S}$ in einer Umgebung von P kommt es allein auf die in (III) auftretende quadratische Form der drei Variablen u, v, t an. Damit sie positiv definit ist, ist hinreichend, daß in der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} b & 0 & \tfrac{1}{2} \cdot a_4 \cdot B \\ 0 & b & \tfrac{1}{2} \cdot a_5 \cdot B \\ \tfrac{1}{2} \cdot a_4 \cdot B & \tfrac{1}{2} \cdot a_5 \cdot B & A + a_6 \cdot B^2 \end{pmatrix}$$

die geschachtelten Unterdeterminanten

$$b, \quad \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} b & 0 & \frac{1}{2} a_4 \cdot B \\ 0 & b & \frac{1}{2} a_5 \cdot B \\ \frac{1}{2} a_4 \cdot B & \frac{1}{2} a_5 \cdot B & A + a_6 \cdot B^2 \end{vmatrix}$$

größer als Null sind[6]). Für die beiden ersten Determinanten trifft dies zu; die Ausrechnung der dritten Determinante ergibt:

$$M = b\left[b\,(A + a_6 B^2) - \frac{B^2}{4}(a_4^2 + a_5^2)\right].$$

Wählt man hier $A > 0$, ferner B genügend klein und ungleich Null, so wird $M > 0$; d. h. die mit diesen Größen gebildete analytische Hyperfläche $\mathfrak{S}$ verläuft in einer Umgebung von P ganz auf einer Seite von $\mathfrak{F}$ und hat in P einen gewöhnlichen Punkt. Sei nun $f(w, z)$ eine Funktion, die auf $\mathfrak{F}$ regulär ist. Dann bilde man eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von P vermittelst der Transformation

$$T: \quad \begin{aligned} z &= -\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2 - i a_3)\,\tilde{w}^2 + A\,\tilde{z}^2 + i B \tilde{z} \\ w &= \tilde{w} \end{aligned}$$

auf einen (schlichten) Bereich $\tilde{\mathfrak{U}}$ des $(\tilde{w}, \tilde{z})$-Raumes ab. Die analytische Hyperfläche $\mathfrak{S}$ geht hierbei in die Hyperebene $\tilde{\mathfrak{S}}: J(\tilde{z}) = 0$ über, das Bild von $\mathfrak{F}$ — es sei mit $\tilde{\mathfrak{F}}$ bezeichnet — liegt in einer Umgebung von $(0, 0, 0, 0)$ ganz auf einer Seite von $\tilde{\mathfrak{S}}$, und die Funktion $f(w, z)$ geht in eine reguläre Funktion $\tilde{f}(\tilde{w}, \tilde{z})$ über; d. h. die Voraussetzungen von Satz 4 sind erfüllt. Es gibt mithin einen Teilbereich $\tilde{\mathfrak{B}}$ von $\tilde{\mathfrak{U}}$, in dem alle auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ regulären Funktionen noch regulär sind. Geht man durch die zu T inverse Abbildung wieder in den (w, z)-Raum, so geht $\tilde{\mathfrak{B}}$ in einen Bereich $\mathfrak{B}$ von der im Satz behaupteten Eigenschaft über.

Folgerung: *Die Regularitätshülle eines zweimal stetig differenzierbaren Hyperflächenstücks $\mathfrak{F}: \varphi(u, v, x, y) = 0$, das nicht analytisch ist, umfaßt stets einen vierdimensionalen Bereich. Ist auf $\mathfrak{F}$ überall $L(\varphi)$ größer als Null und hat $\mathfrak{F}$ nur gewöhnliche Punkte, so besitzt jeder auf $\mathfrak{F}$ gelegene Punkt eine Umgebung $\mathfrak{U}$, derart, daß der auf der Seite $\varphi(u, v, x, y) < 0$ liegende Teil von $\mathfrak{U}$ zur Regularitätshülle von $\mathfrak{F}$ gehört.*

Verschwindet $L(\varphi)$ auf $\mathfrak{F}$ längs einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$, so kann die Regularitätshülle von $\mathfrak{F}$ längs $\mathfrak{L}$ in mehrere getrennte Bereiche zerfallen, wie folgendes Beispiel zeigt: Man betrachte das Hyperflächenstück

$$\mathfrak{F}: \ \varphi = x + y^2 + u y = 0.$$

Es ist

$$L(\varphi) = -2y(y + u).$$

[6]) Siehe etwa Dickson, Modern algebraic theories.

Längs der analytischen Ebene $z = 0$ ist $L(\varphi) = 0$. Nun kann die Regularitätshülle von $\mathfrak{F}$ sicher keinen Punkt der Hyperebene $y = 0$ enthalten (außer den auf $z = 0$ gelegenen Punkten), denn jede der Funktionen

$$f(w, z) = \frac{1}{z - a} \qquad (a \text{ reell und } \neq 0)$$

ist auf $\mathfrak{F}$ regulär, dagegen singulär in der auf $y = 0$ gelegenen Ebene $z = a$. Die Hülle von $\mathfrak{F}$ umfaßt also mindestens zwei getrennte Bereiche. Man ersieht auch aus diesem Beispiel, daß die Regularitätshülle einer nichtanalytischen Hyperfläche $\mathfrak{F}$ im allgemeinen längs jeder auf $\mathfrak{F}$ gelegenen analytischen Fläche $\mathfrak{L}$ zerfallen wird. (Längs jeder solchen Fläche ist $L(\varphi) = 0$!)

Andererseits braucht die Hülle eines nichtanalytischen Hyperflächenstücks $\mathfrak{F}$ nicht zu zerfallen, wenn $L(\varphi)$ längs einer nichtanalytischen zweidimensionalen Fläche $\mathfrak{L}$ verschwindet. Man betrachte z. B. das Hyperflächenstück

$$\mathfrak{F}: \varphi = u^3 - x = 0 \qquad (-1 < u < 1).$$

Es ist

$$L(\varphi) = 6u.$$

Längs der nichtanalytischen Ebene $u = x = 0$ verschwindet $L(\varphi)$. Die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ ist jedoch nach den Ergebnissen des nächsten Paragraphen mit der euklidisch-konvexen Hülle von $\mathfrak{F}$ identisch, und diese enthält sicher nur einen einzigen vierdimensionalen Bereich.

Im Gegensatz zu den hier bewiesenen Sätzen zeigen die analytischen Hyperflächen ein völlig anderes Verhalten. Wir beweisen:

Satz 6: *Sei $\mathfrak{F}$ ein analytisches, zweimal stetig differenzierbares Hyperflächenstück und P_0 ein gewöhnlicher Punkt auf ihm. Dann gibt es eine Umgebung von P_0, derart, daß das in dieser Umgebung gelegene Stück von $\mathfrak{F}$ lediglich sich selbst zur Regularitätshülle hat.*

Beweis: Man darf annehmen, daß P_0 der Punkt $(0, 0, 0, 0)$ ist. Aus der Voraussetzung über P_0 folgt, daß sich die $\mathfrak{F}$ darstellende Gleichung

$$\varphi(u, v, x, y) = 0$$

in einer Umgebung von P_0 nach einer Veränderlichen auflösen läßt; $\mathfrak{F}$ besitzt demnach dort etwa die Darstellung

$$x - f(u, v, y) = 0.$$

In einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von P_0 ist $L(x - f(u, v, y)) = 0$. Da die Variable x in der Gleichung $x - f(u, v, y) = 0$ nur linear auftritt, kann die Funktion

$$F(u, v, x, y) \equiv L(x - f(u, v, y))$$

nicht mehr von ihr abhängen und muß also, als Funktion u, v, y betrachtet, in einer Umgebung von $(0, 0, 0)$ identisch verschwinden. Hieraus

ergibt sich, daß der Levische Differentialausdruck auch für alle Nachbarhyperflächenstücke

$$x - f(u, v, y) = \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ reell})$$

verschwindet. Um P_0 läßt sich eine Dizylinderumgebung $\mathfrak{U}^*$, die ganz in $\mathfrak{U}$ liegen möge, abgrenzen, derart, daß durch jeden darin gelegenen Punkt P genau eines dieser Nachbarhyperflächenstücke geht. Jedes analytische Hyperflächenstück besteht aus einer einparametrigen Schar analytischer Flächenstücke; daher geht durch jeden solchen Punkt P auch ein analytisches Flächenstück, das $\mathfrak{F}$ nicht trifft, falls nicht P auf $\mathfrak{F}$ liegt. Das in $\mathfrak{U}^*$ gelegene Stück von $\mathfrak{F}$ hat sich selbst zur Hülle: Ist nämlich Q ein innerhalb $\mathfrak{U}^*$, aber nicht auf $\mathfrak{F}$ liegender Punkt, so gibt es eine Funktion $g(w, z)$, die in Q singulär, auf $\mathfrak{F}$ aber regulär ist, und die $\mathfrak{U}^*$ zum Existenzbereich hat. Dies folgt aus der Cousinschen Übertragung des Weierstraßschen Produktsatzes; danach gibt es eine in $\mathfrak{U}^*$ existierende Funktion, die die durch Q gehende analytische Fläche als Polmannigfaltigkeit besitzt, sonst aber überall in $\mathfrak{U}^*$ regulär ist. Andererseits bleibt jedes Funktionselement, das auf dem in $\mathfrak{U}^*$ gelegenen Stück von $\mathfrak{F}$ regulär ist, dort eindeutig. Demnach ist die Regularitätshülle des in $\mathfrak{U}^*$ liegenden Stücks von $\mathfrak{F}$ mit diesem Hyperflächenstück selbst identisch.

Für diesen Beweis ist die Voraussetzung wesentlich, daß P_0 gewöhnlicher Punkt ist, d. h. daß $\varphi(u, v, x, y) = 0$ nach wenigstens einer Veränderlichen auflösbar ist. Andernfalls braucht nämlich $L(\varphi)$ für die Nachbarflächenstücke $\varphi(u, v, x, y) = \varepsilon$ nicht zu verschwinden, auch falls dies für $\varphi(u, v, x, y) = 0$ zutrifft. Man beachte hierzu das folgende Beispiel: Sei $\mathfrak{F}$ das Hyperflächenstück

$$(u^2 + v^2) - (x^2 + y^2) = 0, \quad u^2 + v^2 + x^2 + y^2 < 1.$$

Dann ist nach bekannten Sätzen über die Regularitätshüllen Reinhardtscher Körper jede Funktion, die auf $\mathfrak{F}$ regulär ist, im ganzen Dizylinder $(|w| < 1, |z| < 1)$ regulär.

Die Verallgemeinerung von Satz 6 auf $(2n$-$1)$-dimensionale analytische Hyperflächen im Raum von n komplexen Veränderlichen bietet keine Schwierigkeit; dagegen erfordert die Übertragung von Satz 5 besondere Überlegungen. Wir beweisen

Satz 7: *Sei $\mathfrak{F} : \varphi(x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_n, y_n) = 0$ ein zweimal stetig differenzierbares nichtanalytisches Hyperflächenstück. Dann gibt es einen $2n$-dimensionalen Bereich $\mathfrak{B}$, in dem jede Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$, die sich auf $\varphi = 0$ analytisch verhält, noch analytisch ist $(n \geqq 2)$.*

Beweis: Führt man in $\varphi(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n) = 0$ nach dem Vorgang von Wirtinger die neuen „Koordinaten“

$$\begin{aligned} z_\nu &= x_\nu + i\, y_\nu \\ \bar{z}_\nu &= x_\nu - i\, y_\nu \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ein, so besagt die Voraussetzung über $\mathfrak{F}$, daß die Hermitesche Form

(I) $$\sum_{\mu,\nu} \varphi_{\mu\bar{\nu}}(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}) \cdot z_\mu \cdot \bar{z}_\nu$$

unter der Nebenbedingung

(II) $$\sum_{\mu} \varphi_\mu(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}) \cdot z_\mu = 0$$

nicht in allen Punkten $(z_i^{(0)})$ von $\mathfrak{F}$ identisch verschwindet[7]). Angenommen, (I) nehme für den auf $\mathfrak{F}$ gelegenen gewöhnlichen Punkt $P: z_i^{(0)} = 0$ unter der Nebenbedingung (II) einen positiven Wert an. Dann gibt es nach Krzoska eine „Parabel"

$$z_\mu = a_\mu t + b_\mu t^2 \quad (t \text{ komplex}; \quad \mu = 1, 2, \ldots, n),$$

die in einer Umgebung von P ganz auf der Seite $\varphi > 0$ liegt. Man bilde diese Parabel in einer Umgebung von P mittels einer in P eineindeutigen analytischen Transformation auf die zweidimensionale Ebene

$$z_2 = \ldots = z_n = 0$$

ab. Das ist, da nach Krzoska nicht alle a_μ und b_μ gleichzeitig verschwinden, stets möglich. Die Hyperfläche $\varphi = 0$ geht hierbei in eine zweimal stetig differenzierbare Hyperfläche $\tilde{\mathfrak{F}}: \tilde{\varphi} = 0$ über; die analytische Ebene $z_2 = \ldots\ldots\ldots = z_n = 0$ liegt in einer Umgebung von P ganz auf der Seite $\tilde{\varphi} > 0$. Hieraus folgt, daß die partiellen ersten Ableitungen von $\tilde{\varphi}$ nach x_1 und y_1 in P verschwinden; da P jedoch gewöhnlicher Punkt auf $\tilde{\varphi} = 0$ ist, muß eine der partiellen ersten Ableitungen, etwa $\tilde{\varphi}_{x_2}$, in P ungleich Null sein. Man betrachte das dreidimensionale Hyperflächenstück

$$\mathfrak{F}^*: \tilde{\varphi}(x_1, y_1; x_2, y_2; 0, 0; \ldots; 0, 0) = 0$$

im Raum der zwei komplexen Veränderlichen z_1, z_2. $\mathfrak{F}^*$ ist sicher kein analytisches Hyperflächenstück, weil im R_4 kein analytisches Hyperflächenstück die analytische Tangente in einem gewöhnlichen Punkt ganz auf einer Seite läßt. Es gibt also in jeder Umgebung von P Punkte auf $\mathfrak{F}^*$, in denen $L(\tilde{\varphi}) \neq 0$ ist. Man darf annehmen, daß P selbst ein solcher Punkt und $L(\tilde{\varphi}_P) > 0$ ist. Nach Satz 5 gibt es nun einen Bereich $\mathfrak{B}_{z_3 = \ldots = z_n = 0}$ in $z_3 = \ldots = z_n = 0$, in dem jede Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$, die auf $\mathfrak{F}^*$ regulär ist, sich in bezug auf z_1 und z_2 noch regulär verhält. Wegen der zweimal stetigen Differenzierbarkeit von $\tilde{\varphi}(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n)$ gibt es ein positives ε, so daß auf allen Nachbarhyperebenen

$$z_3 = z_3^{(0)}, \ldots, z_n = z_n^{(0)} \quad \text{mit} \quad |z_i^{(0)}| < \varepsilon \quad (i = 3, \ldots, n)$$

---

[7]) Vgl. J. Krzoska, Über die natürlichen Grenzen analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen. Dissertation Greifswald 1933.

ebensolche Bereiche $\mathfrak{B}_{z_3^{(0)},\ldots,z_n^{(0)}}$ existieren, und zwar hängen die $\mathfrak{B}_{z_3^{(0)},\ldots,z_n^{(0)}}$ in dem Sinne stetig von $z_3^{(0)},\ldots,z_n^{(0)}$ ab, daß es um P eine $2n$-dimensionale Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für jeden innerhalb $\mathfrak{U}(P)$ auf der Seite $\tilde{\varphi}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) < 0$ gelegenen Punkt $(z_1^{(0)},\ldots,z_n^{(0)})$ gilt, daß $(z_1^{(0)},\ldots,z_n^{(0)})$ in $\mathfrak{B}_{z_3^{(0)},\ldots,z_n^{(0)}}$ liegt. (Man vergleiche die Beweise zu Satz 4 und 5!) Bezeichnet man den auf der Seite $\tilde{\varphi}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) < 0$ gelegenen Teilbereich von $\mathfrak{U}(P)$ mit $\mathfrak{B}$, so ist also die Funktion $f(z_1,\ldots,z_n)$ in jedem Punkte von $\mathfrak{B}$ in bezug auf z_1 und z_2 regulär, während sie auf $\tilde{\varphi}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = 0$ in bezug auf alle Variablen regulär ist. Daraus ergibt sich nach einer Verallgemeinerung eines bekannten Hilfssatzes von Hartogs[8]), daß $f(z_1,\ldots,z_n)$ in ganz $\mathfrak{B}$ in bezug auf alle Variablen regulär ist.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen zu

Satz 8: *Sei* $\mathfrak{F}: \varphi(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = 0$ $(n \geqq 2)$ *ein zweimal stetig differenzierbares Hyperflächenstück. Notwendig und hinreichend dafür, daß die Regularitätshülle jeder* $(2n\text{-}1)$*-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit von* $\mathfrak{F}$ $2n$*-dimensionale Gebiete umfaßt, ist, daß* $\mathfrak{F}$ *kein* $(2n\text{-}1)$*-dimensionales analytisches Hyperflächenstück als Teilmannigfaltigkeit enthält.*

Beweis: Die Bedingung ist notwendig. In der Tat! Enthielte $\mathfrak{F}$ ein $(2n\text{-}1)$-dimensionales analytisches Hyperflächenstück, so gäbe es auf ihm einen gewöhnlichen Punkt P und dazu eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$, derart, daß das in $\mathfrak{U}(P)$ gelegene Stück von $\mathfrak{F}$ lediglich sich selbst zur Regularitätshülle hätte.

Die Bedingung ist auch hinreichend. Denn die Regularitätshülle jeder $(2n\text{-}1)$-dimensionalen nichtanalytischen Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{F}$ enthält nach Satz 5 bzw. Satz 7 stets $2n$-dimensionale Gebiete.

Wir haben uns in unseren Überlegungen bisher auf reguläre Funktionen beschränkt. Fast alle erhaltenen Ergebnisse lassen sich indessen unmittelbar auf meromorphe Funktionen übertragen. Entsprechend der zu Anfang gegebenen Definition der Regularitätshülle eines Hyperflächenstücks läßt sich zunächst der Begriff der Meromorphiehülle einführen. Die Sätze des Paragraphen 1 gelten für meromorphe Funktionen, weil, wie bereits hervorgehoben, der für die Beweise grundlegende Kontinuitätssatz für solche Funktionen gilt. Das gleiche trifft auf die Sätze 4 und 5 zu. Auch Satz 6 läßt sich in einfacher Weise übertragen. Dagegen stößt der Versuch einer Übertragung von Satz 7 noch auf Schwierigkeiten. Das liegt daran, daß von dem am Schluß des Beweises benutzten Hartogsschen Hilfssatz nicht bekannt ist, ob er auch für meromorphe Funktionen gültig

---

[8]) Siehe z. B. Osgood, Lehrbuch der Funktionstheorie Bd. II, 1 (2. Aufl.), S. 249. Der dort bewiesene Hilfssatz läßt sich leicht in der gewünschten Form auf Funktionen von n komplexen Veränderlichen übertragen.

ist. Alle Beweisversuche in dieser Richtung sind bisher fehlgeschlagen. Setzt man aber von der im Beweise zu Satz 7 auftretenden Hermiteschen Form

$$\sum_{\mu,\nu} \varphi_{\mu\bar{\nu}}(z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})\, z_\mu \cdot \bar{z}_\nu$$

voraus, daß sie positiv definit ist, so läßt sich das Verfahren des Beweises zu Satz 5 übertragen, denn in diesem Falle gibt es nach Krzoska ein $(2n\text{-}2)$-dimensionales analytisches Flächenstück, das das gegebene Hyperflächenstück

$$\varphi(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = 0$$

in $z_1^{(0)} = \ldots = z_n^{(0)} = 0$ berührt und in einer Umgebung dieses Punktes ganz auf einer Seite unseres Hyperflächenstücks liegt. In ähnlicher Weise wie oben läßt sich zeigen, daß es dann sogar eine $(2n\text{-}1)$-dimensionale analytische Hyperfläche mit der gleichen Eigenschaft gibt. Unter dieser einschränkenden Voraussetzung gilt Satz 7 demnach auch für meromorphe Funktionen.

§ 3.

Die Hüllen Reinhardtscher Kreishyperflächen.

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir eine Bedingung für die Existenz $2n$-dimensionaler Regularitätshüllen von $(2n\text{-}1)$-dimensionalen Hyperflächenstücken aufgestellt. In diesem und dem folgenden Paragraphen soll es sich nun darum handeln, für die Spezialfälle der Reinhardtschen und Hartogsschen Hyperflächenstücke im Raum zweier komplexer Veränderlichen genauere Aussagen über die Gestalt der Regularitätshüllen zu machen. Wir bemerken, daß die folgenden Überlegungen in gleicher Weise für reguläre wie für meromorphe Funktionen gelten. Der Einfachheit halber formulieren wir sie nur für reguläre Funktionen.

Definition: *Als Reinhardtsches Kreishyperflächenstück bezeichnen wir ein Hyperflächenstück, das jede der Transformationen*

$$\begin{aligned} w' &= w \cdot e^{i\vartheta_1} \\ z' &= z \cdot e^{i\vartheta_2} \end{aligned} \qquad (-\infty < \vartheta_1, \vartheta_2 < +\infty)$$

in sich zuläßt.

Wendet man auf ein Reinhardtsches Kreishyperflächenstück $\mathfrak{F}$, das keinen Punkt mit den Achsen $w = 0$ und $z = 0$ gemeinsam hat, die Transformation

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \log w, \\ \tilde{z} &= \log z \end{aligned}$$

an, so geht $\mathfrak{F}$ in ein Hyperflächenstück $\tilde{\mathfrak{F}}$ über, das mit einem Punkt $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ auch alle Punkte $(\tilde{u}_0, \tilde{v}, \tilde{x}_0, \tilde{y})$ mit beliebigen $\tilde{v}$ und $\tilde{y}$ enthält. Über Bereiche mit dieser Eigenschaft beweisen wir

Hilfssatz 1: *Sei $\mathfrak{B}$ ein Bereich, der mit einem Punkt (u_0, v_0, x_0, y_0) alle Punkte (u_0, v, x_0, y) mit $-\infty < v, y < +\infty$ enthält. Dann ist die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ von $\mathfrak{B}$ die euklidisch-konvexe Hülle von $\mathfrak{B}$.*

Beweis: Sicher enthält $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ mit einem Punkt (u_0, v_0, x_0, y_0) auch alle Punkte (u_0, v, x_0, y) mit beliebigen v und y. Denn $\mathfrak{B}$ wird durch alle Transformationen

$$\begin{aligned} w &= w + i\,a, \\ z &= z + i\,b \end{aligned} \qquad (a, b \text{ reell})$$

in sich übergeführt, und jede analytische Transformation, die einen Bereich auf sich selbst abbildet, ist auch ein Automorphismus der Regularitätshülle. Wir zeigen, daß der Schnitt $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ mit der Ebene $v = y = 0$ euklidisch-konvex ist. Hierzu ist hinreichend, daß $\mathfrak{S}$ mit zwei Punkten P_1 und P_2, die innerhalb $\mathfrak{S}$ durch einen aus zwei Strecken S_1 und S_2 bestehenden Polygonzug verbindbar sind, auch ihre Verbindungsstrecke enthält. Sei P_3 der Schnittpunkt von S_1 und S_2, ferner $f(w, z)$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion. Durch eine reelle affine Transformation

$$\begin{aligned} u' &= a_{11}\,u + a_{12}\,x + a_{10}, \\ x' &= a_{21}\,u + a_{22}\,x + a_{20} \end{aligned}$$

führe man P_1, P_2, P_3 in die Punkte $P_1' = (-1, 1)$, $P_2' = (1, 1)$, $P_3' = (0, 0)$ über. Durch die Transformation

$$\begin{aligned} w' &= a_{11}\,w + a_{12}\,z + a_{10}, \\ z' &= a_{21}\,w + a_{22}\,z + a_{20} \end{aligned}$$

geht dann $\mathfrak{B}$ in einen Bereich $\mathfrak{B}'$ über, der wie $\mathfrak{B}$ mit einem Punkt (u_0', v', x_0', y') alle Punkte (u_0', v', x_0', y') mit beliebigen v' und y' enthält; ferner $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ in $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}')$ und $f(w, z)$ in eine in $\mathfrak{B}'$ reguläre Funktion $g(w', z')$. Diese ist insbesondere regulär in allen Punkten (u', v', x', y') mit

$$u'^2 - x'^2 = 0, \qquad 0 \leqq x' \leqq 1,$$

weil diese Punkte von den Bildern von S_1 und S_2 gebildet werden. Jedes auf dieser Mannigfaltigkeit reguläre Funktionselement bleibt dort ferner eindeutig. Sei nun $P_4' = (u_0', 0, x_0', 0)$ ein Punkt in dem Dreieck mit den Eckpunkten P_1', P_2', P_3'. Dann lassen sich zwei reelle Zahlen A und B so bestimmen, daß die Parabel

$$x' = A\,u'^2 + B \qquad (A > 0)$$

durch P_1', P_2', P_4' läuft. Wir betrachten die analytische Hyperfläche

$$\mathfrak{Y}: \begin{cases} x' = A\,(u'^2 - v'^2) - A\,t^2 + B, \\ y' = 2\,A\,u'\,v' + t \end{cases} \qquad (t \text{ reell});$$

ihr im Innern des Bereiches

$$\mathfrak{D}: u'^2 - x'^2 < 0, \quad 0 < x' < 1$$

gelegener Teil sei mit $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{D}}$ bezeichnet. $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{D}}$ ist ein dreidimensionales (auf $\mathfrak{Y}$ gelegenes) Gebiet mit zusammenhängendem Rande, und zwar besteht dieser Rand nur aus Punkten der Hyperebenen $u'^2 - x'^2 = 0$. Transformiert man $\mathfrak{Y}$ durch die auf $\mathfrak{Y}$ analytische und umkehrbar eindeutige Abbildung

$$w' = w^*$$
$$z' = A\, w^{*2} - A\, z^{*2} + i\, z^* + B$$

in die Hyperebene $\mathfrak{J}(z^*) = 0$, so geht $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{D}}$ in einen auf $\mathfrak{J}(z^*) = 0$ gelegenen (dreidimensionalen) Bereich $\mathfrak{Y}^*_{\mathfrak{D}}$ mit zusammenhängendem Rande über. $\mathfrak{Y}^*_{\mathfrak{D}}$ ist beschränkt, denn für

$$u'^2 + v'^2 + t^2 > M \qquad (M \text{ genügend groß})$$

verläuft die Hyperfläche $\mathfrak{Y}$ ganz außerhalb von $\mathfrak{D}$. Auf $\mathfrak{Y}^*_{\mathfrak{D}}$ läßt sich nun Satz 1 aus § 1 anwenden. Geht man wieder zu $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{D}}$ zurück, so ergibt sich, daß $g(w', z')$ in ganz $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{D}}$, also auch in P'_4, regulär ist. Was wir für die inneren Punkte des Dreiecks $P'_1 P'_2 P'_3$ gezeigt haben, gilt auch für die Strecke $P'_1 P'_2$, denn man kann das Dreieck $P'_1 P'_2 P'_3$ durch ein etwas größeres ersetzen.

Demnach ist $\mathfrak{S}$ und folglich auch $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ euklidisch konvex. Andererseits ist die euklidisch-konvexe Hülle $\mathfrak{K}(\mathfrak{B})$ von $\mathfrak{B}$ Regularitätsbereich. Daher ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ mit $\mathfrak{K}(\mathfrak{B})$ identisch.

Die für den vorstehenden Beweis wesentliche Tatsache, daß zur Regularitätshülle eines Paares von Hyperhalbebenenstücken, die sich in einer nichtanalytischen Ebene schneiden, ein voller vierdimensionaler Teil des von ihnen eingeschlossenen Winkelraums gehört, bleibt nicht allein auf Hyperebenen beschränkt. Es gilt vielmehr noch

Hilfssatz 2: *Die beiden einmal stetig differenzierbaren Hyperflächenstücke $\mathfrak{F}_1 : \varphi_1(u, x) = 0$ und $\mathfrak{F}_2 : \varphi_2(u, x) = 0$ mögen sich in der nichtanalytischen Ebene $\mathfrak{E} : u = u_0,\ x = x_0$ schneiden und dort verschiedene Tangentialhyperebenen besitzen. Mit $\mathfrak{F}_1^*$ und $\mathfrak{F}_2^*$ seien diejenigen Stücke von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ bezeichnet, für die* Min $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ *ist. Dann gibt es eine Umgebung von $\mathfrak{E}$, so daß jede auf $\mathfrak{F}_1^*$ und $\mathfrak{F}_2^*$ reguläre Funktion $f(w, z)$ sich regulär in denjenigen Teil dieser Umgebung fortsetzen läßt, für den* Min $(\varphi_1, \varphi_2) \geqq 0$ *ist.*

Beweis: Durch Ausführung einer geeigneten linearen analytischen Transformation läßt sich erreichen, daß $\mathfrak{E}$ die Ebene $u = x = 0$ wird und daß $\mathfrak{F}_1^*$ und $\mathfrak{F}_2^*$ in einer Nachbarschaft $|u| < \varepsilon$, $|x| < \varepsilon$ von $\mathfrak{E}$ (mit genügend kleinem positiven ε) die Darstellungen $\varphi_1 \equiv x - \psi_1(u) = 0$ $(-\varepsilon \leqq u \leqq 0)$ und $\varphi_2 \equiv x - \psi_2(u)$ $(0 \leqq u \leqq \varepsilon)$ besitzen; dabei sei in

den entsprechenden Intervallen stets $\psi_1'(u) < 0$ bzw. $\psi_2'(u) > 0$, ferner gelte $\psi_1(-\varepsilon) = \psi_2(\varepsilon) = \varepsilon$. Durch jeden innerhalb des Bereiches

$$\mathfrak{B}: \begin{cases} x - \psi_1(u) > 0, \\ x - \psi_2(u) > 0, \\ 0 < x < \varepsilon \end{cases}$$

gelegenen Punkt läßt sich nun, genau wie im Beweis zu Hilfssatz 1, eine analytische Hyperfläche von der Form

$$x = A(u^2 - v^2) - A t^2 + B,$$
$$y = 2Auv + t + C$$

angeben, die zusammen mit $\mathfrak{F}_1^*$ und $\mathfrak{F}_2^*$ einen in $\mathfrak{B}$ gelegenen beschränkten Bereich begrenzt. In gleicher Weise wie oben folgt, daß sich jede auf $\mathfrak{F}_1^*$ und $\mathfrak{F}_2^*$ reguläre Funktion $f(w, z)$ regulär in jeden im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden Punkt dieser analytischen Hyperfläche fortsetzen läßt.

Demnach gehört ganz $\mathfrak{B}$ zur Regularitätshülle des Hyperflächenpaares $(\mathfrak{F}_1^*, \mathfrak{F}_2^*)$, und unser Hilfssatz ist bewiesen.

Wir können nun beweisen:

Satz 9: *Es sei $\mathfrak{F}: \varphi(|w|, |z|) = 0$ ein endliches Reinhardtsches Kreishyperflächenstück, das mit den Ebenen $w = 0$ und $z = 0$ keinen Punkt gemeinsam habe. $\varphi(|w|, |z|) = 0$ sei zweimal stetig differenzierbar und in jedem Punkte nach $|w|$ oder $|z|$ auflösbar. Dann stimmt die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ von $\mathfrak{F}$ mit der logarithmisch-konvexen Hülle von $\mathfrak{F}$ bis höchstens auf Randmannigfaltigkeiten überein.*

Beweis: Durch die Transformation

$$w' = \log w,$$
$$z' = \log z$$

geht $\mathfrak{F}$ in ein Hyperflächenstück $\mathfrak{F}': \psi(u', x') = 0$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ in $\mathfrak{H}(\mathfrak{F}')$ über. Wir betrachten die beiden Möglichkeiten $L(\psi) \equiv 0$ und $L(\psi) \not\equiv 0$:

1. $L(\psi) \equiv 0$. Da $\psi(u', x') = 0$ überall nach einer Veränderlichen auflösbar ist, ergibt sich, daß $\mathfrak{F}'$ ein Hyperebenenstück ist; denn sei etwa $x' - \chi(u') = 0$ das Ergebnis der Auflösung in einem willkürlich gewählten Punkt auf $\mathfrak{F}'$, so besagt $L(x' - \chi(u')) \equiv 0$, daß χ eine lineare Funktion ist. Für diesen Fall ist aber die Gültigkeit des Satzes klar; denn die Regularitätshülle wie auch die konvexe Hülle unseres Hyperebenenstückes besteht lediglich aus diesem Hyperebenenstück selbst.

2. $L(\psi) \not\equiv 0$. Wir wählen auf $\mathfrak{F}'$ eine Ebene $\mathfrak{E}$: $u' = u_0'$, $x' = x_0'$, längs der $L(\psi) \neq 0$ ist. Nach Satz 5 gibt es um $\mathfrak{E}$ eine vierdimensionale Halbumgebung $\mathfrak{U}$, die zur Regularitätshülle von $\mathfrak{F}'$ gehört; $\mathfrak{U}$ enthält mit jedem Punkt (u_1', v_1', x_1', y_1') alle Punkte (u_1', v', x_1', y') mit beliebigen v', y'. Es sei $\mathfrak{B}$ der größte Bereich, der in der Regularitätshülle von $\mathfrak{F}'$ enthalten ist und zugleich $\mathfrak{U}$ umfaßt. Nach Hilfssatz 1 muß $\mathfrak{B}$ konvex

sein. Wir behaupten, daß jeder Punkt von $\mathfrak{F}'$ innerer oder Randpunkt von $\mathfrak{B}$ ist. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es auf $\mathfrak{F}'$ eine Ebene $\mathfrak{E}^*$: $u' = u'^*$, $x' = x'^*$, die $\mathfrak{F}'$ so in zwei Teile zerlegt, daß der eine Teil in einer Umgebung von $\mathfrak{E}^*$ nur innere oder Randpunkte von $\mathfrak{B}$ enthält, der andere aber — er sei mit $\mathfrak{F}^*$ bezeichnet — in jeder Nachbarschaft von $\mathfrak{E}^*$ auch äußere Punkte. Da $\mathfrak{B}$ konvex ist, läßt sich durch $\mathfrak{E}^*$ ein Hyperebenenstück $\mathfrak{Y}$ legen, das nicht mit der Hypertangente an $\mathfrak{F}'$ in $\mathfrak{E}^*$ zusammenfällt und ganz in $\mathfrak{B}$ liegt. Hilfssatz 2, angewandt auf $\mathfrak{F}^*$ und $\mathfrak{Y}$, lehrt nun, daß es um $\mathfrak{E}^*$ im Widerspruch zu unserer Annahme eine volle, durch das Hyperflächenstück $\mathfrak{F}'$ begrenzte Halbumgebung geben muß, die zur Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{F}')$ von $\mathfrak{F}'$ gehört.

Der Bereich $\mathfrak{B}$ umfaßt demnach die konvexe Hülle $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}')$ von $\mathfrak{F}'$. Andererseits kann $\mathfrak{H}(\mathfrak{F}')$, und damit $\mathfrak{B}$, nicht größer sein als $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}')$, denn $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}')$ läßt sich als konvexer Bereich approximieren durch konvexe Bereiche — also durch Regularitätsbereiche —, die ihn ganz umfassen[9]).

Damit ist unser Satz bewiesen.

Die Einschränkung, daß $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ mit der logarithmisch-konvexen Hülle von $\mathfrak{F}$ nur bis auf Randmannigfaltigkeiten übereinzustimmen braucht, ist notwendig. Denn nach unserer Definition der Regularitätshüllen von Hyperflächenstücken könnte $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ sowohl abgeschlossen wie nichtabgeschlossen sein. Für beide Möglichkeiten lassen sich leicht Beispiele angeben.

Zur Bestimmung der Regularitätshülle eines zweimal stetig differenzierbaren Reinhardtschen Kreishyperflächenstücks $\mathfrak{F}: \varphi(|w|, |z|) = 0$, das Punkte mit den Achsen $w = 0$ oder $z = 0$ gemeinsam hat, ist noch eine zusätzliche Betrachtung erforderlich. Nach Satz 9 ist klar, daß $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ die logarithmisch-konvexe Hülle von $\mathfrak{F}$ umfaßt, aber sie kann sich von dieser auch höchstens um Randmannigfaltigkeiten sowie um Punkte auf den Achsen unterscheiden. Wir bezeichnen die Kurve $\varphi(|w|, |z|) = 0$ in der $(|w|, |z|)$-Ebene mit $\mathfrak{C}$, ferner setzen wir

$$\zeta_1 = \log|w|,$$
$$\zeta_2 = \log|z|$$

und nennen das Bild von $\mathfrak{C}$ in der (ζ_1, ζ_2)-Ebene $\tilde{\mathfrak{C}}$. Enthält nun $\mathfrak{C}$ etwa einen Punkt auf der Achse $z = 0$, der von dem Koordinatenanfang verschieden ist, so besitzt $\tilde{\mathfrak{C}}$ eine zur negativen ζ_2-Achse parallele Asymptote. Daraus folgt, daß jeder $\tilde{\mathfrak{C}}$ umfassende konvexe Bereich, also auch die konvexe Hülle von $\tilde{\mathfrak{C}}$, jede zur negativen ζ_2-Achse parallele Halbgerade enthält, deren Endpunkt ein Punkt $\tilde{\mathfrak{C}}$ ist Für das Bild von $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ in der $(|w|, |z|)$-Ebene bedeutet dies, daß zu ihm die Punkte aller Lote gehören, die von $\mathfrak{C}$ aus auf die $|w|$-Achse gefällt werden können, eventuell

[9]) „Ganz umfassen" bezieht sich hier nur auf Punkte im Endlichen.

abgesehen von den Fußpunkten auf dieser Achse. Wir behaupten, daß durch diese Fußpunkte genau die Punkte der Ebene $z = 0$ gekennzeichnet werden, die zu $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ gehören. Denn jede auf $\mathfrak{F}$ reguläre Funktion $f(w, z)$ bleibt in einer Umgebung dieses Stückes $\mathfrak{E}^*$ der Ebene $z = 0$ regulär; wäre sie in einem Punkte von $\mathfrak{E}^*$ singulär, so müßte dies auf Grund des Kontinuitätssatzes in jedem Punkt von $\mathfrak{E}^*$ der Fall sein; das ist aber ausgeschlossen, weil $f(w, z)$ ja in denjenigen Punkten von $\mathfrak{E}^*$ regulär ist, die zu $\mathfrak{F}$ gehören. Andererseits kann $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ nicht außer $\mathfrak{E}^*$ noch weitere auf $z = 0$ gelegene Punkte enthalten, denn die durch $\mathfrak{E}^*$ ergänzte logarithmisch-konvexe Hülle von $\mathfrak{F}$ ist ein Regularitätsbereich, der durch Regularitätsbereiche approximiert werden kann, die $\mathfrak{F}$ umfassen.

Enthält $\mathfrak{F}$ den Koordinatenanfang[10]), so ist nach bekannten Sätzen jede auf $\mathfrak{F}$ reguläre Funktion in den kleinsten eigentlichen logarithmisch-konvexen Reinhardtschen Körper $\mathfrak{R}$, der $\mathfrak{F}$ umfaßt, regulär fortsetzbar, und $\mathfrak{H}(\mathfrak{F})$ ist mit $\mathfrak{R}$, abgesehen höchstens von Randmannigfaltigkeiten, identisch.

§ 4.

Über die Regularitätshüllen Hartogsscher Hyperflächen.

Definition: *Unter einer Hartogsschen Hyperfläche sei eine Hyperfläche verstanden, die jede der Transformationen*

$$\begin{cases} \tilde{w} = w \cdot e^{i\vartheta} \\ \tilde{z} = z \end{cases} \qquad (-\infty < \vartheta < +\infty)$$

bzw.

$$\begin{cases} \tilde{w} = w \\ \tilde{z} = z \cdot e^{i\varphi} \end{cases} \qquad (-\infty < \varphi < +\infty)$$

in sich zuläßt.

Im folgenden betrachten wir nur solche Hartogsschen Hyperflächenstücke, die sich in der Form

$$|w| = h(x, y) > 0$$

darstellen lassen, wobei $h(x, y)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist. Übt man auf ein Hartogssches Hyperflächenstück $\mathfrak{F}$ die Transformation

$$\tilde{w} = \log w,$$
$$\tilde{z} = z$$

aus, so geht $\mathfrak{F}$ über in ein zweimal stetig differenzierbares Hyperflächenstück, das durch eine Gleichung

$$\tilde{u} = \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

[10]) Vgl. hierzu P. Thullen, Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern, Math. Annalen **104** (1931), Hilfssatz 2, S. 255.

dargestellt wird, in der also die Veränderliche $\bar{v}$ nicht mehr auftritt. Über solche Hyperflächenstücke beweisen wir folgenden

Hilfssatz: *Auf dem Hyperflächenstück* $\mathfrak{S}$:

$$u = g(x, y)$$

sei überall $L(g(x, y) - u) < 0$. (*Abgekürzt:* $L(\mathfrak{S}) < 0$). *Dabei mögen* x *und* y *in dem einfach zusammenhängenden Gebiet* $\mathfrak{B}^{(x, y)}$ *variieren, das von der stückweise glatten Jordankurve* $\mathfrak{C}$ *begrenzt werde.* $g(x, y)$ *sei im Innern und auf dem Rande von* $\mathfrak{B}^{(x, y)}$ *zweimal stetig differenzierbar. Dann gelangt man zur Regularitätshülle* $\mathfrak{H}(\mathfrak{S})$ *von* $\mathfrak{S}$ *in folgender Weise: Man löse mit den durch* $g(x, y)$ *auf* $\mathfrak{C}$ *gegebenen Werten die Randwertaufgabe der Potentialtheorie für das Gebiet* $\mathfrak{B}^{(x, y)}$ *und erhält so eine in* $\mathfrak{B}^{(x, y)}$ *reguläre Potentialfunktion* $\varphi(x, y)$. *Der vierdimensionale Teil der Regularitätshülle von* $\mathfrak{S}$ *ist dann identisch mit dem von den beiden Hyperflächenstücken*

$$u = g(x, y)$$

und

$$u = \varphi(x, y)$$

begrenzten Bereich $\mathfrak{G}$.

Beweis: Zunächst ist unmittelbar ersichtlich, daß die Bedingung $L(\mathfrak{S}) < 0$ mit der Bedingung $\Delta g(x, y) < 0$ gleichbedeutend ist. Aus der Theorie der superharmonischen Funktionen[11]) folgt, daß im Innern von $\mathfrak{B}^{(x, y)}$ überall $g(x, y) > \varphi(x, y)$ ist. Daher begrenzen die Hyperflächenstücke $u = g(x, y)$ und $u = \varphi(x, y)$ wirklich einen einzigen, einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{G}$. Wir zeigen nun, daß erstens jede auf $\mathfrak{S}$ reguläre Funktion $f(w, z)$ in $\mathfrak{G}$ hinein regulär fortsetzbar ist, und zweitens, daß $\mathfrak{G}$ durch Regularitätsbereiche approximierbar ist, die $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{S}$ umfassen.

1. Man erkennt zunächst unmittelbar, daß jedes auf $\mathfrak{S}$ reguläre Funktionselement einer Funktion $f(w, z)$ bei jeder möglichen Fortsetzung längs $\mathfrak{S}$ eindeutig bleibt. Angenommen, $f(w, z)$ sei nicht in ganz $\mathfrak{G}$ hinein fortsetzbar! Dann wähle man in $\mathfrak{B}^{(x, y)}$ einen beliebigen Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ und ziehe $\mathfrak{C}$ über eine Schar stückweise glatter Jordankurven $\mathfrak{C}(t)$ auf P_0 zusammen. Dabei sei $\mathfrak{C}(0) = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}(1) = P_0$ und $0 \leqq t \leqq 1$. Jedes $\mathfrak{C}(t)$ umschließt ein Gebiet $\mathfrak{B}^{(x, y)}(t)$; für jedes $\mathfrak{B}^{(x, y)}(t)$ löse man die Randwertaufgabe der Potentialtheorie mit den durch $u = g(x, y)$ auf $\mathfrak{C}(t)$ gegebenen Werten. Man erhält so eine Menge von Potentialfunktionen $\varphi(x, y; t)$. Die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{S})$ von $\mathfrak{S}$ hängt nun von der Koordinate v nicht ab; außerdem läßt sich wegen der Voraussetzung $L(\mathfrak{S}) < 0$ zu jedem Punkt auf $\mathfrak{S}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}$ angeben, so daß der auf der Seite $g(x, y) - u > 0$ liegende Teil von $\mathfrak{U}$

[11]) Siehe B.-Th. Bericht, S. 47.

zu $\mathfrak{H}(\mathfrak{S})$ gehört. Daher existiert ein größtes t_0 mit $0 < t_0 < 1$, so daß sich $f(w, z)$ nicht regulär in alle inneren Punkte des Hyperflächenstücks $u = \varphi(x, y; t_0)$ (x, y in $\mathfrak{B}^{(x,y)}(t_0)$) von dessen Rand aus fortsetzen läßt. In dem von den Hyperflächenstücken $u = g(x, y)$ und $u = \varphi(x, y; t_0)$ (x, y in $\mathfrak{B}^{(x,y)}(t_0)$) begrenzten Bereich ist $f(w, z)$ dann regulär und wegen des einfachen Zusammenhangs dieses Bereichs auch eindeutig. Man ersetze $\mathfrak{C}(t_0)$ durch eine im Innern von $\mathfrak{B}^{(x,y)}(t_0)$ liegende Nachbarkurve $\mathfrak{K}$, derart, daß die Punkte (u, v, x, y) mit $u = \varphi(x, y; t_0)$ (x, y auf $\mathfrak{K}$) noch in $\mathfrak{H}(\mathfrak{S})$ liegen. $f(w, z)$ ist also regulär und eindeutig in den Punkten $u = \varphi(x, y; t_0)$ (x, y auf $\mathfrak{K}$); dagegen singulär in gewissen Punkten $P' = (u', v', x', y')$ mit $u' = \varphi(x', y'; t_0)$ (x', y' innerhalb $\mathfrak{K}$). Außerdem ist $f(w, z)$ regulär und eindeutig auf allen Hyperflächenstücken $u = \varphi(x, y; t_0) + \varepsilon$ (x, y auf und innerhalb $\mathfrak{K}$; $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ für geeignetes ε_0). Sei nun $P^1 = (u^1, v^1, x^1, y^1)$ ein auf $u = \varphi(x, y; t_0)$ gelegener singulärer Punkt von $f(w, z)$. Man bilde die zu $\varphi(x, y; t_0)$ konjugierte Potentialfunktion $\psi(x, y)$ mit dem Anfangswert $v^1 = \psi(x^1, y^1)$ und setze $\varphi(x, y; t_0) + i\,\psi(x, y) \equiv \zeta(z)$. Dann ist $f(w, z)$ singulär in dem auf $w = \zeta(z)$ gelegenen Punkt P^1; dagegen regulär und eindeutig in den Punkten $w = \zeta(z')$ (z' auf $\mathfrak{K}$) und auf allen Nachbarflächenstücken $w = \zeta(z) + \varepsilon$ (z auf und innerhalb $\mathfrak{K}$; $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$). Dieser Sachverhalt widerspricht aber dem Kontinuitätssatz; das erkennt man unmittelbar, wenn man die analytischen Flächenstücke $w = \zeta(z) + \varepsilon$ durch die Transformation

$$\tilde{w} = w - \zeta(z)$$
$$\tilde{z} = z$$

auf Ebenenstücke abbildet. $f(w, z)$ ist demnach regulär in das ganze Innere von $\mathfrak{G}$ hinein fortsetzbar, und diese Fortsetzung bleibt dort wegen des einfachen Zusammenhangs von $\mathfrak{G}$ eindeutig.

2. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{H}(\mathfrak{S})$ nicht größer als $\mathfrak{G}$ ist, geben wir eine Folge von Regularitätsbereichen $\mathfrak{G}_n$ an, die $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{S}$ umfassen und $\mathfrak{G}$ approximieren: Ein Punkt (u, v, x, y) gehöre dann und nur dann zu $\mathfrak{G}_n$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. (x, y) in $\mathfrak{B}^{(x,y)}$,
2. $\varphi(x, y) < u < g(x, y) + \frac{1}{n}$, $\qquad (n = 1, 2, \ldots)$.

Wir zeigen, daß die $\mathfrak{G}_n$ Regularitätsbereiche sind; die übrigen oben angegebenen Eigenschaften sind unmittelbar ersichtlich. Hierzu geben wir zu jedem Randpunkt P_0 eines $\mathfrak{G}_n$ eine Funktion $f_{P_0}(w, z)$ an, die in $\mathfrak{G}_n$ regulär ist, in P_0 aber singulär wird. Bezüglich $P_0 = (u_0, v_0, x_0, y_0)$ unterscheiden wir drei Fälle:

a) $P_0' = (x_0, y_0)$ liege auf der Randkurve $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}^{(x,y)}$. Es sei $h(z)$ eine analytische Funktion von z, die das Gebiet $\mathfrak{B}^{(x,y)}$ zum Existenzbereich hat. Dann ist

$$f_{P_0}(w, z) \equiv h(z)$$

eine Funktion der gesuchten Art.

b) $P_0' = (x_0, y_0)$ liege im Innern von $\mathfrak{B}^{(x,y)}$, und für (u_0, x_0, y_0) gelte $u_0 = \varphi(x_0, y_0)$. Ist $\psi(x, y)$ die zu $\varphi(x, y)$ konjugierte Potentialfunktion mit dem Anfangswert $v_0 = \psi(x_0, y_0)$ und setzt man

$$H(z) \equiv \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y),$$

so ist

$$f_{P_0}(w, z) \equiv \frac{1}{w - H(z)}$$

eine Funktion der gesuchten Art.

c) Für (u_0, x_0, y_0) gelte $u_0 = g(x_0, y_0) + \frac{1}{n}$. Es existiert eine Funktion $F(w, z)$, die in dem Bereich

$$\tilde{\mathfrak{G}}_n: \begin{cases} (x, y) \text{ in } \mathfrak{B}^{(x,y)} \\ u < g(x, y) + \frac{1}{n} \end{cases}$$

regulär ist und ihn zum Existenzbereich hat. Führt man nämlich die Transformation

$$w' = e^w$$
$$z' = z$$

aus, so geht $\tilde{\mathfrak{G}}_n$ in einen Hartogsschen Körper $\tilde{\mathfrak{G}}_n'$ über, der vollkommen ist, falls man noch die Punkte $(0, 0, x', y')$ hinzufügt. $\tilde{\mathfrak{G}}_n'$ erfüllt aber genau die hinreichenden Bedingungen, um Regularitätsbereich zu sein[12]). $F(w, z)$ ist also eine Funktion der gesuchten Art.

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen. Aus unseren Überlegungen geht noch hervor, daß die gesamte Regularitätshülle von $\mathfrak{S}$ aus dem (offenen) Bereich $\mathfrak{G}$ und dem Hyperflächenstück $\mathfrak{S}$ selbst besteht.

Es ergibt sich nunmehr unmittelbar

Satz 10: *Sei $\mathfrak{F}: |w| = g(x, y)$ ein im einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}^{(x,y)}$ der (x, y)-Ebene definiertes Hartogssches Hyperflächenstück. $\mathfrak{B}^{(x,y)}$ sei von der stückweise glatten Jordankurve $\mathfrak{C}$ berandet; $g(x, y)$ sei im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}^{(x,y)}$ zweimal stetig differenzierbar, ferner sei dort überall $g(x, y) > 0$ und $L(\mathfrak{F}) \neq 0$. Dann erhält man die Regularitätshülle von $\mathfrak{F}$, indem man nach der Vorschrift des Hilfssatzes die Regularitäts-*

[12]) Siehe B.-Th., Bericht, S. 55.

hülle $\tilde{\mathfrak{H}}$ *des Hyperflächenstücks* $\tilde{u} = \log g(x, y)$ $(x, y$ *in* $\mathfrak{B}^{(x,y)})$ *konstruiert und auf* $\tilde{\mathfrak{H}}$ *noch die Transformation*

$$\begin{aligned} w &= e^{\tilde{w}} \\ z &= \tilde{z} \end{aligned}$$

ausübt.

§ 5.

Bemerkungen über Regularitätshüllen zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten im Raum zweier komplexer Veränderlichen.

Die bisherigen Überlegungen haben ergeben, daß die Regularitätshüllen von Hyperflächenstücken im Raum zweier komplexer Veränderlichen drei- oder vierdimensionale Stücke enthalten können. Es zeigte sich, daß für die Dimension der Hülle die für die Funktionentheorie wichtige Klassifizierung der Hyperflächen in analytische und nichtanalytische entscheidend ist.

Die zweidimensionalen Flächen zeigen in dieser Hinsicht ein wesentlich komplizierteres Verhalten. Man erkennt unschwer, daß die Regularitätshüllen von beschränkten Stücken analytischer oder nichtanalytischer Ebenen die Ebenenstücke selbst bzw. Überlagerungsflächen dieser Ebenenstücke sind. Die Unterscheidung zwischen analytischen und nichtanalytischen Flächenstücken ist daher für die Dimension ihrer Hüllen ohne Bedeutung.

Beispiele für dreidimensionale Hüllen zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten liefern die Sätze 1 und 2 aus § 1. Im Gegensatz zu der Allgemeinheit des dem Satz 2 im Vierdimensionalen entsprechenden Satzes ist hier die Bedingung wesentlich, daß die den Bereich $\mathfrak{D}$ begrenzende Ebene $\mathfrak{E}$ analytisch ist. Das zeige folgendes Beispiel: $\mathfrak{D}$ sei gegeben durch

$$-1 < v < +1, \quad u < +1, \quad u - x^2 > 0, \quad y \equiv 0.$$

Die Rolle von $\mathfrak{E}$ spielt hier die nichtanalytische Ebene $u = 1$. Dann ist die Funktion

$$f(w, z) \equiv \frac{1}{w - z^2 + \varepsilon} \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

auf dem nicht zu $u = 1$ gehörenden Randstück von $\mathfrak{D}$ regulär, dagegen singulär in dem Punkt $u = \varepsilon$, $v = x = y = 0$. Es läßt sich leicht zeigen, daß jeder nicht auf dem Rande von $\mathfrak{D}$ gelegene Punkt singulärer Punkt einer Funktion werden kann, die auf dem nicht zu $u = 1$ gehörenden Randstück von $\mathfrak{D}$ regulär ist. Dieses Randstück hat sich also selbst zur Regularitätshülle.

Noch ein zweites Beispiel für die Möglichkeit dreidimensionaler Regularitätshüllen von zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten sei angeführt: Gegeben sei das analytische Hyperflächenstück $\mathfrak{Y}$:

$$|w| = |w_0| \neq 0; \quad |z| \leqq |z_0| \neq 0.$$

Es geht durch die Transformation

$$T: \begin{cases} w = |w_0| \cdot e^{i\tilde{w}} \\ z = \tilde{z} \end{cases}$$

über in den in der Hyperebene $\tilde{\mathfrak{Y}}$:

$$\mathfrak{I}(\tilde{w}) = 0$$

liegenden Kreiszylinder

$$|\tilde{z}| \leqq |z_0|.$$

$f(w, z)$ sei nun eine Funktion, die auf der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit

$$\mathfrak{M}: \begin{cases} \begin{cases} |w| = |w_0|, \\ |z| = |z_0| \end{cases} & \text{und} \\ \begin{cases} w = w_0, \\ |z| \leqq |z_0| \end{cases} \end{cases}$$

regulär ist. Dann ist $f(w, z)$ in ganz $\mathfrak{Y}$ regulär. Durch die Transformation T geht $\mathfrak{M}$ nämlich über in den Rand des Kreiszylinders

$$|\tilde{z}| \leqq |z_0|, \quad \mathfrak{I}(\tilde{w}) = 0,$$

zu dem noch die Stücke der Ebenen

$$\tilde{w} = 2n\pi \qquad (n \text{ jede ganze Zahl})$$

treten, die den Zylinder in beschränkte Teile von der Höhe 2π zerlegen. Auf diesen Randmannigfaltigkeiten ist nun $f(w, z)$, als Funktion von $\tilde{w}$ und $\tilde{z}$ betrachtet, regulär und eindeutig; nach Satz 1 läßt sie sich daher in das ganze Innere des Zylinders

$$|\tilde{z}| \leqq |z_0|, \quad \mathfrak{I}(\tilde{w}) = 0$$

regulär fortsetzen. Als Funktion von w und z ist $f(w, z)$ also auf ganz $\mathfrak{Y}$ regulär.

Verlangt man noch, daß $f(w, z)$ außer in $\mathfrak{M}$ noch auf der Mannigfaltigkeit

$$\begin{cases} z = z_0 \\ |w| \leqq |w_0| \end{cases}$$

regulär sein soll, so hat man ein Beispiel für eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, deren Regularitätshülle ein vierdimensionaler Bereich ist. Die Funktion $f(w, z)$ muß dann nämlich auf dem Rande des Dizylinders

$$\begin{cases} |w| \leqq |w_0|, \\ |z| \leqq |z_0| \end{cases}$$

regulär sein, mithin in seinem ganzen Innern.

Ein weiteres Beispiel: Man betrachte die zweidimensionalen Kanten eines von fünf linear unabhängigen Punkten des R_4 aufgespannten Simplex $\mathfrak{S}$, ferner eine auf ihnen reguläre Funktion $f(w, z)$. Jede solche Funktion bleibt sicher bei beliebiger Fortsetzung längs der zweidimensionalen Kanten von $\mathfrak{S}$ eindeutig. Nach Satz 1 ist nun $f(w, z)$ zunächst auf jedem Begrenzungshyperebenenstück, also auch im ganzen Innern von $\mathfrak{S}$ regulär.

Die oben erwähnten Sätze 1 und 2 aus § 1 lassen vermuten, daß sie für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten in beliebigen analytischen Hyperflächen gültig sind. Das ist in der Tat der Fall, wenn es sich um Hyperflächen handelt, die in der Form

$$w = \varphi_1(s; t),$$
$$z = \varphi_2(s; t)$$

darstellbar sind. Dabei seien φ_1 und φ_2 für festes t analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen s, und stetige Funktionen von s und t (t reell). Wir begnügen uns mit der Übertragung von Satz 1 und formulieren

Satz 11: *Die Hyperfläche $\mathfrak{Z}$ besitze die oben angegebene Darstellung. $\mathfrak{D}$ sei ein in $\mathfrak{Z}$ gelegener Bereich, dessen Bild im (s, t)-Raum beschränkt ist. Dann ist jede Funktion $f(w, z)$, die auf dem Rande von $\mathfrak{D}$ regulär und eindeutig ist, in das ganze Innere von $\mathfrak{D}$ hinein regulär und eindeutig fortsetzbar.*

Der Beweis verläuft genau wie der des Satzes 1 in § 1, falls wir über einen Kontinuitätssatz verfügen, der nicht nur für analytische Ebenen ausgesprochen ist, sondern für beliebige, in der Form

$$\begin{aligned} w &= g_1(s) \\ z &= g_2(s) \end{aligned} \qquad (g_i(s) \text{ analytische Funktionen von } s)$$

gegebene analytische Flächen gilt. Diese Verallgemeinerung des gewöhnlichen Kontinuitätssatzes ist enthalten in folgendem

Hilfssatz: *Die analytischen Flächenstücke*

$$\mathfrak{F}_n: \begin{cases} w = g_1(s; n) \\ z = g_2(s; n) \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mögen mit wachsendem n gegen das analytische Flächenstück

$$\mathfrak{F}_0: \begin{cases} w = g_1(s;0), \\ z = g_2(s;0) \end{cases}$$

konvergieren. Dabei variiere s in dem für alle n festen Gebiet $\mathfrak{B}^{(s)}$ der s-Ebene. Ist dann die Funktion $f(w,z)$ regulär und eindeutig auf allen $\mathfrak{F}_n$, ferner auf dem Rande von $\mathfrak{F}_0$ (d. h. in den Punkten, für welche s auf dem Rande von $\mathfrak{B}^{(s)}$ liegt), so ist sie auf ganz $\mathfrak{F}_0$ regulär.

Beweis: Wir fassen $f(w,z)$ als Funktion der drei unabhängigen Veränderlichen w, z, s auf und führen die folgenden Betrachtungen in dem zugehörigen sechsdimensionalen Raum durch. Wir dürfen annehmen, daß $\mathfrak{F}_0$ die zweidimensionale analytische Ebene $w = 0$, $z = 0$ ist (eventuell ist noch die Transformation

$$\begin{cases} \tilde{w} = w - g_1(s;0), \\ \tilde{z} = z - g_2(s;0), \\ \tilde{s} = s \end{cases}$$

auszuführen!). Wäre die Funktion $f(w,z)$ nicht auf ganz $\mathfrak{F}_0$ regulär, so gäbe es nach dem gewöhnlichen Kontinuitätssatz eine positive Zahl ε, derart, daß $f(w,z)$ auf jeder Ebene $w = \delta_1$, $z = \delta_2$ (s in $\mathfrak{B}^{(s)}$; $|\delta_1| < \varepsilon$, $|\delta_2| < \varepsilon$) singuläre Stellen hat, während sie auf dem Rande dieser Ebenenstücke regulär und eindeutig ist. Man wähle nun ein n_0, für welches

$$|g_i(s;n_0)| \leqq \frac{\varepsilon}{4} \qquad (i = 1, 2),$$

und betrachte die Schar der analytischen Flächenstücke

$$\mathfrak{F}^*(t_1,t_2): \begin{cases} w = g_1(s;n_0) + t_1 \\ z = g_2(s;n_0) + t_2 \end{cases} \quad \left(t_i \text{ komplex, } |t_i| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

$f(w,z)$ ist nach Voraussetzung regulär und eindeutig auf ganz $\mathfrak{F}_{n_0}$ sowie auf dem Rande aller $\mathfrak{F}^*(t_1,t_2)$; andererseits gibt es jedoch gewisse $t_1^{(0)}, t_2^{(0)}$, so daß $f(w,z)$ auf den zugehörigen $\mathfrak{F}^*(t_1^{(0)}, t_2^{(0)})$ singuläre Stellen hat. Dieser Sachverhalt steht aber im Widerspruch zum gewöhnlichen Kontinuitätssatz; man erkennt dies, indem man die $\mathfrak{F}^*(t_1,t_2)$ mittels der Transformation

$$\begin{cases} \tilde{w} = w - g_1(s;n_0), \\ \tilde{z} = z - g_2(s;n_0), \\ \tilde{s} = s \end{cases}$$

in eine Schar von Ebenenstücken überführt.

Dieser Beweis gilt wörtlich für meromorphe Funktionen. Daher läßt sich Satz 11 auch für meromorphe Funktionen aussprechen; das gleiche trifft auf die anderen oben angegebenen Beispiele zu.

Behnke hat kürzlich den Kontinuitätssatz für analytische Funktionen auf beliebige in der allgemeinen Form $f(w, z) = 0$ gegebene analytische Flächenstücke ausgedehnt[13]). Mithin kann Satz 11 auch auf geschlossene Mannigfaltigkeiten in analytischen Hyperflächenstücken, die in der Form $f(w, z; t) = 0$ (t reell) gegeben sind, ausgedehnt werden. Es ist indessen noch nicht gelungen, den Behnkeschen Beweis, der sich auf den Begriff der Regulärkonvexität sowie auf das Maximumprinzip stützt, auf meromorphe Funktionen anzuwenden. Aus diesem Grunde ist auch eine Übertragung von Satz 11 auf meromorphe Funktionen unter den oben angegebenen allgemeinen Voraussetzungen bisher nicht möglich.

---

[13]) H. Behnke, Der Kontinuitätssatz und die Regulärkonvexität, Math. Annalen **113** (1936), S. 392.

(Eingegangen am 23. 1. 1937.)

Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe.

Von

K. Wagner in Köln.

Einleitung.

Wir bezeichnen die Komplexe [1]), die der Fig. 1a bzw. 1b oder einer Unterteilung [2]) derselben homöomorph sind, mit K_a bzw. K_b. Den folgenden Satz von Kuratowski [3]) wollen wir als bekannt voraussetzen:

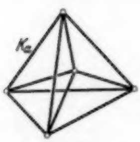


Fig. 1a.

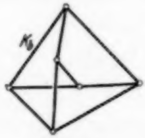


Fig. 1b.

I. Ein Komplex im Raum läßt sich dann und nur dann in die Ebene einbetten, wenn er weder einen K_a noch einen K_b als Teilkomplex enthält.

Bezeichnen wir einmal die Gesamtheit der Komplexe, die keinen K_a enthalten, kurz mit a (analog b), so ist also die Gesamtheit der ebenen Komplexe gleich dem Durchschnitt $a \cdot b$ (= schraffiertes Gebiet in Fig. 1'). Die ebenen Komplexe sind also durch die K_a *und* K_b charakterisiert. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich nun auf eine Teilmenge (= a^* in Fig. 1') von a, die die ebenen Komplexe umfaßt. Zunächst einige Bezeichnungen:

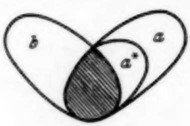


Fig. 1.

1. Wir sagen kurz, daß wir einen Komplex K_1 auf einen Komplex K_2 *zusammenziehen* können, wenn man mit Hilfe des folgenden Prozesses, beliebig oft nacheinander ausgeführt, K_2 aus K_1 erhält: Man lasse eine Kante auf die Länge Null zusammenschrumpfen und lösche hiernach von je zwei Kanten eine derselben aus, falls sie die gleichen Ecken (also zwei Ecken doppelt)

---

[1]) Ein Komplex K ist ein System endlich vieler Jordanbögen (= Kanten von K) im Raum und der Endpunkte derselben (= Ecken von K). Je zwei Kanten sind, höchstens bis auf gemeinsame Endpunkte, punktfremd, und je zwei Ecken sind durch höchstens eine Kante verbunden. — Wir können annehmen, daß die Kanten speziell Strecken sind, da bekanntlich jeder Komplex einem Streckenkomplex und insbesondere jeder ebene Komplex einem ebenen Streckenkomplex homöomorph ist (s. Jahresbericht der Dtsch. Math.-Ver. 46, S. 28).

[2]) Ein Komplex entsteht durch Unterteilung eines gegebenen Komplexes, indem man einfach auf den Kanten des letzteren neue Ecken einführt.

[3]) Sur le problème des courbes gauches en topologie. Fund. Math. 15.

verbinden [4]). 2. Wir sagen von einem Komplex, daß er die *Eigenschaft* E hat, wenn er sich nicht auf einen K_a zusammenziehen läßt. 3. Einen Komplex mit der Eigenschaft E bezeichnen wir mit K^*. Insbesondere bezeichnen wir einen K^* mit K^*_v, wenn jeder $K^* + k$ [5]) die Eigenschaft E nicht mehr hat, sich also auf einen K_a zusammenziehen läßt. Die K^*_v sind also in bestimmtem Sinne *vollständig*.

Aus I. und einer Arbeit [6]) des Verfassers folgt unmittelbar:

II. Jeder ebene Komplex ist ein K^*, hat also notwendig die Eigenschaft E. Jeder Dreieckkomplex K_3 [7]) ist ein K^*_v.

Die K^* (und K^*_v) sind also durch die Eigenschaft E, d. h. durch die K_a *allein* charakterisiert. Wir interessieren uns nun für die Gesamtheit der K^* ($= a^*$ in Fig. 1′), insbesondere der K^*_v. Wir wollen also mit anderen Worten untersuchen, wie weit uns die K^* noch aus der Ebene hinausführen. Im folgenden soll gezeigt werden, daß man die Gesamtheit der K^*_v und mithin der K^* als deren Teilkomplexe vollkommen beherrscht.

Betrachten wir einmal alle diejenigen Dreieckkomplexe K_3 (= einfache K_3), die keinen von einem Dreieck verschiedenen Dreieckkomplex als echten Teilkomplex enthalten, ferner den Komplex K_0 (Fig. 15′), der aus der Kontur eines Möbiusschen Bandes sowie vier Kanten besteht, die das Möbiussche Band in vier Rechtecke zerlegen. Die Gesamtheit dieser Komplexe sei $\mathfrak{B}$. Also

$$\mathfrak{B} = \{\text{einfache } K_3,\ K_0\}.$$

Die folgenden Untersuchungen führen zu dem

Satz: *Die Gesamtheit der Komplexe K:*

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i \textit{ (alle } K_i \textit{ beliebig aus } \mathfrak{B};\ n = 1, 2, \ldots) \textit{ mit der Bedingung}$$

(für $n \neq 1$):

$$K_i \cdot \sum_{j=1}^{i-1} K_j = k_i \textit{ oder } = D_i\ (= \textit{Kante oder } = \textit{Dreieck},\ i = 2, 3, \ldots, n,$$

und mit der Einschränkung [8]), *daß im 1. Falle, falls K_i ein Dreieckkomplex*

---

[4]) Besteht K aus einer Kante k allein, so läßt sich K nur auf den Nullkomplex 0 zusammenziehen, abgesehen von dem trivialen Fall, daß K unverändert bleibt, der obige Prozeß also Null mal ausgeführt wird.

[5]) k (= Kante) verbindet zwei beliebige Ecken von K^* (= Endpunkte von k), die durch keine Kante von K^* bereits miteinander verbunden sind, und ist sonst mit K^* punktfremd.

[6]) Zwei Bemerkungen über Komplexe. Math. Annalen 112, S. 317, Bemerkung A.

[7]) K_3 = ebener Streckenkomplex, bei dem jedes der Gebiete, in die er die Ebene zerlegt, von einem Dreieck berandet wird.

[8]) Ist die Einschränkung nicht erfüllt, so erhalten wir wohl einen K^*, aber keinen K^*_v.

ist, die Kante k_i *zu keinem Dreieckkomplex der Summe gehört, d. h.* K_i *nicht an einen Dreieckkomplex geheftet wird) ist mit der Gesamtheit der* K_r^* *identisch (bis auf die trivialen Elemente* 0 = *Nullkomplex und* k = *Kante). D. h. jeder* K_r^* *(ausschl.* 0 *und* k*) läßt sich, wie oben angegeben, aus den Elementen von* 𝔅 *zusammenheften und jeder Komplex* K, *den wir so aus den Elementen von* 𝔅 *zusammenheften, ist ein* K_r^*.

𝔅 bildet also in bestimmtem Sinne eine *Basis* der K_r^*. Der Satz ist von einer allgemeineren Bedeutung, weil er in einem engen Zusammenhang mit dem Vierfarbenproblem steht und hier zeigt, an welche Eigenschaft der Ebene der Vierfarbensatz eigentlich gebunden ist. Einer Landkarte L [9]) wollen wir dual denjenigen ebenen Komplex K zuordnen, der in jedem Land genau eine Ecke hat und dessen Kanten je zwei Ecken aus benachbarten [10]) Ländern von L verbinden. Löschen wir einmal in L die gemeinsame Grenze [11]) zweier benachbarter Länder aus. L' sei die Landkarte, die auf diese Weise aus L entsteht, K' ihr dualer Komplex. K' entsteht dann aus K, indem man die Kante von K, welche die beiden benachbarten Länder von L verbindet, auf 0 zusammenzieht. Löscht man nun in L nacheinander die gemeinsamen Grenzen mehrerer Länder aus, so wollen wir hierfür kurz sagen, daß wir einige Länder von L *vereinigen*. Man sieht also, daß mit der Vereinigung einiger Länder von L das Zusammenziehen des dualen Komplexes in bestimmtem Sinne parallel geht. Der Vierfarbensatz besagt nun, daß wir die Länder einer jeden Landkarte L in der Ebene oder dual die Ecken eines jeden ebenen Komplexes K mit höchstens vier Farben färben können [12]). Wir wollen jetzt einmal die Landkarten L abstrakt als Systeme von Dingen (= Länder) betrachten; hierbei sei willkürlich (d. h. unabhängig von der Anschauung) zwischen je zwei der Länder eine Festsetzung getroffen, ob dieselben benachbart sind oder nicht. Wir können nun jeder (abstrakten) Landkarte L (analog der Ebene) dual einen Komplex K im Raum zuordnen [13]). L läßt

---

[9]) L = Aufteilung der Ebene in endlich viele, punktfremde Gebiete (= Länder von L).

[10]) Zwei Länder heißen benachbart, wenn es um einen gemeinsamen Randpunkt derselben eine Kreisscheibe gibt, in der jeder Punkt zu einem der beiden Länder oder deren Rand gehört. Vgl. die Arbeit: Bemerkungen zum Vierfarbenproblem (I); Jahresbericht der Dtsch. Math.-Ver. 46 (1936), S. 26.

[11]) = Menge der Randpunkte, die eine Umgebung besitzen, in der nur Punkte der beiden Länder oder Randpunkte derselben liegen.

[12]) So daß je zwei benachbarte Länder von L, bzw. je zwei Ecken an derselben Kante von K verschieden gefärbt sind.

[13]) Die Länder von L sind eineindeutig den Ecken von K zugeordnet. Zwei Ecken von K sind dann und nur dann durch eine Kante von K verbunden, wenn die den beiden Ecken entsprechenden Länder von L benachbart sind.

sich dann und nur dann in der Ebene realisieren, wenn der duale Komplex K von L sich in die Ebene einbetten läßt. Ferner ist der duale Komplex K von L dann und nur dann ein K^*, wenn L die folgende *Eigenschaft* E hat: In L gibt es keine fünf paarweise (d. h. zu je zwei) benachbarten Länder, gleichgültig wie wir die Länder von L vereinigen. Wie aus dem Satz über die Basis der K_v^* folgt, ist jeder K_v^*, mithin auch jeder K^* mit höchstens vier Farben färbbar [12]), sofern der Vierfarbensatz richtig ist. Also folgt: Falls der Vierfarbensatz richtig ist, so können wir die Länder einer jeden Landkarte L, welche die Eigenschaft E hat, mit höchstens vier Farben färben [12]), gleichgültig ob wir L in der Ebene realisieren können oder nicht. Mit anderen Worten ist also die Eigenschaft E für die Gültigkeit des Vierfarbensatzes ***hinreichend und notwendig*** [14]).

§ 1.

Die Basis der K_v^*.

Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze über die K_v^*.

I. Voraussetzung: $K = K_1 + K_2$,

$K_1 \cdot K_2 = D$ [$=$ Dreieck oder $= k$ (Kante), $= e$ (Ecke), $= 0$ (Nullkomplex)], K läßt sich auf einen K_a zusammenziehen.

Behauptung: Entweder K_1 oder K_2 läßt sich auf einen K_a zusammenziehen.

Beweis: Nach Voraussetzung läßt sich K auf einen K_a zusammenziehen. Hierbei werde K_1 bzw. K_2 auf K'_1 bzw. K'_2 zusammengezogen. Also ist

$K_a = K'_1 + K'_2$, wobei der Durchschnitt von K'_1 und K'_2 entweder D oder k, e, 0 ist. Hieraus folgt aber, daß K_a ganz entweder in K'_1 oder K'_2 liegt. D. h. es ist entweder $K'_1 = K_a$ oder $K'_2 = K_a$, w. z. b. w.

Aus I. folgt:

I'. Voraussetzung: $K = K_1 + K_2$ (K_1 und $K_2 \neq 0$),

$$K_1 \cdot K_2 = e \text{ (oder } = 0).$$

Behauptung: $K \neq K_v^*$.

Beweis. Wir können annehmen, daß sich K auf keinen K_a zusammenziehen läßt, da sonst die Behauptung erfüllt ist. Im ersten

[14]) Ähnlich dem Zusammenziehen können wir in einem Komplex K_1 zwei beliebige Ecken, die durch keine Kante verbunden sind, identifizieren. Gelangen wir mit Hilfe dieses Prozesses, beliebig oft nacheinander ausgeführt, von K_1 zu K_2, so sagen wir hierfür, daß K_2 aus K_1 durch Identifizieren entsteht. Der Vierfarbensatz ist dann mit dem allgemeineren Satz äquivalent: Jeder K^* läßt sich durch Identifizieren in ein Tetraeder (Dreieck oder Kante) überführen.

Falle $K_1 \cdot K_2 = e$ sei k_1 bzw. k_2 eine an e liegende Kante von K_1 und K_2. k sei eine neue Kante, die die beiden von e verschiedenen Ecken von k_1 und k_2 verbinde. Es sei $k_1 + k_2 + k = D$. D, K_1 und desgleichen K_2 läßt sich auf keinen K_a zusammenziehen, also nach I. auch die Summe $K_1 + D$ und $(K_1 + D) + K_2 = K + k$. D. h. $K \neq K_v^*$. Im zweiten Falle $K_1 \cdot K_2 = 0$ sei k eine neue Kante, die eine Ecke von K_1 mit einer Ecke von K_2 verbinde. Wie angenommen, läßt sich K, also K_1 und K_2, und natürlich k auf keinen K_a zusammenziehen, also nach I. ebenso auch $(K_1 + k) + K_2 = K + k$. D. h. $K \neq K_v^*$, w. z. b. w.

II. Voraussetzung: $K = K_1 + K_2$,

$K_1 \cdot K_2 = D$.

Behauptung: K ist dann und nur dann ein K_v^*, wenn sowohl K_1 wie K_2 ein K_v^* ist.

Beweis: Wir setzen zunächst voraus, daß K_1 wie K_2 ein K_v^* ist. Nach I. läßt sich dann K auf keinen K_a zusammenziehen. Wir müssen also noch zeigen, daß K bezüglich der Eigenschaft E vollständig ist. Angenommen, K sei nicht vollständig, d. h. $K + k$ ließe sich nicht auf einen K_a zusammenziehen. Wegen der Vollständigkeit von K_1 und K_2 verbindet dann k eine Ecke e_1 von K_1 mit einer Ecke e_2 von K_2, wobei weder e_1 noch e_2 auf D liegt. e sei eine Ecke von D, k' die Kante mit den Endpunkten e_1 und e, und k'' die Kante mit den Endpunkten e_2 und e (Fig. 2). Dann folgt zunächst, daß k' zu K_1 und k'' zu K_2 gehört, falls es einen Polygonzug P in K gibt, der entweder e_1 oder e_2 mit e verbindet und bis auf seinen Endpunkt e mit D fremd ist. Denn P liege etwa in K_2. Dann läßt sich $K_1 + P + k$ auf $K_1 + k'$, mithin auch $K + k$ auf $K_1 + k'$ zusammenziehen. Wegen der Annahme läßt sich somit $K_1 + k'$

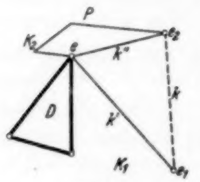


Fig. 2.

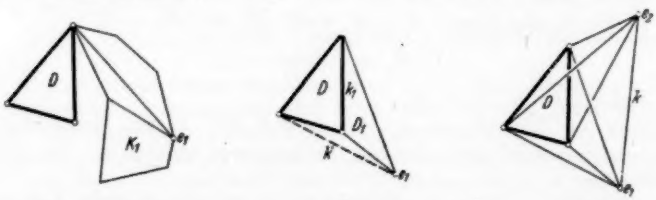


Fig. 3. 1. Fall. 2. Fall. 3. Fall.

auf keinen K_a zusammenziehen. Da K_1 vollständig ist, gehört also k' zu K_1. Wir können nun $K_2 + k' + k$ auf $K_2 + k''$ zusammenziehen. Hieraus schließt man analog, daß k'' zu K_2 gehört. Wir müssen also drei

Fälle unterscheiden, je nachdem e_1 (desgl. e_2) mit einer Ecke, zwei oder drei Ecken von D verbunden ist (Fig. 3). Im 1. Falle folgt aus I'. $K_1 \neq K_v^*$. Im 2. Falle sei D_1 das mit D benachbarte Dreieck durch e_1, k_1 die gemeinsame Kante von D und D_1, und k' verbinde die beiden k_1 gegenüberliegenden Ecken von D und D_1. Nun läßt sich $D + D_1 + k'$ sowie $(K_1 - D) + k_1$ auf keinen K_a zusammenziehen, mithin nach I. auch deren Summe $K_1 + k'$; d. h. $K_1 \neq K_v^*$. Im letzten Fall ist e_1, desgleichen e_2 mit den drei Ecken von D verbunden. Diese sechs Kanten bilden zusammen mit D und k einen K_a im Widerspruch zur Annahme. Mit den drei Fällen ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. — Umgekehrt sei nun K ein K_v^*. Dann folgt 1. K_1 und K_2 lassen sich auf keinen K_a zusammenziehen, und 2. K_1 und K_2 sind vollständig. Denn andernfalls können wir K_1 und K_2 durch Hinzufügung weiterer Kanten in vollständige Komplexe überführen. Dann wäre aber nach dem ersten Teil der Behauptung K kein K_v^* gewesen. Hiermit ist die Behauptung bewiesen[15]).

III. Voraussetzung: D_1 sei ein Dreieck in K_1. k_1 sei eine Kante von D_1. In K_2 sei analog D_2 und k_2 gegeben. Wir heften K_1 und K_2 längs k_1 und k_2 zusammen und verbinden die k_1 und k_2 gegenüberliegenden Ecken von D_1 und D_2 durch eine neue Kante k. Wir bilden also den Komplex (Fig. 4):

$$K = K_1 + K_2 + k, \quad K_1 \cdot K_2 = k_1 = k_2.$$

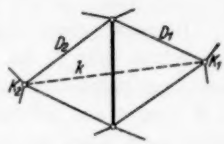


Fig. 4.

K_1 wie K_2 sei ein K_v^*.

Behauptung: K ist ein K_v^*.

Beweis: $D_1 + D_2 + k$ ist ein K_v^*. Also ist nach II. auch
$K_1 + D_2 + k$ ein K_v^*, mithin auch
$K_2 + K_1 + k$, w. z. b. w.

IV. Voraussetzung: $K = K_1 + K_2$, $K_1 \cdot K_2 = k$.

Behauptung: K ist dann und nur dann ein K_v^*, wenn K_1 wie K_2 ein K_v^* ist und es wenigstens in einem der beiden Komplexe K_1 und K_2 kein Dreieck durch k gibt.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß K ein K_v^* ist. Dann ist auch K_1 und K_2 ein K_v^*. Denn erstens läßt sich K_1 und K_2 auf keinen K_a zusammenziehen und zweitens ist K_1, desgleichen K_2 vollständig, da sonst nach I. $K \neq K_v^*$ wäre. Nach III. gibt es somit wenigstens in einem der K_1 und K_2 kein Dreieck durch k. Umgekehrt sei jetzt K_1 wie K_2 ein K_v^* und wenigstens in einem der beiden Komplexe K_1 und K_2 — etwa in K_1 — gebe es kein Dreieck durch k (Fig. 5). Zunächst folgt aus I.,

[15]) Mit Hilfe der Dreieckkomplexe K_3 erhält man nach dem Hilfssatz nichtebene K_v^*.

daß sich K auf keinen K_a zusammenziehen läßt. Wir müssen uns also noch davon überzeugen, daß K vollständig ist, d. h. daß sich $K + k'$ auf einen K_a zusammenziehen läßt. Da K_1 und K_2 vollständig sind, müßte k' eine Ecke e_1 aus K_1 mit einer Ecke e_2 aus K_2 verbinden, wobei weder e_1 noch e_2 auf k liegt. Wir können nun e_2 mit jeder der beiden Ecken von k durch einen Polygonzug in $K_2 - k$ verbinden, da andernfalls nach I'. K_2 kein K_v^* wäre. e sei eine Ecke von k, die mit e_1 durch keine Kante von K_1 verbunden ist. Ferner sei P ein Polygonzug in $K_2 - k$, der e_2 mit e verbindet. Dann läßt sich wegen der Vollständigkeit von K_1 der Komplex $K_1 + k' + P$, mithin auch $K + k'$ auf einen K_a zusammenziehen. Also ist K ein K_v^*, w. z. b. w.

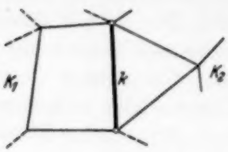


Fig. 5.

V. Voraussetzung: K' sei ein echter Teilkomplex von K, K' wie K sei ein K_v^* ($K' \neq 0$, k und D).

Behauptung. $K = K_1 + K_2$, $K_1 \cdot K_2 = D$ (K_1 und $K_2 \neq D$) oder
$K = K_1 + K_2$, $K_1 \cdot K_2 = k$ (K_1 und $K_2 \neq k$).

Beweis: e sei eine Ecke von K, die nicht zu K' gehört. Es gibt eine solche Ecke e, da K' ein echter Teilkomplex von K ist und beide Komplexe vollständig sind. Die Gesamtheit der Kanten, zu denen man in K von e aus gelangen kann, ohne eine Ecke von K' zu passieren, bildet einen Komplex K_1. K_2 sei der Komplex aus den übrigen Kanten von K, $K_2 = K - K_1$. K_2 enthält also K'. Nach Konstruktion liegen die gemeinsamen Ecken von K_1 und K_2 sämtlich auf K'. Also sind diese Ecken paarweise, d. h. zu je zwei durch Kanten von K', mithin von K_2 verbunden. Denn zwei beliebige dieser Ecken von K' sind durch zwei Polygonzüge P und P' in K_1 mit e verbunden. Nun läßt sich $K' + P + P'$ auf $K' + k$ zusammenziehen, wobei k die beiden Ecken von K' verbindet. $K' + k$ läßt sich also auf keinen K_a zusammenziehen; d. h. k gehört zu K'. Da K sich auf keinen K_a zusammenziehen läßt, kann also K_1 mit K_2 höchstens drei Ecken, d. h. ein Dreieck gemeinsam haben. Nach I'. muß aber K_1 mit K_2 mindestens zwei Ecken, d. h. eine Kante gemeinsam haben. Hiermit ist die Behauptung bewiesen.

Im Anschluß an V. bezeichnen wir einen K_v^* als einen *einfachen* K_v^*, wenn er keinen von 0, k und D verschiedenen K_v^* als echten Teilkomplex enthält. Wie aus V., II. und IV. folgt, bildet also die Gesamtheit der einfachen K_v^* in bestimmtem Sinne eine *Basis* der K_v^*. Zu dieser Basis gehören sicher alle einfachen Dreieckkomplexe K_3, die also keinen von einem Dreieck verschiedenen Dreieckkomplex als echten Teilkomplex enthalten. Im folgenden lernen wir noch einen nichtebenen, einfachen K_v^*

($= K_0$) kennen[16]). Es wird gezeigt, daß die Basis der K_r^* mit diesem K_0 und den einfachen K_3 (und den trivialen Elementen k und 0) bereits erschöpft ist.

§ 2.

Aufstellung der Basis.

Wir kommen nunmehr zu den entscheidenden Hilfssätzen.

VI. Voraussetzung. K^* nicht eben (d. h. K^* läßt sich nicht in die Ebene einbetten).

Behauptung. $K^* = K_1 + K_2$, wobei K_1 und K_2 genau drei oder zwei Ecken[17]) gemeinsam haben und außerdem die Eckenzahl von K_1 wie von K_2 im ersten Falle > 3, im zweiten Falle > 2 ist.

Beweis. Wir können zunächst annehmen, daß K^* zusammenhängend ist[18]). Es sei dann K ein *ebener* Teilkomplex von K^* *maximaler* Kantenzahl. Es folgt, daß auch K zusammenhängend ist, da K von maximaler Kantenzahl ist. Ferner verbindet jede Kante von $K^* - K$ zwei Ecken von K. Wir wollen im folgenden jede solche Kante eine *Brücke* von K nennen. Es sei nun b eine Brücke von K. $K + b$ ist nicht eben. Da $K + b$ infolge der Definition des K^* keinen K_a enthält, muß es also nach dem Satz I der Einleitung in $K + b$ einen K_b (Fig. 1b) geben. Also liegt in $K + b$ die Fig. 6[19]). P ist das e_1 und e_2 ($=$ Endpunkte von b) trennende Polygon. Die Gesamtheit der Brücken von K, die zwei Ecken im Inneren (bzw. im Äußeren) von P oder eine Ecke im Inneren (bzw. Äußeren) von P mit einer Ecke auf P verbinden, bezeichnen wir einmal mit B_1 (bzw. B_2). Ferner sei B_{12} die Gesamtheit der Brücken, die eine Ecke im Inneren mit einer Ecke im Äußeren von P verbinden. Sodann bezeichnen wir einmal die Gesamtheit der Kanten, die von e_1 (bzw. e_2) aus in $K + B_1 + B_2$ erreichbar sind, ohne P zu passieren, mit K_1' (bzw. K_1). Durch Hinzufügung weiterer Kanten zu K_1' und K_1'' konstruieren wir nun

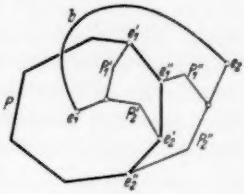


Fig. 6.

---

[16]) K_0 enthält kein Dreieck, so daß also auch der Hilfssatz IV an dem Aufbau der K_r^* aus den Elementen der Basis beteiligt ist.

[17]) Und eventuell Kanten, die diese Ecken verbinden.

[18]) D. h. K^* läßt sich nicht als Summe zweier punktfremder, von 0 verschiedener Komplexe darstellen.

[19]) Hierbei kann speziell der Polygonzug, der in der Fig. 6 von e_1, desgleichen e_2, nach der nächsten mit o markierten Ecke verläuft, 0 sein. In den Zeichnungen stellen wir der Übersicht wegen eine Brücke durch einen Bogen dar.

schrittweise die beiden Teilkomplexe K' und K'' von K^* wie folgt. Wir nehmen an, daß wir dabei bereits bei den beiden Teilkomplexen K'_n und K''_m von K^* angelangt sind. Von K'_n und K''_m setzen wir voraus: **1.** Der Durchschnitt von K'_n und K''_m besteht höchstens aus Ecken von P, **2.** von K'_n, desgleichen K''_m aus kann man keine weiteren Kanten von $K + B_1 + B_2$ erreichen, es sei denn, daß man P passiert. Es sei nun b_{12} eine Brücke aus B_{12}, die nur eine Ecke mit $K'_n + K''_m$ — etwa mit K'_n — gemeinsam hat. Wir fügen nun zu K'_n die Kante b_{12} und die Gesamtheit der Kanten hinzu, die man von K'_n aus über b_{12} in $K + B_1 + B_2$ erreichen kann, ohne P zu passieren. Auf diese Weise erhalten wir aus K'_n einen Komplex K'_{n+1}. Für K'_{n+1} und K''_m gelten nunmehr die analogen Sätze 1. und 2., mithin auch für die Komplexe K'_{n_0} und K''_{m_0}, zu denen wir schließlich am Ende der Konstruktion gelangen. Jede Brücke aus B_{12} ist also entweder mit $K'_{n_0} + K''_{m_0}$ punktfremd oder ihre beiden Endpunkte liegen auf $K'_{n_0} + K''_{m_0}$. Der Komplex K' (s. oben) entstehe aus K'_{n_0} durch Hinzufügung aller Brücken aus B_{12}, deren Endpunkte beide auf K'_{n_0} liegen. (Analog K'' aus K''_{m_0}.) Die Sätze 1. und 2. behalten also auch für K' und K'' ihre Gültigkeit. Es sei B'_{12} die Gesamtheit der Brücken aus B_{12}, die eine Ecke von K' mit einer Ecke von K'' verbinden. Dann folgt: Jede Kante k von $\overline{P} = K^* - (K' + K'' + B'_{12})$ hat mit $K' + K'' + B'_{12}$ höchstens Ecken auf P gemeinsam, d. h. **3.** der Durchschnitt von $\overline{P}$ mit $K' + K'' + B'_{12}$ besteht höchstens aus Ecken von P. Denn wir unterscheiden die beiden Fälle, daß k entweder zu $K + B_1 + B_2$ oder zu B_{12} gehört. Hätte dann k mit $K' + K'' + B'_{12}$ eine Ecke gemeinsam, die nicht auf P liegt, so hätte im ersten Falle k nach Konstruktion von K' und K'' in einem der beiden Komplexe aufgenommen werden müssen; im zweiten Falle wäre die Konstruktion der K'_n und K''_m nicht zu Ende geführt worden. Insgesamt haben wir also K^* zerlegt in:

$$K^* = K' + K'' + B'_{12} + \overline{P}.$$

Nach 1., 2. und 3. sind K' und K'', sowie $K' + K''$ und $\overline{P}$ höchstens bis auf Ecken von P punktfremd. B'_{12} ist die Gesamtheit der Brücken aus B_{12}, die K' mit K'' verbinden. Nach der Fig. 6 hat K', desgleichen K'' mit $\overline{P}$, d. h. mit P mindestens zwei Ecken[20]) gemeinsam.

Wir beweisen zunächst die Behauptung für den *Spezialfall*, daß B'_{12} nur aus der Brücke b besteht (Fig. 6). Also:

Annahme. $B'_{12} = b$.

Es folgt dann sofort, daß entweder K' oder K'' höchstens zwei Ecken (d. h. nach Fig. 6 genau zwei Ecken) mit P gemeinsam hat. Denn

[20]) Im folgenden ist entscheidend, daß sich in der Fig. 6 die beiden Eckenpaare von K' und K'' auf P trennen.

andernfalls gäbe es von e_1 aus außer den beiden Polygonzügen P_1' und P_2' der Fig. 6 noch einen weiteren P_3' in K', die in drei verschiedenen Punkten von P enden und sonst mit P punktfremd sind. Desgleichen gäbe es analog von e_2 aus drei Polygonzüge P_1'', P_2'' und P_3'' in K''. Dann ließe sich aber unter Berücksichtigung der Fußnote [20]) der Komplex $P + P_1' + P_2' + P_3' + P_1'' + P_2'' + P_3'' + b$ auf einen K_a zusammenziehen, mithin auch K^*, im Widerspruch zur Definition. Wir können also annehmen, daß K' mit P nur zwei Ecken gemeinsam hat. Die beiden Komplexe

$$K_1 = K' + b,$$
$$K_2 = K'' + \overline{P}$$

erfüllen dann aber die Behauptung, womit der Spezialfall bewiesen ist.

e' sei eine beliebige, feste Ecke von K', die nicht auf P liegt[21]). Wir bezeichnen nun einen Teilkomplex von K' als ein Ende E um e', wenn 1. e' zu E gehört, 2. E mit P fremd ist und 3. E mit dem Komplex $K' - E$ nur eine Ecke e gemeinsam hat. e trennt also E von $K' - E$. Wir nennen e die trennende Ecke von E. Jedes Ende ist zusammenhängend, da dasselbe für K' gilt. $\overline{E}$ sei ein anderes Ende um e' mit der trennenden Ecke $\bar{e}$. Dann liegt entweder e in $\overline{E}$ oder $\bar{e}$ in E. Denn wir verbinden e' mit e durch einen Polygonzug in E. Falls dieser aus $\overline{E}$ austritt, so muß dies in $\bar{e}$ geschehen, d. h. $\bar{e}$ gehört zu E. Andernfalls liegt e in $\overline{E}$. Wir behaupten nun, daß auch $E + \overline{E}$ ein Ende um e' mit der trennenden Ecke e oder $\bar{e}$ ist. Denn $E + \overline{E}$ erfüllt die Bedingungen 1. und 2. Nach 3. hat $E + \overline{E}$ mit $K' - (E + \overline{E})$ entweder nur eine der beiden Ecken e und $\bar{e}$ (evt. $e = \bar{e}$) oder beide zugleich gemeinsam. Der erste Fall liefert die Behauptung. Im zweiten Falle lägen aber beide Ecken e und $\bar{e}$ sowohl in $K' - E$ wie in $K' - \overline{E}$ und, wie wir eben sahen, entweder in E oder $\overline{E}$ entgegen der Definition von E und $\overline{E}$. Mithin ist $E + \overline{E}$ ein Ende um e'. Also gibt es ein *größtes* Ende E' um e' (evt. $E' = 0$). Wir bezeichnen E' als ein Ende von K'. Je zwei Enden von K' sind also punktfremd. Die folgenden Betrachtungen können wir dadurch vereinfachen, daß wir uns alle Enden von K' und K'' auf 0 zusammengezogen denken. Wir wollen also im folgenden annehmen:

A. Außer 0 gibt es in K' und K'' kein Ende.

Wir müssen dann bei der Zerlegung von K^* in die beiden Summanden K_1 und K_2 nur darauf achten, daß alle Brücken aus B_{12}', die eine Ecke gemeinsam haben (d. h. deren Endpunkte ursprünglich in demselben Ende

[21]) Die Betrachtungen gelten analog für K''.

von K' oder K'' lagen), zugleich entweder in K_1 oder K_2 aufgenommen werden. e' sei jetzt eine beliebige, nicht auf P gelegene Ecke von K'. Wir behaupten:

B. Es gibt von e' aus in K' zwei bis auf e' punktfremde Polygonzüge nach P, von denen wenigstens einer in e_1' oder e_2' der Fig. 6 endet. (Analog für e'' und K'').

Denn nach der Fig. 6 und der Konstruktion von K' gibt es überhaupt zwei Polygonzüge in K', die e' mit den beiden Ecken e_1' und e_2' von P verbinden. Nun sei P_1 einer dieser beiden Polygonzüge, etwa derjenige, der in e_1' endet. Betrachten wir einmal einen weiteren Polygonzug P_2 in K', der von e' aus zunächst ein Stück auf P_1 bis zu einer Ecke $e \neq e_1'$ von P_1 verläuft, sich dann von P_1 trennt und, ohne wieder P_1 zu treffen, auf P endet. Wir unterscheiden dann die beiden Fälle: 1. alle e' und P verbindenden Polygonzüge von K' passieren die Ecke e, und 2. es gibt einen Polygonzug P' in K', der e' mit P verbindet, aber e meidet. Im 1. Falle folgt $e = e'$, also B., da nach A. jedes Ende von K' gleich 0 ist. Im 2. Falle können wir P_1 (exklusive e_1') und P_2 mit Hilfe von P' so abändern, daß das gemeinsame Stück $[e'e]$ der beiden Polygonzüge verkürzt wird. Durch Wiederholung der Betrachtungen auf die beiden abgeänderten Polygonzüge erhält man schließlich die beiden gesuchten Polygonzüge von B. Wir beweisen nun allgemein die Behauptung des Hilfssatzes VI für den

Fall I. K' hat auf P mindestens drei Ecken.

Dann hat K'' auf P nur zwei Ecken, da sich sonst mit den Schlüssen des Spezialfalles K^* auf einen K_5 zusammenziehen läßt. Nach B müssen wir die Fälle a), b) und c) der Fig. 7 unterscheiden.

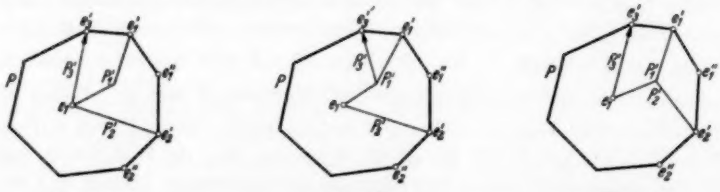


Fig. 7a. Fig. 7b. Fig. 7c.

Wir machen zunächst für a) und c) die Einschränkung, daß e_3' von e_1'' und e_2'' verschieden ist. V' sei nun die Gesamtheit der Kanten von K', die von den Kanten von B_{12}' aus auf einem Polygonzug in K' zu erreichen sind, ohne e_1 oder eine Ecke von P zu passieren. Verfolgen wir einmal einen solchen Polygonzug P' von V'. Wie man sich leicht an Hand der Fig. 7a, b und c überzeugt, passiert P' keine Ecke von

$P_1' + P_2' + P_3'$, da sich andernfalls K^* auf einen K_a zusammenziehen läßt; ferner endet P' auf P höchstens in den Ecken e_1'' oder e_2''. Also hat V' mit $K' - V'$ und P höchstens die Ecken e_1, e_1'' und e_2'' gemeinsam. Für $V' \neq 0$ erfüllt also

$$(1) \qquad \begin{aligned} K_1 &= K'' + B_{12}' + V' \\ K_2 &= (K' - V') + \bar{P} \end{aligned}$$

die Behauptung, und für $V' = 0$ (d. h. alle Kanten von B_{12}' enden in e_1):

$$(2) \qquad \begin{aligned} K_1 &= K'' + B_{12}' \\ K_2 &= K' + \bar{P}. \end{aligned}$$

Es bleibt noch übrig, daß für a) oder c) $e_3' = e_1''$ oder $e_3' = e_2''$ ist. Aus Symmetriegründen können wir annehmen: $e_3' = e_1''$ (Fig. 7′a und c). Im Falle a) sei V' wie oben bestimmt. P' sei ein Polygonzug von V' P' passiert die Polygonzüge P_1' oder P_2' nicht, da andernfalls entweder K^* sich auf einen K_a zusammenziehen läßt oder (falls P' zuvor noch P_3' passieren würde) man zur Fig. 7b gelangt, die erledigt ist. Desgleichen endet P' auf P höchstens in $e_1'' = e_3'$ oder e_2''. Mithin erfüllen die Gleichungen (1) oder (2) die Behauptung. Im letzten Falle c) berücksichtigen wir, daß wir die folgende Annahme machen können: In K'

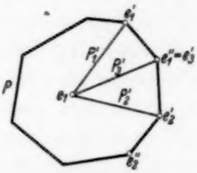


Fig. 7′a.

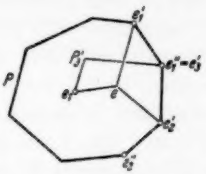


Fig. 7′c.

gibt es keinen Polygonzug, der $(e_3' e_1]$[22]) $+ (e_1 e)$ mit $(e e_1')$, $(e e_2')$ oder P (exklusive $e_3' = e_1''$ und e_2'') verbindet und bis auf seine Endpunkte mit der Fig. 7′c punktfremd ist. Denn ein Polygonzug, der $(e_3' e_1]$ mit $(e e_1']$, $(e e_2']$ oder mit P (exklusive e_1'' und e_2'') verbindet, verhilft uns zu den in Fig. 7 und 7′a erledigten Fällen. Verbindet der Polygonzug im anderen Falle $(e_1 e)$ mit $(e e_1']$ oder $(e e_2']$, so können wir das gemeinsame Stück $[e_1 e]$ analog den Schlüssen des Beweises von B. verkürzen. In dem letzten Falle schließlich liegen die Endpunkte des Polygonzuges auf $(e_1 e)$ und P, wobei der Endpunkt auf P von den vier markierten Ecken auf P der Fig. 7′c verschieden ist. Wir können dann aber den Polygonzug an

[22]) Kurze Bezeichnung für den Polygonzug, der in der Fig. 7′c von e_3' nach e_1 verläuft. Die eckige Klammer bedeutet inklusive, die runde Klammer exklusive des betreffenden Endpunktes.

Stelle von $(e e_1')$ oder $(e e_2')$ in die Fig. 7'c setzen, so daß sich die beiden Eckenpaare auf P wie bisher trennen. Da hierdurch das gemeinsame Stück $[e_1 e]$ verkürzt wird, gelangen wir also am Ende entweder zu der Fig. 7'a, die erledigt ist, oder zu der Fig. 7'c, in der die gemachte Annahme erfüllt ist. V' sei nunmehr die Gesamtheit der Kanten von K', die von den Kanten von B_{12}' aus auf einem Polygonzug in K' zu erreichen sind, ohne e oder P zu passieren. P' sei ein Polygonzug von V', der also weder e noch eine Ecke von P überschreitet. Unter Berücksichtigung der letzten Annahme endet P' auf P höchstens in $e_3' = e_1''$ oder e_2''. Mithin hat V' mit $K' - V'$ und P höchstens die drei Ecken e, e_1'' und e_2'' gemeinsam. $[e_1 e_3']$ sowie $[e_1 e]$ ist in V' enthalten, da b in $e_1 \neq e$ endet. Also erfüllt

$$(3) \qquad \begin{aligned} K_1 &= K'' + B_{12}' + V', \\ K_2 &= (K' - V') + \bar{P} \end{aligned}$$

die Behauptung.

Mit den drei Fällen ist der Fall I vollständig bewiesen.

Fall II. K' wie K'' hat auf P genau zwei Ecken.

Nach der Bemerkung B liegt also in K^* die Fig. 8. Wie im Fall I müssen wir mehrere Fälle unterscheiden.

1. B_{12}' enthält zwei punktfremde Brücken b_1 und b_2 (Fig. 9), die mit $e_1 + e_2$ punktfremd sind (d. h. b, b_1 und b_2 sind paarweise punktfremd).

Wir behaupten, daß sich dann K^* auf einen K_a zusammenziehen läßt. Wir nehmen einmal die folgende Behauptung als bewiesen an:

C. Von den drei Brücken b, b_1 und b_2 greife man zwei willkürlich heraus (etwa b_1 und b_2). Dann gibt es in K' zwei punktfremde Polygonzüge P' und Q', von denen P' eine der beiden herausgegriffenen Brücken mit P, und Q' die Endpunkte der beiden anderen Brücken, ohne P zu berühren, miteinander verbindet. (Analog P'' und Q'' in K'').

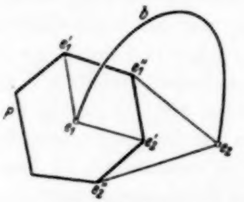


Fig. 8.

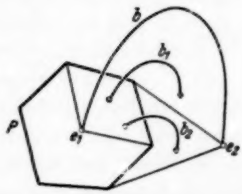


Fig. 9.

Aus Symmetriegründen können wir dann annehmen, daß P' b_1 mit P, und P'' b_2 mit P verbindet. Ziehen wir nun P', Q', P'' und Q'' auf 0 zusammen, nehmen b_1 zu K'' und b_2 zu K' hinzu, so läßt sich K^* mit den Schlüssen des Spezialfalles auf einen K_a zusammenziehen.

Wir müssen uns also noch von C. überzeugen. Nach B. liegt nun in $K' + P$ die Fig. 9', in der die mit o markierten Ecken die Endpunkte von b_1 und b_2 sind und die beiden mit einem Pfeil angedeuteten Polygonzüge in zwei beliebigen, verschiedenen Punkten der beiden anderen Polygonzüge von K' der Fig. 9' enden. Da die beiden Ecken o der Fig. 9' in K' verbindbar sind, ohne P zu berühren, können wir annehmen, daß wenigstens einer der beiden Endpunkte der beiden Pfeile von e_1' und e_2' verschieden ist. Insbesondere können die beiden Endpunkte o von b_1 und

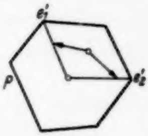


Fig. 9'.

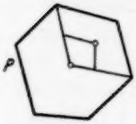


Fig. 9' a.

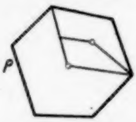


Fig. 9' b.

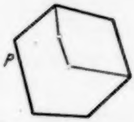


Fig. 9' c.

b_2 auf einem von e_1' nach e_2' führenden Polygonzug von K' liegen. Wir müssen also die drei Fälle der Fig. 9' a, b und c unterscheiden. An Hand der drei Figuren überzeugt man sich unmittelbar von C., gleichgültig wo e_1 liegt. Der Fall 1. kann also nicht auftreten.

2. B_{12}' enthält zwei punktfremde Brücken b_1 und b_2, von denen b_1 mit $e_1 + e_2$ und b_2 mit e_2 punktfremd ist (Fig. 10).

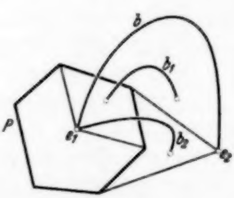


Fig. 10.

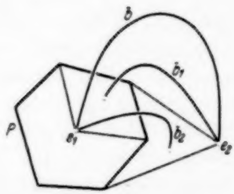


Fig. 11.

Auch dieser Fall scheidet aus. Denn nach B. gibt es einen Polygonzug in K', der den Endpunkt von b_1 mit P verbindet, ohne e_1 zu passieren. Wir ziehen diesen Polygonzug auf 0 zusammen und wenden C. auf b, b_2 und K'' an. Wie wir bei dem Fall 1. sahen, ließe sich dann aber K^* auf einen K_a zusammenziehen.

3. B_{12}' enthält zwei punktfremde Brücken b_1 und b_2, von denen b_1 mit e_1 und b_2 mit e_2 punktfremd ist (Fig. 11).

Auch dieser Fall führt zu einem Widerspruch, da wir sonst K^* mit den Schlüssen des 2. Falles auf einen K_a zusammenziehen können.

4. B'_{12} enthält eine Brücke b_1, die mit $e_1 + e_2$ fremd ist (Fig. 12).

Aus 1., 2. und 3. und Symmetriegründen folgt zunächst, daß B'_{12} mit b und b_1 bereits erschöpft ist. — Wir nehmen zunächst einmal an, daß jeder Polygonzug in K', der e' mit e_1' (analog e_2') ohne Berührung von e_2' verbindet, e_1 passiert. V' sei dann die Gesamtheit der Kanten von K', die wir von e' aus in K' erreichen können, ohne e_1 oder e_2' zu überschreiten. Nach der Annahme hat V' mit $K' - V'$ höchstens die beiden Ecken e_1 und e_2' gemeinsam. Also erfüllt in diesem Falle

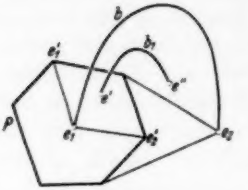


Fig. 12.

$$K_1 = V' + b_1,$$
$$K_2 = K' - V' + K'' + b + \overline{P}$$

die Behauptung. Andernfalls liegt in K^* die Fig. 12′ ($e_1 \neq e$, eventuell $e' = e$, entsprechend in K''), da wir e' erstens nach B. durch zwei bis auf den gemeinsamen Anfangspunkt punktfremde Polygonzüge in K' mit P und zweitens, da K' zusammenhängend ist, durch einen mit P punktfremden Polygonzug in K' mit e_1 verbinden können. Wir behaupten nun, daß alle Polygonzüge in K', die e_1 mit e_1' oder e' verbinden und höchstens bis auf den Endpunkt e_1' mit P fremd sind, e passieren müssen. Denn andernfalls gäbe es von e_1 und ebenso von e_2 aus drei Polygonzüge, die in den drei verschiedenen mit 1 bzw. 2 bezeichneten Ecken des geschlossenen Polygons $e'\,e\,e_1'\,e_1''\,e\,e''\,e'$ (Fig. 12″) enden. Die Fig. 12″ läßt sich also auf einen K_5 zusammenziehen. Mithin würde dasselbe für K^* gelten entgegen der Definition.

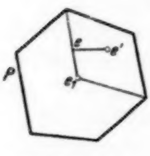


Fig. 12′.

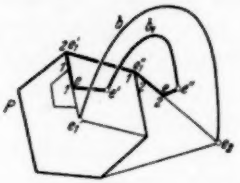


Fig. 12″.

— Die Gesamtheit der Kanten von K', zu denen wir nun in K' von e_1 aus gelangen können, ohne e oder P zu passieren, wollen wir mit V' bezeichnen. V' hat also mit $K' - V'$ höchstens die beiden Ecken e und e_2' gemeinsam. Ferner gehört e' nicht zu V'. Also erfüllt

$$K_1 = V' + b,$$
$$K_2 = (K' - V') + K'' + b_1 + \overline{P} \text{ die Behauptung VI.}$$

Es bleibt noch übrig:

5. Alle Brücken aus B'_{12} enden auf K' in e_1 (oder auf K'' in e_2). Wir setzen:

$$K_1 = K'' + B'_{12}$$
$$K_2 = K' + \overline{P}.$$

Mit diesen fünf Fällen ist also der Fall II vollständig erledigt und mithin der Hilfssatz VI bewiesen.

VII. Voraussetzung: K_v^* nicht eben.

Behauptung: Es gilt einer der drei folgenden Fälle:

(1) $K_v^* = K_1 + K_2,\ K_1 \cdot K_2 = k\ (K_1 \text{ und } K_2 \neq k),$

(2) $K_v^* = K_1 + K_2,\ K_1 \cdot K_2 = D\ (K_1 \text{ und } K_2 \neq D),$

(3) $K_v^* = K_1 + T,\ K_1 \cdot T = e_1 + e_2 + e_3$ (Fig. 13).

Der Komplex T besteht aus drei Kanten, die eine Ecke (= Spitze von T) gemeinsam haben. Keine Kante von K_1 verbindet zwei der Ecken e_1, e_2 und e_3 (= Fußpunkte von T).

Beweis: Nach VI. gilt die Zerlegung $K_v^* = K_1 + K_2$, wobei K_1 und K_2 genau entweder zwei Ecken e und e' oder drei Ecken e_1, e_2 und e_3 (und eventuell die diese Ecken verbindenden Kanten) gemeinsam haben. Im ersten Falle sei k die Kante ee'. Nach dem Hilfssatz I' können wir K_1 wie K_2 auf k, also K_v^* auf $K_1 + k$ und $K_2 + k$ zusammenziehen. Nach dem Hilfssatz I läßt sich mithin die Summe

$$K_1 + K_2 + k = K_v^* + k$$

auf keinen K_a zusammenziehen, d. h. k gehört zu K_v^*. Also gilt (1). Im zweiten Falle sei D das Dreieck mit den Ecken e_1, e_2 und e_3. Wir nehmen dann zunächst an,

Fig. 13.

Fig. 14.

daß sich sowohl K_1 wie K_2 auf D, d. h. K_v^* auf $K_1 + D$ und $K_2 + D$ zusammenziehen läßt. Aus dem Hilfssatz I folgt dann: D gehört zu K_v^*, mithin (2). Andernfalls können wir annehmen, daß sich K_2 nicht auf D zusammenziehen läßt. Da nach VI. die Eckenzahl von $K_2 > 3$ ist, gibt es in K_2 eine von e_1, e_2 und e_3 verschiedene Ecke. Wir können annehmen, daß wir diese Ecke mit e_1, e_2 und e_3 durch drei Polygonzüge in K_2 verbinden können, da der Fall (1) erledigt ist. Also liegt in K_2 die Fig. 14. $(ee_1]$ läßt sich mit $(ee_2]$ oder $(ee_3]$ nicht durch einen Polygonzug in K_2 verbinden, der die Ecke e meidet, da wir andernfalls K_2 auf D zusammenziehen könnten. Also folgt entweder der Fall (1) oder $[ee_1] = k_1$ (Kante), desgleichen $[ee_2] = k_2$, $[ee_3] = k_3$; d. h. $K_2 = T$, w. z. b. w.

Nach dem Hilfssatz II des § 1 erhalten wir durch Zusammensetzung der Dreieckkomplexe K_3 lauter K_v^*. Wir wollen einen solchen Komplex mit K_3^* bezeichnen. Es sei also $K_3^* = \sum_{i=1}^{n} K_3^{(i)}$ mit $K_3^{(i)} \cdot \sum_{j=1}^{i-1} K_3^{(j)} = D_i$ (= Dreieck), $i = 2, 3, \ldots, n$[23]).

[23]) K_3^* ist also in bestimmtem Sinne ein verallgemeinerter Dreieckkomplex.

VIII. Voraussetzung: 1. $K_v^* = K_1 + T$; $K_1 \cdot T = e_1 + e_2 + e_3$ (Fig. 13); keine Kante von K_1 verbindet zwei der Ecken e_1, e_2 und e_3 (entsprechend dem 3. Fall des Hilfssatzes VII.),

2. K_v^* enthält keinen anderen von 0, k und D verschiedenen K_r^* als echten Teilkomplex, d. h. K_v^* gehört zur Basis der K_v^*,

3. k_1 und k_2 seien zwei Kanten des Dreiecks durch die drei Fußpunkte von T (= gemeinsame Ecken von T und K_1). $K_1 + k_1 + k_2$ ist Teilkomplex eines K_3^*.

Behauptung: $K_v^* = K_0$, wobei K_0 der Komplex der Fig. 15 ist.

Beweis: Wir überzeugen uns zunächst davon, daß K_0 ein K_r^* ist. Erstens läßt sich K_0 auf keinen K_a zusammenziehen; denn gleichgültig, wie wir K_0 auf einen Komplex mit 5 Ecken zusammenziehen, so hat dieser höchstens 9 Kanten, da K_0 aus 8 Ecken und nur 12 Kanten besteht, entgegen der Kantenzahl des K_a der Fig. 1a. Zweitens können wir $K_0 + k$ [24]) auf einen K_a zusammenziehen. Denn Fig. 15 ist der Fig. 15′ homöomorph. Wie ersichtlich besteht letztere, mithin K_0 aus der Kontur 1, 2, 3, …, 8, 1 eines Möbiusschen Bandes, sowie den vier Kanten [15], [26], [37] und [48], die das Möbiussche Band in vier Rechtecke zerlegen. Aus Symmetriegründen brauchen wir also nur die beiden Fälle $k = [13]$ und $k = [14]$ zu untersuchen. In beiden Fällen können wir aber an Hand der Fig. 15 leicht $K_0 + k$ auf einen K_a zusammenziehen. Also ist K_0 ein K_r^*. Aus V. folgt dann, daß K_0 ein Element der Basis ist. — Wir beweisen zunächst die Behauptung für den speziellen Fall, daß in der Voraussetzung 3. $K_3^* = K_3$ ist. Also:

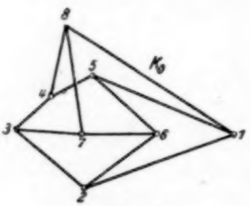


Fig. 15.

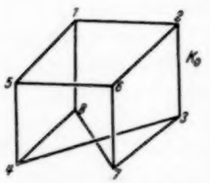


Fig. 15′.

Annahme: $K_3^* = K_3$, d. h. $K_1 + k_1 + k_2$ ist eben.

b sei die Kante, die e_1 mit e_2 verbindet (Fig. 16). Dann ist

$$K_1 + k_1 + k_2 + b$$

nicht eben, da sonst nach dem Hilfssatz II des § 1 K_r^* nicht zur Basis gehören würde. Also liegt nach I. der Ein-

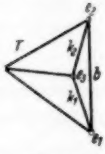


Fig. 16.

Fig. 16a.

[24]) k verbindet zwei beliebige, nicht durch eine Kante von K_0 bereits verbundene Ecken von K_0.

leitung in $K_1 + k_1 + k_2 + b$ entweder ein K_a oder K_b, der die Kante b enthält. In beiden Fällen gibt es demnach in K_1 ein e_1 und e_2 trennendes Polygon durch e_3 (Fig. 16a). Denn K_a bzw. K_b liegt bis auf die Kante b in der Ebene. Nun besteht im ersten Falle K_a aus fünf Ecken, die paarweise durch Polygonzüge (= Polygonzüge von K_a) verbunden sind. Von jedem der beiden Endpunkte desjenigen Polygonzuges von K_a, der b enthält, gehen dann in der Ebene drei Polygonzüge von K_a aus. Die drei Endpunkte dieser sechs Polygonzüge sind durch drei weitere Polygonzüge von K_a in der Ebene verbunden, die zusammen das e_1 und e_2 trennende Polygon bilden. Zum zweiten Falle vergleiche man die Fig. 6. Die Schlüsse sind dem ersten Falle analog. Das e_1 und e_2 trennende Polygon geht durch e_3, da $e_1\, e_3$ und $e_2\, e_3$ durch die Kanten k_1 und k_2 verbunden sind. Es sei nun P das *kleinste* Polygon dieser Art (d. h. es gibt in K_1 kein anderes mit dem Äußeren von P fremdes Polygon, das e_1 und e_2 trennt). K' sei die Gesamtheit der Kanten von K_1, die wir von e_1 aus in K_1 erreichen können, ohne eine Ecke von P zu passieren. Analog sei im Äußeren von P der Komplex K'' definiert. K' und desgleichen K'' hat auf P mindestens zwei Ecken, da sonst nach dem Fall (1) von VII. K_r^* kein Element der Basis wäre. Wir behaupten nunmehr: Es gibt auf P zwei Punktepaare (eines aus K', das andere aus K''), die sich auf P trennen. Zum Beweis betrachten wir die Polygonzüge, in die P durch die Ecken von K'' zerlegt wird (Fig. 16b). Wäre die Behauptung nicht erfüllt, so müßten alle gemeinsamen Ecken von K' mit P auf einem dieser Polygonzüge — etwa auf P' — liegen. Denn in dem Falle, daß K' auf P eine Ecke hat, die nicht zu K'' gehört, ist dies selbstverständlich; im anderen Falle hat K' auf P höchstens, d. h. genau zwei Ecken, da sich sonst $K_1 + T = K_r^*$ auf einen K_a zusammenziehen ließe. Die beiden Ecken sind dann speziell die Endpunkte des gesuchten P'. P'' sei der komplementäre Polygonzug von P' auf P. Auf P'' liegen also alle gemeinsamen Ecken des K'' mit P. $K'' + P''$ hat mit $K_1 - (K'' + P'')$ nur die beiden Endpunkte von P'' gemeinsam, da P das kleinste Polygon war. Fügen wir nun die Kanten von T zu $K'' + P''$ oder $K_1 - (K'' + P'')$ hinzu, je nachdem der Endpunkt der Kante zu dem einen oder dem anderen Komplex gehört, so ist hiermit K_r^* in zwei Komplexe mit drei

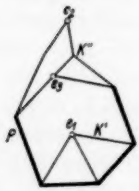


Fig. 16b.

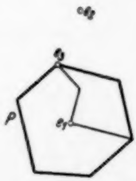


Fig. 16c.

Fig. 16d.

gemeinsamen Ecken zerlegt. Die Kantenzahl eines jeden der beiden Komplexe ist > 3. Dann ist aber nach VII. K_v^* kein Element der Basis, entgegen der Voraussetzung 2. Hiermit ist die letzte Behauptung bewiesen. Es folgt nun, daß sowohl K' wie K'' höchstens, also genau zwei Ecken auf P haben. Denn hätten K' und K'' beide drei Ecken auf P, so ließe sich unter Berücksichtigung der letzten Behauptung $K' + K'' + P + T$, also K_v^* auf einen K_a zusammenziehen. Hätte etwa K' zwei Ecken, dagegen K'' drei Ecken auf P, so müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, je nachdem e_3 zu K' gehört oder nicht. Der erste Fall (Fig. 16c) scheidet aus, da dann, wie man mit VII. feststellt, K_v^* kein Element der Basis wäre. Im zweiten Falle wäre die Spitze von T mit e_3 und über e_1 in K' mit zwei weiteren Ecken von P und desgleichen e_2 in K'' mit drei Ecken von P verbunden. $K' + K'' + P + T$ ließe sich dann aber auf einen K_a zusammenziehen. Wir sehen also, daß K' wie K'' genau zwei Ecken auf P hat, die von e_3 verschieden sind. Mithin liegt in K_1 die Fig. 16d, die zusammen mit T den Komplex K_0 (bis auf eine Unterteilung der Kanten von K_0) liefert. Also folgt unter Berücksichtigung von VII. (1. Fall) aus der Vollständigkeit von K_0: $K_v^* = K_0$, womit der Spezialfall bewiesen ist.

Im allgemeinen Falle liegt $K_1 + k_1 + k_2$ in einem K_3^*. Wir wollen einmal K_3^* aus seinen K_3, entsprechend dem Hilfssatz II, zusammenheften und dabei versuchen, K_3^* in die Ebene einzubetten. Nach Konstruktion des K_3^* gibt es darin einen K_3, der $k_1 + k_2$ enthält. Wir legen zunächst diesen K_3 in die Ebene (großes Dreieck in Fig. 17). Es bietet keine Schwierigkeit, hierzu einen weiteren K_3 des K_3^* in die Ebene einzubetten, falls das Dreieck in der Ebene, an das K_3 geheftet werden soll, im Inneren oder Äußeren frei von Ecken und Kanten ist. Sonst müssen wir zwei Fälle unterscheiden: 1. das Dreieck in der Ebene, an das K_3 zu heften ist, enthält $k_1 + k_2$ entweder im Inneren (inklusive Dreieck) oder im Äußeren (inklusive Dreieck); 2. das Dreieck enthält k_1 im Inneren und k_2 im Äußeren oder umgekehrt. Der 1. Fall führt zu einem Widerspruch, da K_v^* durch das Dreieck in zwei Teilkomplexe geteilt wird, die Eckenzahl eines jeden der beiden > 4 ist, mithin nach VII. K_v^* kein Element der Basis wäre im Widerspruch zur Voraussetzung 2. Mit den Schlüssen des 1. Falles folgt im 2. Falle, daß K_3 außer dem Dreieck, das an das Dreieck in der Ebene geheftet

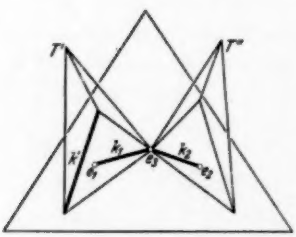


Fig. 17.

werden soll, aus einem Kantentripel T' mit einer gemeinsamen Ecke (= Spitze von T') besteht (Fig. 17). Es folgt also, daß K_3^* bis auf einige Kantentripel $T', T'', \ldots$ in der Ebene liegt. Hierbei sind die drei Fußpunkte von T', desgleichen von $T'' \ldots$ die drei Ecken eines Dreiecks von K_3^* in der Ebene, das e_1 und e_2 trennt und durch e_3 geht (Fig. 17). Da der Spezialfall eines ebenen K_3^* erledigt ist, so können wir annehmen, daß es ein Kantentripel T' gibt. Wir wollen ferner annehmen, daß das Dreieck D' durch die drei Fußpunkte von T' e_1 im Inneren enthält und das *kleinste* dieser Art ist. Alle Fußpunkte von $T'' \ldots$ liegen also auf D' oder im Äußeren von D'. Aus diesem Grunde wollen wir $T'' \ldots$ im folgenden zum Äußeren von D' rechnen, so daß also $K_r^* - (T + T')$ in Inneres und Äußeres von D' aufgeteilt ist. k' sei die e_3 gegenüberliegende Kante von D'. Wir ziehen die an e_3 liegende Kante von T' auf 0 zusammen (Fig. 18). Wir behaupten, daß die in D' (analog im Äußeren von D') liegende Teilfigur von $K_r^* - T$ die Fig. 19 oder 19' ist. Zum Beweis betrachten wir zunächst den speziellen Fall, daß wir e_1 auf $K_v^* - T$ im Inneren von D' (analog e_2 im Äußeren von D') nur mit zwei Ecken von D' verbinden können. Da e_1 mit e_3 durch keine Kante von K_v^* verbunden ist, so folgt mit den bereits mehrmals angewandten Schlüssen, daß die in D' liegende Teilfigur von $K_r^* - T$ die Fig. 19 ist. Wir können also nunmehr annehmen, daß e_1 auf $K_v^* - T$ mit den drei Ecken von D' im Inneren von D' verbindbar ist (desgl. im Äußeren von D' für e_2, eventuell die analoge Fig. 19 für das Äußere von D'). Dann liegt also in D' die Fig. 18'. e_1 liegt auf einem der drei Polygonzüge P_1', P_2' oder P_3' (eventuell $e_1 = e$). Wir überzeugen uns zunächst davon, daß von P_1', P_2' und $P_3' = (e\,e_3]$ keine zwei durch einen Polygonzug in D' verbunden sind, der e meidet. Wir legen dazu der folgenden Betrachtung die Fig. 18' zugrunde. Ist etwa $(e\ e_1]$ mit P_1' oder P_2' verbunden, so ändern wir P_1' und P_2' ab und verkürzen hiermit das Stück $[e\ e_1]$. Lägen die Endpunkte des Polygonzuges auf $(e_1\ e_3]$ und P_1' oder auf P_1' und P_2', so könnten wir den Polygonzug zusammen mit $P_1' + P_2' + P_3'$ und T' in

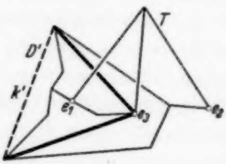


Fig. 18.

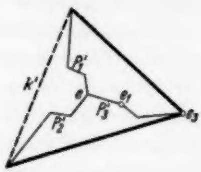


Fig. 18'.

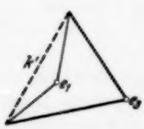


Fig. 19.

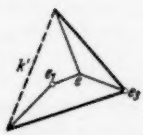


Fig. 19'.

jedem Falle auf $D' + P_1'' + P_2'' + P_3''$[25]) und somit K_v^* nach den bekannten Schlüssen auf einen K_a zusammenziehen. Unter Berücksichtigung des 1. Falles von VII. und der Voraussetzung 2. folgt hiermit unmittelbar, daß die Fig. 19′ die in D' gelegene Teilfigur des K_v^* ist. Die letzte Behauptung ist damit bewiesen. Die im Inneren (analog im Äußeren) von D' gelegene Teilfigur von K_v ist also die Fig. 19 oder 19′. Wir erhalten damit für $K_v^* - (T + T')$ die drei Fälle: Fig. 20a, b und c.

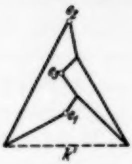


Fig. 20a.

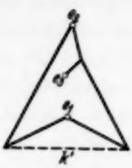


Fig. 20b.

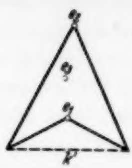


Fig. 20c.

Der 3. Fall (Fig. 20c) scheidet aus, da von e_3 aus nur zwei Kanten des K_v^* ausgehen würden. Die Fig. 20b bildet zusammen mit $T + T'$ den Komplex K_0. Wegen der Vollständigkeit des K_0 scheidet damit aber der 1. Fall (Fig. 20a) aus. Mit diesen drei Fällen ist der Hilfssatz VIII allgemein bewiesen[26]). — Aus den Hilfssätzen folgt der

Satz: *Die Basis der K_v^* ist mit K_0 und den einfachen K_3 (sowie den trivialen Elementen* 0 *und k) bereits erschöpft.*

Beweis: Andernfalls sei K ein weiterer Komplex der Basis der K_v^* *minimaler* Eckenzahl. Dann gilt nach VII. $K = K_1 + T$. $k_1 + k_2$ verbinde die drei Fußpunkte von T. Nach VIII. ist $K_1 + k_1 + k_2$ in keinem K_3^* enthalten. Also muß wegen der minimalen Eckenzahl $K_1 + k_1 + k_2$ in einem K_v^* liegen, der sich aus K_0 und den K_3 entsprechend den Hilfssätzen II und IV zusammensetzt. Falls dieser $K_v^* \neq K_0$ ist, so zerfällt also $K_1 + k_1 + k_2$ in zwei Teilkomplexe die nur zwei Ecken gemeinsam haben (Fig. 21). Aus der Fig. 21 und dem Hilfssatz VII folgt aber sofort, daß dann K kein Element der Basis ist. Es bleibt also nur der Fall $K_v^* = K_0$ übrig, d. h. $K_1 + k_1 + k_2$ liegt in K_0. An der k_1 und k_2 gemeinsamen Ecke lägen dann aber nur zwei Kanten von K. Das ist unmöglich. Also gibt es keinen weiteren Komplex K der Basis, w. z. b. w.

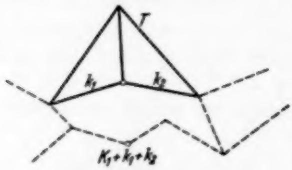


Fig. 21.

[25]) Wobei die drei Polygonzüge P_1'', P_2'' und P_3'' die Ecke e_1 gemeinsam haben, in D' liegen und in den drei Ecken von D' enden.

[26]) Wählen wir in der Fig. 15 das an der Ecke 8 gelegene Kantentripel als T, so erhalten wir für $k_1 = [14]$ und $k_2 = [47]$ einen ebenen $K_1 + k_1 + k_2$ ($K_1 = K_0 - T$), während für $k_1 = [47]$ und $k_2 = [71]$ der Komplex $K_1 + k_1 + k_2$ nicht eben ist. Man sieht also, daß in dem letzten Hilfssatz der Spezialfall eines ebenen K_3^* und der allgemeine Fall eines nichtebenen K_3^* beide tatsächlich auftreten.

(Eingegangen am 12. 1. 1937.)

The solution of linear boundary-value problems in physics by means of the Laplace transformation.

Part I.

A theory for establishing a solution in the form of an integral, for problems with vanishing initial conditions.

Von

R. V. Churchill in Ann Arbor (USA). z. Z. Freiburg i. Br.

It is well known that many boundary-value problems in differential equations can be translated into much simpler problems by applying the Laplace transformation to the differential equations and the boundary conditions[1]). This is true in particular of problems in partial differential equations which have the following characteristics: a) their differential equations and boundary conditions are linear in the dependent variables and their derivatives; b) at least one of the independent variables t, with respect to which the transformation is made, can assume all real positive values; and c) the coefficients of the dependent variables and of their derivatives are not functions of t. The discussion which follows is especially concerned with problems of this type which are two-dimensional; in this case the transformed problem is one in ordinary differential equations. But any modifications necessary when the original problem is one in ordinary differential equations, or in partial differential equations with more than two independent variables, will be evident.

---

[1]) This was pointed out by G. Doetsch as early as 1923 and used by him and others since then in the solution of boundary-value problems. See for instance the series of five papers by G. Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung: I (with F. Bernstein). Eine neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur, Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 285—292; II. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. Die allgemeinste Lösung und die Frage der Eindeutigkeit, Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 293—306; III. Der lineare Wärmeleiter mit beliebiger Anfangstemperatur. Die zeitliche Fortsetzung des Wärmezustandes, Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 608—626; IV (with F. Bernstein). Die räumliche Fortsetzung des Temperaturablaufs. Bolometerproblem, Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 89—98; V. Explizite Lösung des Bolometerproblems, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 567—578. For an application of the method to a problem with variable coefficients see A. N. Lowan, On the cooling of a radioactive sphere. Physical Review 44 (1933). pp. 769—775. Further applications are to be found in some of the references given below.

Let $F(x, t)$ be a dependent variable in a boundary-value problem of two dimensions. Its Laplace transformation with respect to t is defined by

$$(1) \qquad \mathfrak{L}\{F(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(x,t)\,dt = f(x,s).$$

The derivatives with respect to t of the object-function F of this transformation are known to correspond to algebraic operations on the result-function f, according to the following lemma.

Lemma 1[2]). *If for a fixed x the integral $\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^n F}{\partial t^n}\right\}$ is simply convergent for a real $s_0 > 0$ and, in every finite interval $0 \leqq t \leqq T$, $\frac{\partial^{n-1} F}{\partial t^{n-1}}$ exists and is continuous while $\frac{\partial^n F}{\partial t^n}$ is continuous except possibly for a finite number of ordinary discontinuities, then for all s with $\Re(s) > s_0$, $\mathfrak{L}\{F\} = f$ is absolutely convergent and*

$$(2) \qquad \mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^n F(x,s)}{\partial t^n}\right\} = s^n f(x,s)$$
$$- \left[F(x,0)\,s^{n-1} + \frac{\partial F(x,0)}{\partial t} s^{n-2} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} F(x,0)}{\partial t^{n-2}} s + \frac{\partial^{n-1} F(x,0)}{\partial t^{n-1}}\right].$$

The formal process of solving a two-dimensional boundary-value problem consists first in the application of the operator $\mathfrak{L}$ to the differential equation and the boundary conditions. According to (1) and (2) then, this gives a new boundary-value problem in ordinary differential equations which must be satisfied by the result-function $f(x, s)$. This new problem has the independent variable x and the parameter s. After its solution $f(x, s)$ is found, the final step is that of finding the object-function $F(x, t)$ corresponding to $f(x, s)$.

It seems natural to attempt to set up practical conditions under which each step in this process is valid[3]). The first to be used are con-

[2]) This lemma was established by G. Doetsch, Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation, Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa (2) 4 (1935), pp. 71—84; it is given there as Hilfssatz 2 for the case $n = 1$; its statement for any n is an immediate consequence. The differentiation formula (2) was established earlier by the same author by assuming the integral $\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^n F}{\partial t^n}\right\}$ absolutely convergent: G. Doetsch, Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus, Math. Annalen 89 (1923), S. 192—207 [S. 198]. The condition introduced in the above form of the lemma, that the derivative of order n may have finite discontinuities if F and its derivatives of lower order are continuous, can be used in either of Doetsch's proofs. The formula (2) does not always apply when F itself is discontinuous; it is not true for the simple function $F(t) = 0$ for $0 < t < 1$, $= 1$ for $t > 1$.

[3]) A discussion of some of these conditions is given by G. Doetsch, Les équations aux dérivées partielles du type parabolique, L'Enseignement Mathématique 35 (1936), pp. 43—87.

ditions under which $F(x,t)$ and its derivatives have Laplace transformations for some domain of s and all x involved, and that the relation (2) be valid. In addition there are conditions for the interchange of order of the operator $\mathfrak{L}$ with differentiation and limits with respect to x. But to show finally that the object-function corresponding to $f(x,s)$[4]) is a solution of the original problem, it would be necessary to show that a solution exists which satisfies all conditions introduced, and that there is only one. The difficulty in establishing such existence and uniqueness proofs for general types of problems makes this method unpromising.

The alternate procedure is that of carrying out the formal process and verifying the result. The necessity of this last step in order to rigorously establish a solution is by no means peculiar to the method of the Laplace transformation. All methods which apply to general rather than to only special problems introduce a number of conditions; but in many cases the verification that the solution obtained is a true solution is either omitted because it is difficult, or forgotten.

In applications of the method of the Laplace transformation to particular problems the verification has been made in cases in which $F(x,t)$ could be written in closed form in terms of functions of known properties[5]), and when $F(x,t)$ could be written as a complex integral[6]). It

[4]) The object-function F is uniquely determined by the result-function f except for a null-function; that is, two object-functions which correspond to the same f can differ at most by a function $N(t)$ whose indefinite integral $\int_0^t N(\tau)\,d\tau$ vanishes identically.

[5]) See for instance the second paper of the series by G. Doetsch cited under [1]). For the simple hyperbolic differential equation an inversion process has been introduced which gives the function F as a finite series, the number of whose terms depends on the value of t: G. Doetsch, Elektrische Schwingungen in einem anfänglich strom- und spannungslosen Kabel unter dem Einfluß einer Randerregung. — Festschrift d. Techn. Hochsch. Stuttgart zur Vollendung ihres ersten Jahrhunderts. Verlag Springer (1929), S. 56—78. Also see R. V. Churchill, The inversion of the Laplace transformation by a direct expansion in series and its application to boundary-value problems, Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 567—579; in the example solved in this paper the closed form given for the solution was found with the aid of a series form.

[6]) R. V. Churchill, Temperature distribution in a slab of two layers, Duke Math. Journ. 2 (1936), pp. 405—414; here the process used to obtain the complex integral form is too indirect to be generally useful.

For conditions on the coefficients in a somewhat general problem, under which the solution can be written as a contour integral, see W. Mächler, Laplace'sche Integraltransformation und Integration partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen und parabolischen Typus. Commentarii Mathematici Helvetici 5 (1933), S. 256—304. These conditions are quite narrow; in fact they are not satisfied by the example of displacements in a bar, given by the author in the last paper cited under [5]), when the external force is constant.

also happens in some problems, especially in those which can be solved by older methods of orthogonal functions, that F can be found in the form of a series whose properties are well enough known to make the verification possible [7]). But generally the inversion process of finding F from f does not yield a function of familiar character. This is especially true in the most interesting cases in which the boundary-value problem is not adapted to the older methods of solution.

The method presented here for verifying solutions of boundary-value problems is essentially one of showing that $f(x,s)$ satisfies certain sufficient conditions, rather than one of studying $F(x,t)$ in each problem. This method has an important advantage in simplicity, because the result-function f, being a solution of a linear ordinary differential equation, is usually much simpler than the object-function. The method is described in § 1. Uniqueness of solutions is not considered here, — the purpose of the method is to accurately establish one solution of the problem.

§ 1.

The process of establishing a solution.

Suppose that the transformation of the original boundary-value problem is made and that the solution $f(x,s)$ of the transformed problem is determined. Conditions on $f(x,s)$ are given in § 3 and § 4 under which the corresponding object-function can be written as an integral,

$$F(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{zt} f(x,z)\, dz. \tag{3}$$

Although it is written in the form of a complex integral, when the solution $F(x,t)$ is real, as is the case in most problems in physics and engineering, the integral can be written as a *real infinite integral*. This is shown in § 3 (Theorem 2). It is this integral form of $F(x,t)$ which is used here. Since $f(x,s)$ is generally found in closed form, the form of $F(x,t)$ is also a closed one.

It is important to note, however, that the first step of passing from F to f by applying the transformation $\mathfrak{L}$ to the boundary-value problem is not to be made superfluous here. If this were done, the method of solution would become essentially the classical one of assuming the integral (3) is a solution and solving for f; but as is clearly shown

[7]) The general series representation of F given by the author in the last paper cited under [5]), is more limited in its use than the integral form of the present paper, especially when applied to the derivatives of F. For in some of the applications in which the series is known to represent a differentiable function, the series obtained by termwise differentiation does not converge in the ordinary sense.

by the Laplace transformation method, this classical process is limited even formally to problems with vanishing initial ($t = 0$) conditions. Instead, the transformation $\mathfrak{L}$ is made, and thus the initial conditions are introduced in the application of the differentiation formula (2). After f is found its object-function F is written in the integral form (3) if possible. But as will be pointed out in § 5, *when the initial conditions are not all zero, the integral forms of the derivatives of F with respect to t are not those found by simply differentiating the integral* (3) *inside the integral.*

The process of verifying $F(x, t)$ as a solution of the boundary-value problem then consists of establishing sufficient conditions on $f(x, s)$ under which those derivatives and limits of $F(x, t)$ which are involved in the problem, exist and have integral forms of the type (3). The verification can be made then by examining the integrands of these integrals; in fact, the satisfaction of those boundary conditions involving the variable x follows at once from the fact that $f(x, s)$ satisfies the corresponding conditions of the transformed problem.

Since the process is designed for use in applied problems, it is important that our sufficient conditions on $f(x, s)$ be broad enough to apply to a large class of such problems. The functions which appear in the problems of physics and engineering usually belong to a restricted class of real functions, — for instance, they may be bounded and have derivatives except at certain points. In order to indicate the nature of the conditions which can reasonably be imposed on $f(x, s)$, the following section (§ 2) is devoted to some necessary conditions which such result-functions must satisfy if their object-functions belong to some of these restricted classes. These conditions may be considered as eligible for use in our further theorems; moreover when they are so used, a class of functions to which $F(x, t)$ belongs will be known. Other advantages of these preliminary theorems will appear later.

Sufficient conditions on $f(x, s)$ in order that the integral form of $F(x, t)$ be continuous in t, differentiable with respect to t with continuous derivatives, continuous with respect to x, and differentiable with respect to x, are established in this order in § 4 to § 7. The integral forms of the limits and derivatives are indicated by the theorems. One combination of special cases of these conditions is given in § 8 (Theorem 10). In case a solution of sufficient regularity exists, this theorem alone can be used to show that $F(x, t)$ satisfies all conditions of its boundary-value problem. This theorem can be recommended to the reader who wishes to see a compact (but narrow) set of conditions.

The solutions of several particular examples of boundary-value problems have accompanied the development of the present theory. Some

of these will be given in Part II of this paper. These will not only illustrate the process but also show the advantages of the method of the Laplace transformation over older methods.

When a function $F(x,t)$ is established by the present method, it obviously has the function $f(x,s)$ for its Laplace transform. This fact is of considerable importance in applied problems because one of the most useful ways of finding the properties of the new function $F(x,t)$ is by studying the behavior of its Laplace transform[8]).

The theory in the present part of this paper is designed to be applicable to a large group of problems *with vanishing initial conditions*; that is, the limits with t approaching zero (t frequently represents time in applied problems) appearing in the boundary conditions all vanish. The theory for non-vanishing initial conditions will be presented later.

Since the method of the Laplace transformation includes that of the Heaviside operational calculus[9]), the present method of course is one for verifying the results of this formal process of solving differential equations.

§ 2.

Preliminary theorems on the character of $f(s)$[10]).

There are some conditions which the result-functions $f(s)$ must satisfy when the object-functions $F(t)$ belong to somewhat restricted classes which include the functions involved in many applied problems. The conditions established in the following theorems are of this character.

Theorem A. *If $F(t)$ is real and has the Laplace transform $f(s)$ at a point s, then $f(\bar{s}) = \overline{f(s)}$, where the bar denotes the conjugate complex number.*

---

[8]) Theorems of Tauberian character with respect to the Laplace transformation are examples of this method of determining the properties of F. Theorems of this type are given by G. Doetsch in his papers: Sätze von Tauberschem Charakter im Gebiet der Laplace- und Stieltjes-Transformation, Sitzungsber. d. Berlin. Akad. 1930, S. 144—157; and, Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 167 (1932), S. 274—293.

[9]) T. von Stachó, Operationskalkül von Heaviside und Laplacesche Transformation, Acta Litt. ac Scient. Szeged 3 (1927), S. 107—120; and G. Doetsch, Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode (Operatorenkalkül), Jahresber. D. M. V. 43 (1934), S. 238—251.

[10]) Hereafter we shall write simply $f(s)$ and $F(t)$ in those parts of the theory in which the variable x is not concerned.

This follows immediately from the fact that

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt.$$

For the conjugate of the integrand is $e^{-\bar{s}t} F(t)$ and the integral of this is $f(\bar{s})$.

The functions $F(t)$ with which we are principally concerned here have Laplace transforms which are not only bounded in certain half-planes of their variable s, but have quite narrow properties of order. This is shown in the following theorems.

Theorem B. *If $F(t)$ is integrable in each finite interval $0 \leqq t \leqq T$ and, for some real $\alpha \geqq 0$ it is true that $|F(t)|e^{-\alpha t}$ is bounded for all $t \geqq 0$, then for any fixed $\gamma > \alpha$, $f(s)$ is analytic in $\Re(s) \geqq \gamma$ and*

$$f(\sigma + i\eta) = O\left(\frac{1}{\sigma}\right) \qquad (\sigma \geqq \gamma).$$

When $s = \sigma + i\eta$ with $\sigma \geqq \gamma$, then

$$\int_0^\infty |e^{-st} F(t)|\, dt \leqq \int_0^\infty e^{-(\sigma-\alpha)t} |F(t)| e^{-\alpha t} dt \leqq \frac{M}{\sigma - \alpha}, \tag{4}$$

where M is an upper bound of $|F(t)|e^{-\alpha t}$ for $t \geqq 0$. But $\sigma - \alpha \geqq \gamma - \alpha > 0$, so this integral converges. Since $F(t)$ is bounded and integrable in every finite interval in $t \geqq 0$ it follows that

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

converges, and converges absolutely for $\Re(s) \geqq \gamma$, and it is well known that $\mathfrak{L}(F)$ represents an analytic function in its half-plane of convergence. From (4) it follows that

$$\sigma |f(\sigma + i\eta)| \leqq \frac{M}{1 - \frac{\alpha}{\sigma}} \leqq \frac{M}{1 - \frac{\alpha}{\gamma}} \qquad (\alpha < \gamma),$$

and the theorem is proved.

It is desirable later on to use the condition that $|s f(s)|$ be bounded in a half-plane. The next two theorems give classes of functions $F(t)$ for which this is true.

Theorem C. *Let $F(t)$ be a real function such that, for all $t \geqq 0$ and some fixed $\alpha \geqq 0$, $F(t)e^{-\alpha t}$ is bounded and monotone by segments of minimum length $\lambda > 0$. Then for any $\gamma > \alpha$, its transform $f(s)$ is analytic in $\Re(s) \geqq \gamma$ and*

$$f(s) = O\left(\frac{1}{|s|}\right) \qquad (\Re(s) \geqq \gamma).$$

The hypotheses here mean that the positive t-axis can be divided into a denumerable number of segments (t_n, t_{n+1}), none of whose lengths

is less than λ, in each of which $F(t)e^{-\alpha t}$ is a monotone function of t for the particular α selected ($\alpha \geqq 0$). It is clear then that $F(t)$ satisfies all conditions of Theorem B, and so $f(s)$ is analytic in $\Re(s) \geqq \gamma$. Now consider the Laplace integral over any one of the segments, for $s = \sigma + i\eta$ and $\sigma \geqq \gamma$:

$$Q_n = \int_{n}^{t_{n+1}} e^{-st} F(t)\,dt = \frac{1}{s-\alpha} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (F(t)e^{-\alpha t}) e^{-(s-\alpha)t}(s-\alpha)\,dt,$$

By breaking the integrand up into its real and imaginary parts, and writing $\sigma' = \sigma - \alpha$, this can be written

$$(s-\alpha)Q_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t)e^{-\alpha t}[e^{-\sigma' t}(\sigma' \cos \eta t + \eta \sin \eta t) \\ + ie^{-\sigma' t}(-\sigma' \sin \eta t + \eta \cos \eta t)]\,dt.$$

Since $F(t)e^{-\alpha t}$ is bounded and monotone and the real and imaginary parts of the function in brackets are bounded and integrable in (t_n, t_{n+1}), the second theorem of the mean can be applied to the real and imaginary parts of the integral:

$$\begin{aligned}
&\Re((s-\alpha)Q_n) \\
&\quad = F(t_n)\,e^{-\alpha t_n} \int_{t_n}^{\xi_n} e^{-\sigma' t}(\sigma' \cos \eta t + \eta \sin \eta t)\,dt \\
&\qquad + F(t_{n+1})\,e^{-\alpha t_{n+1}} \int_{\xi_n}^{t_{n+1}} e^{-\sigma' t}(\sigma' \cos \eta t + \eta \sin \eta t)\,dt \\
&\hspace{20em} (t_n \leqq \xi_n \leqq t_{n+1}) \\
&\quad = F(t_n)\,e^{-\alpha t_n}(e^{-\sigma' t_n} \cos \eta t_n - e^{-\sigma' \xi_n} \cos \eta \xi_n) \\
&\qquad - F(t_{n+1})\,e^{-\alpha t_{n+1}}(e^{-\sigma' t_{n+1}} \cos \eta t_{n+1} - e^{-\sigma' \xi_n} \cos \eta \xi_n).
\end{aligned}$$

The absolute value of each of the four terms appearing in parentheses is not greater than $e^{-\sigma' t_n}$, and since $|F(t)e^{-\alpha t}| < M$ for all $t \geqq 0$, it follows that

$$|\Re((s-\alpha)Q_n)| < 4\,M\,e^{-\sigma' t_n}.$$

The corresponding steps for the imaginary part of $(s-\alpha)Q_n$ give the result

$$|\Im((s-\alpha)Q_n)| < 4\,M\,e^{-\sigma' t_n},$$

and hence

$$|(s-\alpha)\,Q_n| < 8\,M\,e^{-\sigma' t_n}.$$

Now $t_{n+1} - t_n \geqq \lambda$ ($n = 0, 1, 2, \ldots;\ t_0 = 0$) and so $t_n \geqq n\lambda$. Hence $\sigma' t_n \geqq n\lambda(\sigma - \alpha) \geqq n\lambda(\gamma - \alpha)$, and therefore

$$|Q_n| < \frac{8\,M\,e^{-n\lambda(\gamma-\alpha)}}{|s-\alpha|} \leqq \frac{1}{|s|}\,\frac{8\,M\,e^{-n\lambda(\gamma-\alpha)}}{1-\dfrac{\alpha}{\gamma}} \qquad (\alpha < \gamma).$$

Since

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n,$$

then

$$|s|\,|f(s)| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |s Q_n| < \frac{8M}{1-\frac{\alpha}{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\lambda(\gamma-\alpha)} = \frac{8M}{1-\frac{\alpha}{\gamma}} \frac{1}{1-e^{-\lambda(\gamma-\alpha)}}.$$

The last member is finite and independent of s, when $\Re(s) \geqq \gamma > \alpha$, so the theorem is proved [11]).

In place of the conditions involving monotoniety by segments, conditions involving the derivative of $F(t)$ can be written. The author is indebted to G. Doetsch for the following simple, but useful theorem which gives such conditions.

Theorem D. *Let $F(t)$ have a continuous*[12]) *derivative $F'(t)$ in every finite interval $0 \leqq t \leqq T$. If $\mathfrak{L}\{F'(t)\}$ converges for $s = \alpha > 0$ and is bounded for $\Re(s) > \alpha$ (this is true in particular if $\mathfrak{L}\{F'(t)\}$ converges absolutely for $s = \alpha$), then for any $\gamma > \alpha$,*

$$f(s) = O\left(\frac{1}{|s|}\right) \qquad \textit{for } \Re(s) \geqq \gamma.$$

According to Lemma 1,

$$\mathfrak{L}\{F'\} = s f(s) - F(0) \qquad \text{for } \Re(s) \geqq \gamma.$$

Since $\mathfrak{L}\{F'\}$ is assumed to be bounded, it follows that $s f(s)$ is bounded in the half-plane $\Re(s) \geqq \gamma$.

When Theorem C is applied to the derivatives of $F(t)$ narrower order-properties of $f(s)$ are found, together with other useful relations between F and f. This is illustrated in the two theorems following.

Theorem E. *Let $F(t)$ have a continuous*[12]) *derivative $F'(t)$ in every finite interval $0 \leqq t \leqq T$ such that, for all $t \geqq 0$ and some fixed $\alpha \geqq 0$, $F'(t)e^{-\alpha t}$ is bounded and monotone by segments of minimum length $\lambda > 0$. Then for any $\gamma > \alpha$, $f(s)$ is analytic in $\Re(s) \geqq \gamma$ and*

$$s f(s) - F(0) = O\left(\frac{1}{|s|}\right) \qquad \textit{for } \Re(s) \geqq \gamma. \tag{5}$$

Moreover for any F satisfying these conditions, a necessary and sufficient condition that $F(0) = 0$ is that

$$f(s) = O\left(\frac{1}{|s|^2}\right) \qquad \textit{for } \Re(s) \geqq \gamma. \tag{6}$$

---

[11]) Conditions which are similar to those in Theorem C, but broader, are stated by W. v. Koppenfels, Der Faltungssatz und seine Anwendung bei der Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, Math. Annalen **105** (1931), S. 694—706 [S. 699], to be sufficient in order that $f(s) = O\left(\frac{1}{|s|}\right)$; but his proof of their sufficiency seems to be faulty.

[12]) $F'(t)$ may have ordinary discontinuities at a finite number of points in every finite interval $0 \leqq t \leqq T$ provided $F(t)$ is continuous in every such interval (cf. Lemma 1).

Since $F'(t)$ satisfies the conditions of Theorem C, there is a number N such that

$$|s\,\mathfrak{L}\{F'\}| < N \qquad \text{for } \Re(s) \geqq \gamma.$$

But it follows from our hypotheses that F' is bounded and integrable in each finite interval and that $\mathfrak{L}\{|F'|\}$ converges; also that F is continuous at $t = 0$. Under these conditions (Lemma 1) $F(t)$ has the analytic transform $f(s)$ and

$$\mathfrak{L}\{F'\} = s\,f(s) - F(0),$$

and the property (5) follows. The necessity of the condition (6) in order that $F(0) = 0$ is obvious. Its sufficiency is easily seen from (5), for if $|s^2 f(s)|$ is bounded then $|s\,F(0)|$ must be bounded, for all s in $\Re(s) \geqq \gamma$. This is possible only when $F(0) = 0$.

Corresponding theorems involving conditions on the derivatives of F of higher order are sufficiently illustrated by the following theorem, which is easily proved by the argument used in the foregoing proof.

Theorem F. *In every finite interval $0 \leqq t \leqq T$ let $F(t)$ have a continuous derivative $F'(t)$ and an $F''(t)$ which is continuous except possibly for a finite number of ordinary discontinuities. Also for some fixed $\alpha \geqq 0$ let $F''(t)\,e^{-\alpha t}$ be bounded and monotone by segments of minimum length $\lambda > 0$ for all $t \geqq 0$ Then for any $\gamma > \alpha$, $f(s)$ is analytic in $\Re(s) \geqq \gamma$ and*

$$s^2 f(s) - s\,F(0) - F'(0) = O\left(\frac{1}{|s|}\right) \qquad \text{in } \Re(s) \geqq \gamma.$$

For any F satisfying these conditions, a necessary and sufficient condition that $F(0) = F'(0) = 0$ is that

$$f(s) = O\left(\frac{1}{|s|^3}\right) \qquad \text{for } \Re(s) \geqq \gamma.$$

Theorems similar to the last two can be easily written for the cases in which the derivatives of F satisfy the conditions of Theorem B and Theorem D. In applying Theorem D to F', of course, a condition is imposed on F'', and so on for derivatives of higher order.

§ 3.

The integral form of $F(t)$.

The theorems given in § 2 are of general Abelian character with respect to the transformation $\mathfrak{L}$, that is, from the character of F they give information about the behavior of $\mathfrak{L}\{F\}$. Hereafter the theorems are of general Tauberian character; they disclose the character of F from the properties of $\mathfrak{L}\{F\}$[13]. It is this second type of theorem which can

[13]) The theorems of Abelian and Tauberian Character which are given in the two papers cited unter [8]) deal with the behavior of the functions at particular points, including points at infinity.

be used in boundary value problems, after f is found, to determine whether the function F satisfies the conditions of the problem.

Since the complex inversion integral is to be used here, broad conditions on f sufficient for the representation of $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ by this form are to be considered first.

Theorem 1. *For some fixed* γ, *let* $f(s)$ *be analytic in the half-plane* $\Re(s) \geqq \gamma$ *and satisfy the following conditions*[14]).

1°. $\lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(z)\, dz$ *converges for all* t *in each finite interval* $0 \leqq t \leqq T$, *except for a set of measure zero.*

2°. *In each interval* $0 \leqq t \leqq T$,

$$\left| \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(z)\, dz \right| \leqq \Phi_T(t)$$

for all ω, *where* $\Phi_T(t)$ *is integrable in* $(0, T)$[15]).

3°. $f(s) = O\left(\frac{1}{|s|}\right)$ *in* $\Re(s) \geqq \gamma$.

Then for any s *for which* $\Re(s) > \gamma$ *it follows that*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \tag{7}$$

where

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(z)\, dz. \tag{8}$$

It will be convenient in the sequel to designate this integral form (8) of the inverse of the Laplace transformation (7) (with $\Re(s) > \gamma$) by the symbol $\mathfrak{L}_{(i)}^{-1}$:

$$\mathfrak{L}_{(i)}^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(z)\, dz. \tag{9}$$

This Cauchy principal value can always be written as an ordinary integral:

$$\mathfrak{L}_{(i)}^{-1}\{f(s)\} = \frac{e^{t\gamma}}{2\pi} \int_0^\infty [e^{it\eta} f(\gamma + i\eta) + e^{-it\eta} f(\gamma - i\eta)]\, d\eta. \tag{10}$$

In the proof of Theorem 1 it is convenient to use the following known result.

---

[14]) Throughout this paper the statement that $f(s)$ is analytic in $\Re(s) \geqq \gamma$ means that for some $\alpha < \gamma$, $f(s)$ is analytic in the half-plane $\Re(s) > \alpha$.

[15]) Condition 2° is satisfied in particular if $\Phi_T(t)$ is constant, that is, if the integral in 2° is bounded in $(0, T)$ for all ω.

Lemma 2[16]). *Let $f(z)$ be analytic and bounded in the half-plane $\Re(z) \geqq \gamma$, and let $\lim_{\sigma \to \infty} |f(\sigma + \eta i)| = 0$ uniformly for all real η. Then for any s with $\Re(s) > \gamma$, $f(s)$ is represented by its Cauchy integral taken over the boundary of the half-plane*:

$$f(s) = -\frac{1}{2i\pi} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} \frac{f(z)}{z - s} dz \qquad (\Re(s) > \gamma). \tag{11}$$

To prove Theorem 1, consider first the finite Laplace integral of the function $F(t)$ defined by (8) and condition 1^0,

$$J_1 = \int_0^T e^{-st} F(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^T e^{-st} \Big(\lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(z)\, dz \Big) dt.$$

The integral formed by inverting the order of integration will be denoted by J_2:

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} f(z)\, dz \int_0^T e^{(z-s)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} f(z) \frac{e^{(z-s)T} - 1}{z - s} dz.$$

When J_2 converges, the integral J_1 converges and is equal to J_2 provided the finite integrals corresponding to J_1 and J_2 exist and are equal for each $\omega > 0$, and the conditions 1^0 and 2^0 of the theorem are satisfied in the interval $(0, T)$[17]).

The convergence of J_2 can be seen from the second form given above for that integral. For the integrand is continuous in η (where $z = \gamma + \eta i$); and the integral is absolutely convergent as a result of 3^0, since

$$\left| f(z) \frac{e^{(z-s)T} - 1}{z - s} \right| < \frac{M}{|z|} \frac{2}{|z - s|} = \frac{M}{|z|^2} \frac{2|z|}{|z - s|} < \frac{4M}{|z|^2} \tag{12}$$

for $|z| > \Omega$, where $\Re(s) > \gamma$, and $|(\gamma + \eta i) f(\gamma + \eta i)| < M$.

---

[16]) The proof of this lemma is given by the author in the last paper cited under [5]); it appears there as the second part of the proof of Theorem 1 of that paper.

[17]) These conditions are established in Hobson's Theory of Functions of a Real Variable, Vol. II, 1926, p. 348; but in the set of conditions (2″) given by Hobson one condition is omitted, namely, that $\int_b^\infty f(x, y)\, dy$ exists for almost all x. This is condition 1^0 in our theorem.

The function $e^{(z-s)t} f(z)$ is a continuous function of (η, t) when $z = \gamma + \eta i$, in each rectangle $-\omega \leqq \eta \leqq \omega$, $0 \leqq t \leqq T$, and hence the finite integrals corresponding to J_1 and J_2 exist and are equal:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^T e^{-st}\,dt \int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} e^{tz} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} f(z)\,dz \int_0^T e^{(z-s)t}\,dt.$$

With the aid of conditions 1° and 2° then it follows that, for each $T > 0$, $J_1 = J_2$; that is,

$$\int_0^T e^{-st} F(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} f(z)\,\frac{e^{(z-s)T}-1}{z-s}\,dz.$$

The inequality (12) shows that this last integral converges uniformly for all $T > 0$. Moreover as $T \to \infty$ the function $f(z)\frac{e^{(z-s)T}}{z-s} \to 0$ uniformly for all η in each interval $(-\omega, \omega)$, so the limit of the integral may be taken inside the integral sign to obtain the result

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} \frac{f(z)}{z-s}\,dz. \tag{13}$$

Since $f(z)$ is analytic in the half-plane $\Re(z) \geqq \gamma$ and has the order of $\frac{1}{|z|}$, it satisfies the conditions of Lemma 2 and so the right member of (13) is $f(s)$. Hence

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = f(s) \qquad \text{for } \Re(s) > \gamma,$$

and Theorem 1 is proved.

The condition 3°, that $f(s) = O\left(\frac{1}{|s|}\right)$ in $\Re(s) \geqq \gamma$ can be replaced by broader conditions[18]) with only minor changes in the above proof. But in view of Theorems C and D, the condition 3° seems definitely the most useful one in the problems of physics.

In the applications the number γ in the integral $\mathfrak{L}^{-1}_{(i)}\{f\}$ will usually be positive, according to Theorem B. It was not necessary to specify the sign of γ in Theorem 1.

---

[18]) It is sufficient to assume instead of 3° that the following three conditions are satisfied: $|f(s)|$ is bounded in $\Re(s) \geqq \gamma$, $\lim\limits_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i}\frac{|f(z)\,dz|}{1+|z|}$ converges, and $(f\sigma + \eta i) = O(1/\sigma)$ for $\sigma \geqq \gamma$ (compare Theorem B).

Let u and v denote the real and imaginary parts of f,

$$f(\gamma + \eta i) = u(\gamma, \eta) + v(\gamma, \eta)\, i.$$

If $f(\gamma - \eta i) = u - v i$, as is the case when $f(\gamma + \eta i)$ is the Laplace transform of a *real* $F(t)$ (Theorem A), then the integrand of $\mathfrak{L}_{(i)}^{-1}\{f\}$ also has this character. The integral forms (9) and (10) can therefore be written as real integrals:

Theorem 2. *When* $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ *has the integral form* (9) *and* $f(\gamma - \eta i)$ *is conjugate of* $f(\gamma + \eta i)$, *the integral can be written in the forms*

$$\mathfrak{L}_{(i)}^{-1}\{f\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Re\left(e^{t(\gamma + \eta i)} f(\gamma + \eta i)\right) d\eta \tag{14}$$

$$= \frac{e^{t\gamma}}{\pi}\int_0^\infty [u(\gamma, \eta)\cos \eta t - v(\gamma, \eta)\sin \eta t]\, d\eta.$$

Thus the inverse Laplace transformation with which we are chiefly concerned here is represented by a real infinite integral.

§ 4.

The continuity of $F(t)$.

The functions which occur in applied boundary-value problems are not always continuous. This is well known in the case of the hyperbolic differential equation; for instance in some of the simpler problems of the vibrating bar the derivative of the displacement has finite discontinuities at a denumerable set of instants $t_1, t_2, \ldots$. In order to make the theory broad enough so that its application will not be restricted to problems of continuous character, uniform convergence of the integral $\mathfrak{L}_{(i)}^{-1}\{f\}$ was not assumed in Theorem 1, and will be used in a qualified form in the following theorem.

Let S denote a denumerable set of points on the t-axis ($t \geqq 0$),

$$S = t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots,$$

having the property that only a finite number of these points lie in any finite interval. When the two conditions 1° and 2° of Theorem 1 are replaced by one of uniform convergence except at the points of a set S, $F(t)$ is continuous except at these points:

Theorem 3. *Let* $f(s)$ *be analytic in the half-plane* $\Re(s) \geqq \gamma$ *and satisfy the following conditions.*

1° $$\lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(z)\, dz$$

converges uniformly with respect to t, in each finite interval in $t \geqq 0$ which does not include a point of a set S, containing the points at which uniformity fails.

2^0 $$f(s) = O\left(\frac{1}{|s|}\right) \qquad \textit{for } \Re(s) \geqq \gamma.$$

Then $F(t)$ has the integral form,

$$F(t) = \mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{f(s)\},$$

and this is a continuous function of t for $t \geqq 0$ except at the points of the set S.

It will be shown first that the Laplace integral of the function $\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{f\}$,

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-st}\Big(\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} e^{tz} f(z)\,dz\Big)\,dt, \tag{15}$$

and the integral obtained by interchanging the order of integration,

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} f(z)\,dz\int_0^\infty e^{t(z-s)}\,dt = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i}\frac{f(z)}{z-s}\,dz, \tag{16}$$

exist and are equal. It was observed (equation (10)) that the limit

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} e^{tz} f(z)\,dz \tag{17}$$

can be written as the sum of two infinite integrals whose variable of integration is η $(z = \gamma + \eta i)$ with limits 0 and ∞; but the form (17) will be used here for convenience.

The integrand $e^{t(z-s)} f(z)$ of the integral (15) is a continuous function of (η, t) for all real η and $t \geqq 0$. Sufficient conditions of the character needed here under which the order of integration of a repeated infinite integral can be interchanged have been established by Pierpont[19]). In terms of the integral forms used here, these conditions can be written as follows.

The two repeated integrals (15) and (16), whose integrand is a continuous function of (η, t), exist and are equal when

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} e^{t(z-s)} f(z)\,dz \tag{a}$$

---

[19]) Pierpont, The Theory of Functions of Real Variables, Vol. I, 1905, p. 488. His proof is valid when the exceptional points form on infinite set of type *S*, defined above, although he does not state this fact.

converges uniformly with respect to t, in each finite interval in $t \geqq 0$ which does not contain a point of some set of the type S (S contains those points where the uniformity fails);

(b) $$\int_0^\infty e^{t(z-s)} f(z)\, dt$$

converges uniformly with respect to η in each interval $(-\omega, \omega)$, and is integrable in $(-\omega, \omega)$; and

(c) $$\lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} f(z)\, dz \int_0^t e^{\tau(z-s)}\, d\tau$$

converges uniformly for all $t \geqq 0$.

The condition (a) is satisfied by 1^0; and (b) is satisfied because $|e^{t(z-s)}| \leqq e^{-t(\Re(s)-\gamma)}$, and $\frac{f(z)}{z-s}$ is continuous. The integrand of the infinite integral in (c) satisfies the condition for uniform convergence in $t \geqq 0$ since

$$\left| f(z) \frac{e^{t(z-s)}-1}{z-s} \right| \leqq \frac{2\,|f(z)|}{|z-s|}$$

and the last member is integrable on the line $z = \gamma + \eta i$ because of 2^0.

The integrals (15) and (16) are therefore equal. But according to Lemma 2 the Cauchy integral on the right of (16) converges to $f(s)$, and so $F(t) = \mathfrak{L}_{(0)}^{-1}\{f(s)\}$ satisfies the Laplace integral equation,

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = f(s) \qquad \text{for } \Re(s) > \gamma.$$

The continuity of the integral $\mathfrak{L}_{(0)}^{-1}\{f\}'$ in each finite interval not containing a point of S follows from the uniform convergence of the integral and the fact that the integrand is a continuous function of (η, t). This completes the proof of the theorem.

When the integral in 1^0 converges uniformly in *every* finite interval $0 \leqq t \leqq T$, the theorem is a special case of Theorem 1.

The conditions of Theorem 3 are satisfied by the simple function $f(s) = 1/s$ ($\Re(s) > 0$) which is frequently involved in boundary-value problems. For this function the set of points S at which the uniform convergence fails consists only of $t = 0$. The integral $\mathfrak{L}_{(0)}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$ thus converges to the object function $F(t)$, and $F(t)$ is continuous for $t > 0$. It is well known that $F(t) = 1$ for $t > 0$[20]).

[20]) It can easily be seen that the integral form gives this result by applying Theorem 3 of the last paper cited under [5]). The integral also gives $F(0) = 1/2$.

Theorem 4. *Let $f(s)$ satisfy the conditions of Theorem 3 for the case in which $t = 0$ does not belong to the set S of exceptional points. Then $F(t) = \mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{f(s)\}$ is continuous at $t = 0$. Also let*

$$\lim_{\sigma \to \infty} |s f(s)| = 0$$

uniformly for all η $(s = \sigma + \eta i)$. Then

$$F(0) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} f(z)\,dz = 0. \tag{18}$$

Since $f(z)$ is analytic in $\Re(z) \geqq \gamma$ its contour integral vanishes when taken around the boundary of the segment of a circle $|z| = \varrho$ $(\varrho > |\gamma|)$ to the right of the line $z = \gamma + \eta i$,

$$\oint f(z)\,dz = -\int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} f(z)\,dz + \int_{(C)} f(z)\,dz = 0,$$

where C is the arc of the circular segment. Except for a constant factor, the limit $(\omega \to \infty)$ of the first integral on the right is the integral (18) in the theorem. This is zero provided the integral over C approaches zero as ϱ becomes infinite.

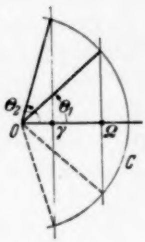


Fig. 1.

For any given $\varepsilon > 0$ let a positive number Ω be selected so that $|z f(z)| < \varepsilon/4\pi$ when $\Re(z) \geqq \Omega$. This is possible according to the final condition in the theorem. If M is an upper bound of $|z f(z)|$ in $\Re(z) \geqq \gamma$ (condition 2°, Theorem 3) then for any $\varrho > \Omega$ (see the figure for the case $\gamma > 0$),

$$\left|\int_{(C)} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{-\Theta_1}^{\Theta_1} \varrho e^{i\Theta} f(\varrho e^{i\Theta})\,d\Theta + \int_{-\Theta_2}^{-\Theta_1} \varrho e^{i\Theta} f\,d\Theta + \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \varrho e^{i\Theta} f\,d\Theta\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\Theta_1}^{\Theta_1} d\Theta + 2M\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Theta < \frac{\varepsilon}{2} + 2M(\Theta_2 - \Theta_1)$$

since $0 < \Theta_1 < \pi$. Now it is clearly possible to find a number $R > \Omega$ such that $\Theta_2 - \Theta_1 < \varepsilon/4M$ when $\varrho > R$, and hence

$$\left|\int_{(C)} f(z)\,dz\right| < \varepsilon \qquad \text{when } \varrho > R,$$

and the theorem is established.

In this theorem the two conditions concerning the order of $f(s)$ are clearly satisfied if

$$s f(s) = O\left(\frac{1}{\sigma}\right) \qquad \text{for } \Re(s) = \sigma \geqq \gamma.$$

It is easily seen that this condition is always satisfied by the Laplace transform of a function $F(t)$ for which $F(0) = 0$ provided $F'(t)$ satisfies the conditions of Theorem B and $F(t)$ satisfies Lemma 1 $(n = 1)$.

The simple function $f(s) = e^{-as}/s$ $(a > 0)$ satisfies the conditions of Theorem 4 for any $\gamma > 0$. In this case

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \leqq t < a, \\ 1 & \text{for} \quad t > a. \end{cases}$$

An important special case of Theorem 4 is the following, which is not only simple to use but applicable in many problems.

Theorem 5. *If $f(s)$ is analytic in $\Re(s) \geqq \gamma$ and $f(s) = O\left(\frac{1}{|s|^2}\right)$ in this half-plane, then $F(t) = \mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{f\}$* [21]*, and $F(t)$ is continuous for $t \geqq 0$ and vanishes at $t = 0$,*

$$F(0) = 0.$$

Moreover, any function $F(t)$ for which $F(0) = 0$ and which satisfies the conditions of Theorem E, *has a Laplace transform $f(s)$ which satisfies the above conditions.*

The integral $\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{f\}$ converges uniformly with respect to t in every finite interval $0 \leqq t \leqq T$ since its integrand satisfies the inequality

$$|e^{tz} f(z)\, dz| < \frac{e^{\gamma t} M}{|z|^2}\, d\eta \leqq e^{|\gamma| T} M \frac{d\eta}{\gamma^2 + \eta^2}.$$

The condition of order in Theorem 5 may of course be replaced by the condition that, for some $k > 1$,

$$f(s) = O\left(\frac{1}{|s|^k}\right) \qquad \text{for } \Re(s) \geqq \gamma.$$

§ 5.

The derivatives of $F(t)$.

The theorems of the foregoing section give conditions on f under which F has the integral form $\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{f\}$ and under which this F is continuous in t and approaches zero with t. In the present section conditions are given under which F is differentiable with respect to t with its derivatives represented by the integral forms obtained by differentiating $\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{f\}$ inside the integral. For the first derivative, for example, this form is

$$(19) \qquad F'(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} z f(z)\, dz = \mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{s f(s)\}.$$

---

[21]) The integral form of F was established under these conditions on f by Pincherle, Sur les fonctions déterminantes, Ann. Éc. Norm. 22 (1905), pp. 1—68 [p. 31].

But according to the formula (2),

$$\mathfrak{L}\{F'(t)\} = s f(s) - F(0)$$

or

$$F'(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{s f(s) - F(0)\}.$$

Hence it is to be expected that the conditions under which the form (19) is assumed will involve the vanishing of $F(0)$. Similarly for the derivatives of higher order. The more general integral forms which may be assumed by the derivative of any order, when the function or any of its derivatives of lower order have non-vanishing limits at $t = 0$, are to be taken up in a later part of this paper.

Theorem 6. *Let $f(s)$ be analytic in $\mathfrak{R}(s) \geqq \gamma$ and, for a positive integer n, let the product $s^n f(s)$ satisfy the conditions of either Theorem 1 or Theorem 3 for this γ, so that*

$$\mathfrak{L}^{-1}\{s^n f(s)\} = \mathfrak{L}_{(i)}^{-1}\{s^n f(s)\}. \tag{20}$$

Then for the same γ,

$$\mathfrak{L}^{-1}\{s^q f(s)\} = \mathfrak{L}_{(i)}^{-1}\{s^q f(s)\} \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{21}$$

and each of these is a continuous function of t for $t \geqq 0$ which vanishes at $t = 0$. If, in addition, the integral $\mathfrak{L}_{(i)}^{-1}\{s^n f(s)\}$ converges uniformly for all t in some interval $t_1 \leqq t \leqq t_2$ $(t_1 \geqq 0)$ then $F(t) = \mathfrak{L}_{(i)}^{-1}\{f\}$ has a continuous derivative of order n there, namely,

$$F^{(n)}(t) = \mathfrak{L}_{(i)}^{-1}\{s^n f(s)\} \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2), \tag{22}$$

as well as continuous derivatives of lower order for all $t \geqq 0$ given by

$$F^{(q)}(t) = \mathfrak{L}_{(i)}^{-1}\{s^q f(s)\} \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ t \geqq 0) \tag{23}$$

and these vanish at $t = 0$:

$$F(0) = F'(0) = F''(0) = \ldots = F^{(n-1)}(0) = 0. \tag{24}$$

According to the order-condition in Theorem 1 and Theorem 3,

$$s^n f(s) = O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

so the condition of Theorem 5 is satisfied by $s^{n-1} f(s)$,

$$s^{n-1} f(s) = O\left(\frac{1}{|s|^2}\right) \qquad \text{for } \mathfrak{R}(s) \geqq \gamma.$$

Consequently

$$\mathfrak{L}^{-1}\{s^{n-1} f(s)\} = \mathfrak{L}_{(i)}^{-1}\{s^{n-1} f(s)\}$$

and this function is continuous for all $t \geqq 0$ and vanishes at $t = 0$. Similarly for $\mathfrak{L}^{-1}\{s^q f(s)\}$ $(q = n-2, n-3, \ldots, 0)$, so the statement in (21) is true.

According to the additional condition in the theorem, the integral

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} e^{tz}z^n f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{tz}z^{n-1}f(z)\right)dz$$

converges uniformly in $t_1 \leqq t \leqq t_2$. Then from the continuity of the integrand of this integral it follows that

$$\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{s^n f(s)\} = \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{s^{n-1}f(s)\} \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2) \tag{25}$$

and this is continuous in t. If $n > 1$ the same argument applies to $\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{s^{n-1}f(s)\}$ which is uniformly convergent in each finite interval $0 \leqq t \leqq T$, so

$$\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{s^{n-1}f(s)\} = \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{s^{n-2}f(s)\} \qquad (t \geqq 0). \tag{26}$$

(If $n = 2$ this formula together with (21) gives the formulas (23) and (24)). From (25) and (26), then

$$\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{s^n f(s)\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{s^{n-2}f(s)\} \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2),$$

and for $n > 2$ the formulas (22), (23), (24) follow from successive applications of the above results.

When $n = 2$ the condition of order in this theorem is that $s^2 f(s) = O\left(\frac{1}{|s|}\right)$. This, together with the condition of analyticity, is satisfied by the Laplace transform of any real $F(t)$ satisfying the conditions of Lemma 1 ($n = 2$), for which $F(0) = F'(0) = 0$ and $F''(t)e^{-at}$ is bounded and monotone by segments of minimum length $\lambda > 0$ for $t \geqq 0$ (Theorem F). A similar statement can be made for any n.

As a special case of the last theorem, $s^n f(s)$ may satisfy the conditions of Theorem 4, and then $F^{(n)}(t)$ is also continuous at $t = 0$ and vanishes there. When there are no exceptional points S where uniform convergence fails, this case can be written as follows.

Theorem 7. *Let $f(s)$ be analytic in $\mathfrak{R}(s) \geqq \gamma$ and, for this γ, let the integral $\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{s^n f(s)\}$ converge uniformly with respect to t in each finite interval $0 \leqq t \leqq T$. Also let $|s^{n+1}f(s)|$ be bounded in the half-plane $\sigma \geqq \gamma$ ($s = \sigma + \eta i$) and approach zero uniformly for all η, as $\sigma \to \infty$. Then $F(t)$ and its first n derivatives admit the integral form, namely,*

$$F^{(q)}(t) = \mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{s^q f(s)\} \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, n;\ t \geqq 0);$$

moreover each of these functions is continuous for $t \geqq 0$ and

$$F(0) = F'(0) = F''(0) = \ldots = F^{(n)}(0) = 0.$$

§ 6.

The continuity of $F(x, t)$ with respect to x.

The following theorem is given for the purpose of verifying boundary conditions relative to a variable x, other than t, which appears in a boundary-value problem. The boundary conditions to which this theorem applies may be conditions on any of the derivatives of the dependent variable in the problem, as well as on the variable itself.

Theorem 8. *Let* $\mathfrak{L}^{-1}\{f(x, s)\}$ *have the integral form*

$$\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{f(x, s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(x, z)\, d x$$

for every x *in an interval* $x_1 \leqq x \leqq x_2$, *and let this integral converge uniformly with respect to* x *in this interval for a fixed* $t \geqq 0$. *Also let* $f(x, s)$ $(s = \gamma + \eta i)$ *be a continuous function of* (x, η) *in the rectangle* $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $-\omega \leqq \eta \leqq \omega$, *for each real* ω. *Then for the fixed* t,

$$F(x, t) = \mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{f(x, s)\}$$

is a continuous function of x. *If* x_2 *is not finite and* $f(x, s)$ *satisfies the additional condition:*

$$\lim_{x \to \infty} f(x, s) = \varphi(s)$$

uniformly in each interval $-\omega \leqq \eta \leqq \omega$ $(s = \gamma + \eta i)$, *then*

$$\lim_{x \to \infty} F(x, t) = \mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{\varphi(s)\}.$$

This theorem follows directly from known criteria for the continuity of an infinite integral involving a parameter[22]).

§ 7.

The derivatives of $F(x, t)$ with respect to x.

Conditions on f under which the derivatives of F with respect to x have the integral form and are continuous can be written directly from known conditions for the differentiation of an infinite integral with respect to a parameter[23]). The conditions given in the following theorem are of this character.

Theorem 9. *For a common value of* γ *and for each* x *in some interval* $x_1 \leqq x \leqq x_2$ *let* $f(x, s)$ *and its first* m *derivatives with respect to* x

[22]) See for instance p. 474 of the book cited under [19]).

[23]) See for instance p. 359 of the book cited under [17]).

admit the integral form of their inverse Laplace transformations. For a fixed $t \geqq 0$ let each of these integrals

$$\mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\left\{\frac{\partial^p f(x,s)}{\partial x^p}\right\} \qquad (p = 1, 2, \ldots, m)$$

converge uniformly with respect to x in $x_1 \leqq x \leqq x_2$, and let

$$\frac{\partial^p f(x, \gamma + \eta i)}{\partial x^p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, m)$$

be continuous functions of (x, η) in the rectangle $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $-\omega \leqq \eta \leqq \omega$ for each real ω. Then for the fixed t, $F(x,t)$ has the continuous derivatives

$$\frac{\partial^p F(x,t)}{\partial x^p} = \mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\left\{\frac{\partial^p f(x,s)}{\partial x^p}\right\} \qquad (p = 1, 2, \ldots, m)$$

in $x_1 \leqq x \leqq x_2$.

§ 8.

Differentiability and continuity of $F(x,t)$ with respect to x and t.

As an illustration of the possible combinations of the conditions of the foregoing theorems the following one may be written. The conditions of this set, though narrower than they need be, are sufficient to make a complete verification of solutions of many boundary-value problems which have vanishing initial ($t = 0$) conditions.

Theorem 10. *Let $f(x,s)$ satisfy the following conditions when x lies in an interval $a \leqq x \leqq b$.*

1°. *$f(x,s)$ and its first m derivatives with respect to x are analytic functions of s in $\mathfrak{R}(s) \geqq \gamma$ and continuous in (x, η), when $s = \gamma + \eta i$, in the rectangle $(a, b, -\omega, \omega)$ for each real ω.*

2°. *For some fixed $\varepsilon_1 > 0$, $|s^{n+1+\varepsilon_1} f(x,s)|$ is bounded in $\mathfrak{R}(s) \geqq \gamma$ for all x.*

3°. *For some $\varepsilon_2 > 0$ (which may depend on p), each of the functions*

$$\left| s^{1+\varepsilon_2} \frac{\partial^p f(x,s)}{\partial x^p} \right| \qquad (p = 1, 2, \ldots, m)$$

is bounded in $\mathfrak{R}(s) \geqq \gamma$ for all x.

Then it is not only true that $F(x,t)$ together with its first n derivatives with respect to t and its first m derivatives with respect to x exist and have the integral form, namely,

$$\frac{\partial^q F(x,t)}{\partial t^q} = \mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\{s^q f(x,s)\} \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{27}$$

$$\frac{\partial^p F(x,t)}{\partial x^p} = \mathfrak{L}_{(t)}^{-1}\left\{\frac{\partial^p f(x,s)}{\partial x^p}\right\} \qquad (p = 1, 2, \ldots, m); \tag{28}$$

but also each of these functions is continuous with respect to x in $a \leqq x \leqq b$ for each $t \geqq 0$, and continuous with respect to t in $t \geqq 0$ for each x, and vanishes at $t = 0$:

$$(29)\quad F(x,0) = 0,\ \frac{\partial^q F(x,0)}{\partial t^q} = 0,\ \frac{\partial^p F(x,0)}{\partial x^p} = 0\ (q = 1,2,\ldots,n;\ p = 1,2,\ldots m).$$

The conditions 1°, 2° and 3° insure the uniform convergence with respect to x and with respect to t, of the integrals in (27) and (28).

As a result of 1° and 2° the functions $F(x,t)$ and $\frac{\partial^q F}{\partial t^q}$ have the integral form and are continuous in t and vanish at $t = 0$ (Theorem 7). These are also continuous functions of x, since $s^q f(x,s)$ $(q = 0, 1, \ldots, n)$ satisfy the conditions of Theorem 8. Due to conditions 1° and 3°, the derivatives $\frac{\partial^p F}{\partial x^p}$ have the integral representation and are continuous in x (Theorem 9). Finally, the conditions of Theorem 5 (modified to $f(s) = O\left(\frac{1}{|s|^k}\right)$, for $k > 1$) are satisfied by $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}$, and hence $\frac{\partial^p F}{\partial x^p}$ are continuous in t and vanish at $t = 0$.

It is well to note that, even when the comparatively narrow conditions of Theorem 10 are used, the solution $F(x,t)$ of the boundary-value problem is not limited to functions which are regular in the sense that its derivatives of all order exist. Continuity is imposed on just those derivatives which are involved in the problem.

(Eingegangen am 18. 1. 1937.)

Über eine Mittelwertseigenschaft der Potentialfunktionen.

Von

Miron Nicolesco in Cernăuţi (Czernowitz, Rumänien).

In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit beweist Herr Leifur Asgeirsson folgenden Satz[1]):

Liegen zwei konfokale Ellipsen E_1 und E_2 mit ihren Innengebieten D_1 bzw. D_2 ganz in einem Gebiete der (x, y)-Ebene, wo eine reguläre Potentialfunktion $u(x, y)$ gegeben ist, so sind die Mittelwerte von u über D_1 bzw. D_2 einander gleich.

Es ist nicht uninteressant zu zeigen, wie dieser Satz aus anderen Grundlagen einfach hergeleitet werden kann.

1. Zuvörderst gebe ich hier einen Satz wieder, der Herrn Pizzetti zuzuschreiben ist[2]). Es sei $u(x, y)$ eine Funktion mit stetigen, partiellen Ableitungen bis zu der Ordnung $2p$ einschließlich. Bezeichnen wir mit $M(u; \varrho)$ den Mittelwert von $u(xy)$ über einen Kreis, der um den Nullpunkt mit dem Radius ϱ beschrieben ist.

Dann gilt

$$M(u; \varrho) = u_0 + a_1 \varrho^2 (\Delta u)_0 + \ldots + a_{p-1} \varrho^{2p-2} (\Delta^{p-1} u)_0 + R_p,$$

wo

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \Delta^2 u = \Delta(\Delta u), \ldots; \quad a_i = \frac{1}{4^i \cdot i!\,(i+1)!},$$

und der Index Null anzeigt, daß für die verschiedenen Funktionen im zweiten Glied der Wert im Mittelpunkt des Kreises zu nehmen ist. Schließlich ist

$$R_p = a_p \varrho^{2p} (\Delta^p u)_{\theta\varrho},$$

unter $(\Delta^p u)_{\theta\varrho}$ den Betrag von $\Delta^p u$ in einem gewissen von dem Nullpunkt um $\Theta\varrho$ entfernten Punkt verstanden ($\Theta \leqq 1$).

2. Es sei nun $u(x, y)$ die erwähnte Potentialfunktion und

$$(E_r): \qquad \frac{x^2}{a^2 - r^2} + \frac{y^2}{b^2 - r^2} = 1 \qquad (r^2 < b^2)$$

---

[1]) Über eine Mittelwertseigenschaft von Lösungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (Math. Annalen 113 (1936), S. 321–346).

[2]) P. Pizzetti, Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera (Rendiconti Lincei (5) 18_1 (1909), S. 309–316). Siehe auch: Miron Nicolesco, Sur les fonctions de n variables, harmoniques d'ordre p [Bull. de la Soc. Math. de France 60 (1932), S. 129–151].

eine Ellipse, die vom Parameter r abhängt und das Gebiet D_r einschließt. Es ist leicht zu zeigen, daß der Ausdruck

$$\mu = \frac{1}{\pi\sqrt{(a^2-r^2)(b^2-r^2)}}\int\int_{D_r} u(x,y)\,dx\,dy$$

vom Parameter r unabhängig ist. Setzen wir zu diesem Zwecke

$$x = \xi\sqrt{a^2-r^2}, \qquad y = \eta\sqrt{b^2-r^2},$$

so wird

$$\mu = M[U(\xi,\eta);1],$$

wo

$$U(\xi,\eta) = u(\xi\sqrt{a^2-r^2},\ \eta\sqrt{b^2-r^2})$$

ist. Die Formel von Pizzetti liefert folgende Entwicklung

$$\mu = U_0 + a_1(\Delta U)_0 + \dots + a_{p-1}(\Delta^{p-1}U)_0 + R_p,$$

wobei p willkürlich ist und R_p den Wert

$$R_p = a_p(\Delta^p U)_\theta$$

hat. Es ist aber

$$\Delta U = (a^2-r^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (b^2-r^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

wo $2c$ der Fokalabstand der Ellipse ist. Allgemein wird

$$\Delta^i U = c^{2i}\frac{\partial^{2i} u}{\partial x^{2i}}, \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

Demnach ergibt sich schließlich folgende Entwicklung

$$\mu = u_0 + a_1 c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \dots + a_{p-1}c^{2p-2}\left(\frac{\partial^{2p-2} u}{\partial x^{2p-2}}\right)_0 + a_p c^{2p}\left(\frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}}\right)_\theta.$$

Erwähnen wir noch die bekannte Formel, die unmittelbar aus dem Gaußschen Mittelwertsatz entsteht[3]),

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{4L}{\pi\,\delta(x,y)},$$

wo L die obere Schranke von $|u|$ in dessen Regularitätsbereich und $\delta(x,y)$ den Abstand des Punkts (x,y) von der Randkurve des Gebietes D bedeutet.

Daraus folgt

$$|R_p| = a_p c^{2p}\left|\frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}}\right|_\theta < \left(\frac{4c^2}{\pi^2 d^2}\right)^p \frac{L}{p!\,(p+1)!},$$

wobei d die untere Schranke der Entfernungen der Punkte auf den Rändern D_r und D bedeutet.

---

[3]) Siehe z. B. die Thèse von J. Favard: Sur les functions harmoniques presque-périodiques [Journal de Math. pures et appl. (9) 6 (1927), n. 12].

Demnach folgt

$$\lim_{p \to \infty} R_p = 0.$$

Es besteht also die endgültige Formel

$$\mu = u_0 + \sum_{1}^{\infty} a_i c^{2i} \left(\frac{\partial^{2i} u}{\partial x^{2i}}\right)_0, \tag{1}$$

aus der hervorgeht, daß μ von r nicht abhängt.

Wir bemerken noch, daß diese Reihe die Entwicklung des Mittelwerts der Funktion auf der Fokalachse FF' der Ellipse darstellt.

Ganz ähnliche Betrachtungen, deren Ausführung wir uns wohl ersparen können, führen zu folgendem Satz:

Der Mittelwert einer polyharmonischen Funktion p-ter Ordnung im Gebiete D_r ist ein Polynom $(p-1)$-ten Grades in r^2.

(Eingegangen am 22. 3. 1937.)

Berichtigung

zu der Arbeit von P. Funk: „Über Flächen mit einer Schar von kongruenten und geschlossenen geodätischen Linien", Math. Ann. 75, S. 425–427.

Bei der Abfassung dieser Note hatte ich die Resultate der zitierten Zollschen Arbeit falsch in Erinnerung. Die im Text durchgeführte Schlußweise gilt nur für solche geschlossene geodätische Linien, die zu den Schraubenlinien senkrecht stehen. Gerade aus der Zollschen Arbeit geht aber hervor, daß es noch andere geschlossene kongruente geodätische Linien geben kann. Ob sich daher die Behauptung des Textes rechtfertigen läßt, ist fraglich. Herr Professor Liebmann hat mich in dankenswerter Weise vor längerer Zeit auf meinen Irrtum aufmerksam gemacht. In der Zwischenzeit habe ich mich nochmals vergeblich bemüht den Sachverhalt klar zu stellen und muß diese Bemühungen als gescheitert ansehen.

P. Funk.

Über die Realität der Nullstellen fast aller Ableitungen gewisser ganzer Funktionen.

Von

A. Wiman in Upsala (Schweden).

1. Für die hier in Rede stehende Untersuchungsrichtung ist von vornherein die Beschränkung auf *reelle* ganze Funktionen natürlich. Es ist auch, wenigstens anfänglich, naheliegend, daß man den Ausgang von solchen reellen ganzen Funktionen nimmt, welche *nur eine endliche Anzahl von Paaren imaginärer Nullstellen* besitzen. Aus sofort ersichtlichen Gründen ist man hier, jedenfalls in erster Instanz, auf solche ganze Funktionen hingewiesen, bei denen die Exponentialfaktoren, welche in der kanonischen Entwicklung auftreten, als Grenzfunktionen von ganzen rationalen Funktionen mit lauter reellen Wurzeln betrachtet werden können. Die fraglichen Exponentialfunktionen dürfen also nur Faktoren von der Gestalt e^{cz} oder $e^{-c^2z^2}$ enthalten, wo c eine reelle Konstante bedeutet. Es sind ja e^{cz} und $e^{-c^2z^2}$ bzw. Grenzfunktionen der Polynomfolgen

$$\left(1+\frac{cz}{n}\right)^n,\ \left(1-\frac{c^2z^2}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hierdurch werden die ganzen Funktionen von den Geschlechtern 0 und 1 herausgehoben, wozu noch ein spezieller Fall von Funktionen des Geschlechtes 2 hinzukommt, für welche durch Wegnahme eines Faktors $e^{-c^2z^2}$ das Geschlecht sich auf 0 oder 1 reduzieren läßt. Es wird also hier von einer reellen ganzen Funktion

$$e^{-c^2z^2} f(z) \tag{1}$$

ausgegangen, wo c auch $= 0$ sein kann, und $f(z)$ eine Funktion vom Geschlechte 0 oder 1 mit höchstens einer endlichen Anzahl imaginärer Nullstellen bedeutet. Vor mehr als 20 Jahren habe ich nun den Satz als wahrscheinlich ausgesprochen, daß, falls eine Funktion (1) den obigen Bedingungen genügt, *ihre Ableitungen von einer gewissen ab lauter reelle Nullstellen besitzen*[1]). Soviel ich weiß, ist für diesen Satz der Beweis nur in zwei speziellen Fällen erbracht. Der erste von diesen Fällen wird *durch eine Ordnung* $< \frac{2}{3}$

[1]) Im Druck wurde der Satz zuerst von M. Ålander in seiner 1930 erschienenen Arbeit „Sur les dérivées successives des fonctions régulières" veröffentlicht. Zu demselben Satze kam später G. Pólya in selbständiger Weise, wie man in seiner Schrift „Some problems connected with Fourier's work on transcendental equations" [Quarterly Journal of Mathematics (Oxford Series) 1 (1930)] findet.

der ganzen Funktion (1) charakterisiert[2]); es ist also dann $c = 0$. Im anderen Falle, der durch mich selbst erledigt worden ist, hat man

$$f(z) = e^{c_1 z} h(z),$$

wo $h(z)$ *eine ganze rationale Funktion* bedeutet[3]). Die vorliegende Untersuchung hat den Zweck, zu zeigen, *wie von diesem letzteren Resultate aus der Beweis sich für allgemeinere Fälle führen läßt.*

Es ist uns nicht gelungen, diese Aufgabe für völlig allgemeine Funktionen vom Typus (1) zu erledigen. Die nötige Bedingung läßt sich so formulieren, daß die Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ von $f(z)$ sich so ordnen lassen, daß die Reihe

$$\sum \frac{1}{a_m} \tag{2}$$

konvergiert. Hierbei hat man zwei Möglichkeiten, indem die Reihe 1. absolut 2. bedingt konvergieren kann. Dieser letztere Fall trifft zu, wenn sowohl bei Beschränkung auf die positiven als auf die negativen Nullstellen die Reihe (2) divergiert. Auf den noch übrigen Fall, wo von den beiden genannten Reihen mit Gliedern gleichen Vorzeichens eine divergiert und die andere konvergiert, hat unser Beweis keine Anwendung.

Wir benutzen diese Gelegenheit, um auf allgemeinere Fragestellungen, wo die Anzahl der imaginären Nullstellen der reellen Funktion (1) nicht mehr endlich zu sein braucht, aufmerksam zu machen. Es gibt hier Aufgaben von zweierlei Art. Die strengste Forderung ist, daß nach einer genügenden Anzahl von Derivationen *überhaupt gar keine* imaginären Wurzeln existieren sollen. Man kann hier etwa von der Vermutung ausgehen, daß dies der Fall sein wird, wenn für sämtliche Nullstellen der ursprünglichen Funktion der Abstand von der reellen Achse eine endliche obere Grenze hat[4]). Weniger weit geht die Forderung, wenn die Nichtexistenz von imaginären Wurzeln *nur für einen beliebig vorgegebenen endlichen Bereich* verlangt wird. Man kann z. B. fragen, wie es sich in dieser Hinsicht mit den Funktionen (1) verhält, bei denen für den reellen Teil der Nullstellen keine endliche Häufungsstelle $x = x_0$ existiert.

---

[2]) Beweis von Pólya und Ålander in den oben zitierten Abhandlungen. Ohne Beweis findet man den Satz bereits 1927 in einer Arbeit von Pólya.

[3]) „Über eine asymptotische Eigenschaft der Ableitungen der ganzen Funktionen von den Geschlechtern 1 und 2 mit einer endlichen Anzahl von Nullstellen" [Math. Annalen **104** (1930)].

[4]) Man findet indessen aus Beispielen, wo die Funktion Nullstellen von beliebig hoher Ordnung hat, daß hier noch weitere Bedingungen nötig sind. Aus dem Beispiel mit den n-fachen Nullstellen $n^k \pm i n^{-k}$ ($n = 1, 2, \ldots, k > 2$) ersieht man, daß es auch nicht genügt, wenn die Summe der Abstände sämtlicher Nullstellen von der reellen Achse endlich bleibt.

2. Wir zerlegen die zu betrachtende ganze Funktion in zwei Faktoren

$$G(z) = g(z)\,\bar{g}(z). \tag{3}$$

Zu $\bar{g}(z)$ sollen hier die reellen (von Null verschiedenen) Nullstellen der Funktion gehören. Nach den Voraussetzungen gibt es eine konvergente Entwicklung

$$\bar{g}(z) = \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right). \tag{4}$$

Man hat mithin

$$g(z) = e^{-c^2 z^2 + c_1 z}\, z^k f(z) \qquad (k \geqq 0), \tag{5}$$

wo die ganze rationale Funktion $f(z)$ für die imaginären Nullstellen von $G(z)$ verschwindet; doch hindert nichts, daß $f(z)$ noch eine endliche Anzahl von reellen Wurzeln besitzt. Bei bedingter Konvergenz des Produktes (4) ist der Wert der Konstante c_1 in (5) von der Anordnung der Faktoren abhängig. Ist diese Anordnung solcher Art, daß die Summe der Reihe (2) $= 0$ wird, so erhält man für c_1 denselben Wert wie in dem Falle, wo durch Hinzufügung von Faktoren $e^{\frac{z}{a_n}}$ (4) durch ein absolut konvergentes kanonisches Produkt ersetzt wird. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man sowohl die positiven als die negativen Nullstellen a_n nach steigenden absoluten Beträgen ordnet und dabei positive und negative Nullstellen in solcher Weise wechseln läßt, daß jedesmal die Teilsumme

$$s_\nu = \sum_{1}^{\nu} \frac{1}{a_n} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

vom kleinsten möglichen Betrage wird.

Wir machen weiter die Zerlegung

$$\bar{g}(z) = \prod_{1}^{N}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \prod_{N+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = g_1(z)\, g_2(z). \tag{6}$$

Es ist hier also $g_1(z)$ ein endliches und $g_2(z)$ ein unendliches Produkt. Offenbar läßt sich hier N so wählen, daß in einem beliebig gegebenen endlichen Bereich $g_2(z)$ beliebig wenig von 1 verschieden wird und eine endliche Anzahl seiner ersten Ableitungen sich beliebig wenig von 0 unterscheidet.

Wir wollen zunächst nachweisen, daß, wenn N genügend groß genommen worden ist, unser Satz über die Realität der Nullstellen der Ableitungen für die Funktion

$$G_1(z) = g(z)\, g_2(z) \tag{7}$$

Gültigkeit hat. Nach unserer bereits zitierten Arbeit gilt der Satz für $g(z)$. Wir können mithin eine *bestimmte* Ableitung, etwa $g^{(\nu)}(z)$, fixieren, für welche die Nullstellen reell und verschieden sind. Die endliche Anzahl dieser Nullstellen wollen wir mit m bezeichnen. Nimmt man je zwei aufeinanderfolgende von diesen Nullstellen als Endpunkte, so erhält man auf der reellen Achse

$m-1$ Teilstrecken. Die von diesen erfüllte vollständige Strecke wird von zwei Nullstellen begrenzt. Wir fügen zu dieser Strecke noch zwei Teilstrecken, so daß auch die beiden letzteren Nullstellen innere Punkte der vollständigen Strecke werden, welche also aus $m+1$ Intervallen besteht. Es ist möglich, eine Größe $\delta > 0$ zu bestimmen, so daß es in jedem von diesen $m+1$ Intervallen einen Punkt gibt, für welchen $|g^{(\nu)}(z)|$ und, da $g_2(z)$ im ganzen Intervalle als beliebig wenig von 1 verschieden betrachtet werden kann, auch $|g^{(\nu)}(z)\,g_2(z)| > \delta$ ist. Diese Punkte können wir als Endpunkte für m zusammenhängende Intervalle nehmen. Unser Zweck ist nachzuweisen, daß es möglich ist, N so zu bestimmen, daß $G_1^{(\nu)}(z)$ je eine Nullstelle in jedem von diesen m letzteren Intervallen besitzt.

Wir haben die Entwicklung

$$G_1^{(\nu)}(z) = g^{(\nu)}(z)\,g_2(z) + \nu g^{(\nu-1)}(z)\,g_2'(z) + \ldots + g(z)\,g_2^{(\nu)}(z). \tag{8}$$

Die Koeffizienten auf der rechten Seite von (8) sind feste von ν abhängige Zahlen. Wenn man sich auf einen gegebenen endlichen Bereich beschränkt, so lassen sich für $|g(z)|$, $|g'(z)|$, ... und $|g^{(\nu-1)}(z)|$ feste obere Grenzen feststellen. Da man überdies durch Wahl von N $|g_2'(z)|$, $|g_2''(z)|$, ... und $|g_2^{(\nu)}(z)|$ in diesem Bereiche beliebig wenig von 0 verschieden machen kann, so versteht man, daß es sich erreichen läßt, daß an den Endpunkten der zuletzt erwähnten m Intervalle der Betrag des ersten Gliedes rechts in (8) die Summe der Beträge der übrigen Glieder überwiegt. Da nun dieses erste Glied an den Endpunkten eines Intervalles verschiedene Zeichen hat, so folgt, daß $G_1^{(\nu)}(z)$ in jedem der m Intervalle wenigstens eine Nullstelle haben muß.

Um hieraus den Schluß ziehen zu können, daß $G_1^{(\nu)}(z)$ keine imaginären Nullstellen hat, betrachten wir einen endlichen Bereich, etwa in der Gestalt eines Rechtecks, dessen Seiten je mit der reellen und imaginären Achse parallel sind. Dieser Bereich soll in seinem Inneren nicht nur die obige Strecke, sondern auch denjenigen Bereich, wo man von vornherein weiß, daß die etwaigen imaginären Wurzeln von $G_1^{(\nu)}(z)$ liegen müssen[5]), enthalten. Offenbar läßt sich eine Größe $\delta_1 > 0$ feststellen, so daß man für die Begrenzung des Bereichs $|g^{(\nu)}(z)\,g_2(z)| > \delta_1$ hat. Da man durch Wahl von N die Beträge der anderen Glieder rechts in (8) beliebig klein machen kann, so läßt sich der Satz von Rouché anwenden, und $G_1^{(\nu)}(z)$ hat im Bereiche dieselbe Anzahl Wurzeln wie $g^{(\nu)}(z)$, also nur die obigen m reellen Wurzeln.

Ist $g(z)$ ein Polynom, wie es z. B. für ganze Funktionen $G(z)$ vom Geschlechte 0 der Fall ist, so kann man hier für $g^{(\nu)}(z)$ die letzte nicht identisch verschwindende Ableitung, also eine Konstante, wählen.

3. Man sieht leicht, daß für den in der vorigen Nummer gegebenen Teil des Beweises die Annahme von (absoluter oder bedingter) Konvergenz der

---

[5]) Siehe hierüber die zitierten Arbeiten von Alander und Pólya.

Reihe (2) nicht erforderlich ist. Dagegen ist es uns nicht gelungen, die noch übrige zweite Hälfte des Beweises ohne diese Annahme auszuführen[6]). Wir haben

$$G(z) = G_1(z)\, g_1(z), \tag{9}$$

wo $g_1(z)$ eine ganze rationale Funktion von der Gradzahl N bezeichnet, und sowohl $G_1^{(\nu)}(z)$ als $g_1(z)$ lauter reelle Nullstellen besitzen. Wir betrachten das Produkt

$$G_1(z) \cdot (z - a), \tag{10}$$

wo $(z - a)$ Faktor von $g_1(z)$ ist. Als $(\nu + 1)$-te Ableitung von (10) bekommen wir

$$G_1^{(\nu+1)}(z) \cdot (z - a) + (\nu + 1) G_1^{(\nu)}(z). \tag{11}$$

Nun hat man

$$\frac{d}{dz}\left[G_1^{(\nu)}(z) \cdot (z - a)^{\nu+1}\right] = (z - a)^{\nu}\left[G_1^{(\nu+1)}(z) \cdot (z - a) + (\nu + 1)\, G_1^{(\nu)}(z)\right]. \tag{12}$$

Da die Funktion, deren erste Ableitung wir hier rechts haben, nur reelle Nullstellen hat, so gilt dies auch für die Ableitung, also für (11), wie bereits aus der Schlußweise von Laguerre zu ersehen ist. In anderen Worten bedeutet dies, daß die $(\nu + 1)$-te Ableitung von (10) lauter reelle Nullstellen besitzt. Durch Wiederholung derselben Schlußweise, findet man, daß *spätestens für die $(\nu + N)$-te Ableitung von $G(z)$ keine imaginären Nullstellen auftreten.* Hiermit ist aber das Ziel, das wir uns gesetzt haben, erreicht.

---

[6]) Einen wichtigen Beitrag zur Klärung dieser Frage findet man in der hier sogleich folgenden mit der obigen gleichnamigen Arbeit von Pólya.

(Eingegangen am 29. 5. 1937.)

Über die Realität der Nullstellen fast aller Ableitungen gewisser ganzer Funktionen.

Von

G. Pólya in Zürich.

---

1. Einleitung.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, die voranstehende gleichbetitelte Arbeit des Herrn Wiman, die ich im Manuskript einsehen zu können den Vorzug hatte, um einen Schritt weiterzuführen.

Bis zu welchem Punkt die Arbeit von Wiman gelangt, ersieht man recht deutlich aus dem Vergleich von zwei Beispielen. Es sei $P(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, aber mit imaginären Wurzeln; betrachten wir die beiden folgenden ganzen Funktionen:

$$P(z)\sin z, \qquad P(z)/\Gamma(z).$$

Von der ersten zeigen die Ausführungen von Wiman, daß ihre Ableitungen genügend hoher Ordnung nur reelle Nullstellen haben, von der zweiten jedoch nicht. Der durch Wimans Schlußweise ausgenutzte Unterschied der beiden Funktionen besteht darin, daß die von 0 verschiedenen Nullstellen der ersten sich so anordnen lassen, daß die Summe der Reziproken konvergiert, die Nullstellen der zweiten sich jedoch nicht so anordnen lassen. Ich konnte Wimans Methode so weiterführen, daß ich auch die zweite Funktion, welche ja, wie die erste, von der Ordnung 1 ist, behandeln kann. Ich werde (die Terminologie wird sofort nachher erläutert) den folgenden Satz beweisen:

Wenn die Ordnung einer reellen ganzen Funktion $G(z)$ kleiner als $\frac{4}{3}$ ist und $G(z)$ nur endlich viele imaginäre Nullstellen hat, so wird eine gewisse Ableitung $G^{(n)}(z)$ von $G(z)$ keine imaginären Nullstellen und auch keine außerordentlichen mehrfachen Nullstellen haben, und übrigens werden sich auch alle nachfolgenden Ableitungen $G^{(n+1)}(z)$, $G^{(n+2)}(z), \ldots$ ebenso verhalten.

Ich nenne eine ganze Funktion *reell*, wenn sie für reelle Werte der Variablen nur reelle Werte annimmt. Ich nenne eine mehrfache Nullstelle a von $G^{(n)}(z)$ *ordentlich*, wenn a eine mindestens $n+2$-fache Nullstelle von $G(z)$ ist, so daß außer $G^{(n)}(a)$ und $G^{(n+1)}(a)$ auch $G(a), G'(a), \ldots, G^{(n-1)}(a)$ verschwinden.

Außerordentlich heißt eine mehrfache Nullstelle einer Ableitung von $G(z)$, wenn sie nicht ordentlich ist, wenn sie also nicht direkt von $G(z)$ herstammt, sondern im Verlaufe der sukzessiven Derivationen irgendwann später auftritt.

Mit der kleineren, also weniger besagenden Grenze $\frac{2}{3}$ für die Ordnung (statt $\frac{4}{3}$) und ohne Bezugnahme auf außerordentliche mehrfache Nullstellen wurde der Satz schon vor mehreren Jahren von Ålander und dem Verfasser bewiesen[1]). Die vorangehende Arbeit von Wiman ergibt das schließliche Reellwerden der Nullstellen bei sukzessiver Derivation für alle ganzen Funktionen unterhalb der Ordnung 1 und für eine große Klasse von Funktionen bis zur Ordnung 2 einschließlich, aber wie man am eben erwähnten Beispiel $P(z)/\Gamma(z)$ sieht, nicht für alle Funktionen von der Ordnung 1.

Ich habe das ausgesprochene Resultat gewonnen, indem ich das scharfsinnige Beweisverfahren der vorangehenden Wimanschen Arbeit kritisch zerlegt und nachher „quantitativ" gewendet habe. Ich werde mich bemühen, die Darstellung so einzurichten, daß der Leser die Motive, welche von der vorangehenden Wimanschen Arbeit zur vorliegenden hinüberführen, klar durchblicken kann[2]).

2. Hilfssätze.

Es bezeichne $F(z)$ eine *reelle ganze Funktion vom Geschlechte* 0 *oder* 1, *welche nur endlich viele nichtreelle Nullstellen besitzt.* Diese Bezeichnung bzw. Voraussetzung soll im Laufe der gegenwärtigen Nummer, insbesondere bei der Formulierung der beiden folgenden Hilfssätze I und II festgehalten werden.

---

[1]) M. Ålander in „Opuscula mathematica Andreae Wiman dedicata" (Upsala 1930), S. 79—98; vgl. S. 93. G. Pólya, Quarterly Journal of Math. (Oxford series) 1 (1930), S. 21—34; vgl. Theorem II.

[2]) Soll man die Motive der Überlegung mit zur Darstellung bringen? Man kann hierüber, wohl mit Recht, verschiedener Ansicht sein. Heutzutage ist man im allgemeinen dagegen, und zwar, wie mir scheint, zu einseitig dagegen, aber manche Klassiker waren entschieden dafür. So verstand Euler seine Motive besonders reizvoll darzulegen und Leibniz tat den Ausspruch: „Il n'y a rien de si important que de voir les origines des inventions, qui valent mieux à mon avis que les inventions mêmes." Meine Ansicht wäre: Ja, man soll die Motive mit zur Darstellung bringen, aber mit angemessener Diskretion und möglichst geringer Mehrbeanspruchung von Raum. — Damit diese allgemeine Auseinandersetzung an dieser Stelle niemand befremde, muß ich wohl noch hinzufügen, wie ich dazu komme, sie hierherzusetzen: Nach Fertigstellung des Manuskripts bemerkte ich, daß ich, vielleicht aus gesunder Oppositionsstimmung gegen eine zu einförmige Meinung, der Darlegung der Motive etwas mehr Platz als gewöhnlich eingeräumt habe.

Der Erfolg des Beweises von Wiman scheint mir vor allem auf dem folgenden, von ihm entdeckten originellen Hilfssatz zu beruhen, der mit einem geringfügigen Zusatz[3]) so gefaßt werden kann:

Hilfssatz I. *Wenn $F^{(n)}(z)$, die n-te Ableitung von $F(z)$, weder nichtreelle Nullstellen noch außerordentliche mehrfache Nullstellen besitzt, und $Q(z)$ ein Polynom m-ten Grades mit lauter reellen Wurzeln bedeutet, so besitzt die p-te Ableitung des Produktes $F(z)\,Q(z)$ für $p \geqq m + n$ weder nichtreelle noch außerordentliche mehrfache Nullstellen.*

Dieser Hilfssatz soll hier ganz nach dem Vorgange von Wiman verwendet werden: Wir wollen die Funktion $G(z)$, um die es sich in dem hier zu beweisenden Satz handelt, in zwei Faktoren, $F(z)$ und $Q(z)$, von besagter Natur zerlegen, und zwar möglichst günstig zerlegen; gelingt uns die erstrebte Behauptung für $F(z)$ zu beweisen, so wird sie, kraft des Wimanschen Hilfssatzes I, auch für

$$G(z) = F(z)\,Q(z)$$

mitbewiesen sein.

Wimans Beweis macht ferner wesentlichen Gebrauch von einem Teil des folgenden, von J. L. W. V. Jensen herrührenden Satzes[4]):

Zu jedem konjugierten Paar imaginärer Nullstellen $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ von $F(z)$ konstruiere man die Ellipse

$$\frac{(x-\alpha)^2}{n\beta^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

und betrachte den von der Gesamtheit dieser endlich vielen Ellipsenflächen bedeckten Bereich $\mathfrak{B}_n$. Sowohl die nichtreellen Nullstellen, als auch die außerordentlichen mehrfachen Nullstellen von $F^{(n)}(z)$ liegen im Bereiche $\mathfrak{B}_n$.

---

[3]) Vgl. vorstehend, S. 621. Der Zusatz betrifft die mehrfachen Nullstellen, und der zu diesem Zusatz nötige Schluß ist wohlbekannt, vgl. z. B. J. v. Sz. Nagy, Jahresbericht d. deutschen Mathematiker-V. **31** (1922), S. 238—251, insbesondere Satz VI, S. 244 oder die unter [1]) zweitzitierte Arbeit, Lemma II, S. 30; nur der einfachste Fall, in welchem keine Jensenschen Kreise vorhanden sind, kommt hier in Betracht. (Für Wimans Schluß kommen in diesen beiden Arbeiten bzw. Satz I, S. 239 und Lemma I, S. 26 entsprechenderweise in Betracht.)

[4]) J. L. W. V. Jensen, Acta Mathematica **36** (1913), S. 181—195, insbesondere S. 190; ferner J. L. Walsh, Annals of Mathematics (2) **22** (1920), S. 128—144, und die unter [3]) zitierte Arbeit von J. v. Sz. Nagy. Der Satz, wie auch der vorangehende Hilfssatz I, bleibt unter einer etwas allgemeineren Voraussetzung gültig, wobei $F(z)e^{-\gamma z^2}$ anstatt der hiesigen Funktion $F(z)$ mit $\gamma \geqq 0$ betrachtet wird. Im Beweise von J. v. Sz. Nagy scheint mir der Hinweis (S. 243, Zeilen 22—26) auf die Hadamardsche Theorie in dem Falle, daß $f(z)$ zwar vom Geschlechte 1, aber von der Ordnung 2 ist, nicht ohne weiteres zu genügen. Ein Hinweis auf die „Laguerresche Schlußweise“, d. h. auf den Grenzübergang von Polynomen her, ist, mindestens im Falle nur endlich vieler imaginärer Nullstellen, leichter zu vervollständigen.

Wiman abstrahiert hiervon die folgende „qualitative" Aussage[5]):

Es gibt einen bloß durch die Lage der nichtreellen Nullstellen von $F(z)$ bestimmten (und von der sonstigen Beschaffenheit von $F(z)$ unabhängigen) *Bereich, von dem man von vornherein weiß, daß er sämtliche nichtreellen Nullstellen von $F^{(n)}(z)$ enthält.*

Auch hier soll bloß von einem Teil des Jensenschen Satzes Gebrauch gemacht werden, aber wir wollen davon immerhin etwas mehr, nämlich die folgende „quantitative" Aussage abstrahieren:

Hilfssatz II. *Es sei vorausgesetzt, daß jede nichtreelle Nullstelle $\alpha + i\beta$ von $F(z)$ der Ungleichung $|\beta| < 1$ genügt. Es gibt eine bloß durch die Lage der nichtreellen Nullstellen von $F(z)$ bestimmte* (und von der sonstigen Beschaffenheit von $F(z)$ unabhängige) *Zahl n_0 von folgender Eigenschaft: Für $n > n_0$ liegen sämtliche nichtreellen und sämtliche außerordentlichen mehrfachen Nullstellen von $F^{(n)}(z)$ im Kreise*

$$|z| < \sqrt{n}. \tag{1}$$

3. Funktionen mit endlich vielen Nullstellen.

Wenn die Funktion $G(z)$, von der der hier zu beweisende Satz handelt, nur endlich viele Nullstellen besitzt und kein Polynom ist, so ist sie von der Gestalt

$$e^{sz} P(z); \tag{2}$$

hierbei bedeutet s eine reelle, von 0 verschiedene Konstante und $P(z)$ ein reelles Polynom (das jedoch imaginäre Nullstellen haben kann).

Wiman benutzt in seinem Beweis ganz wesentlich den Umstand, daß er seinen Satz für Funktionen von der speziellen Gestalt (2) vorbewiesen hat. Ich will zunächst einen besonders durchsichtigen Beweis für den in der Einleitung ausgesprochenen Satz unter der speziellen Annahme führen, daß $G(z)$ von der Gestalt (2) ist. Ich benutze neben Hilfssatz II den folgenden

Hilfssatz III. *Der Grad des Polynoms $P(z)$ sei k, sein höchster Koeffizient* 1 (so daß $P(z) = z^k + \ldots$ ist) *und die Summe der Beträge der übrigen Koeffizienten von $P(z)$ sei A. Wenn $n \geqq |s|$ ist, so hat die n-te Ableitung der Funktion* (2) *keine Nullstellen im Kreise*

$$(k|z| + A)\left(|z| + \frac{n}{|s|}\right)^{k-1} < \left(\frac{n}{|s|}\right)^k \left(1 - \frac{k(k-1)}{2n}\right). \tag{3}$$

(Die Gesamtheit derjenigen Punkte z der komplexen Zahlenebene, für welche (3) gilt, mag leer sein; wenn sie nicht leer ist, so bildet sie offenbar eine offene Kreisfläche, deren Mittelpunkt der Nullpunkt ist.)

---

[5]) Vgl. vorstehend, S. 620, Zeilen 25—29.

Ich will den rein rechnerischen Beweis von Hilfssatz III bis zur Nr. 5 zurückstellen und beeile mich, die Hilfssätze II und III zu einem Schluß zu kombinieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß die Imaginärteile der Nullstellen von $P(z)$ dem Betrage nach sämtlich kleiner als 1 sind. Dann ist die Voraussetzung von Hilfssatz II erfüllt, und somit liegen, für $n > n_0$, sämtliche nichtreellen und sämtliche außerordentlichen mehrfachen Nullstellen der n-ten Ableitung von (2) im Kreise (1) (insoweit sie überhaupt vorhanden sind); nur der Kreis (1) ist verdächtig, diese beiden Sorten von Nullstellen, deren Nichtexistenz wir nachweisen wollen, zu enthalten; nennen wir (1) den „verdächtigen" Kreis. Nach Hilfssatz III ist der Kreis (3) von Nullstellen der n-ten Ableitung von (2) überhaupt frei; nennen wir (3) den „freien" Kreis. Wenn die n-te Ableitung von (2) imaginäre oder außerordentliche mehrfache Nullstellen hat, so hat sie diese im Kreisring, der außerhalb des „freien" Kreises (3) und innerhalb des „verdächtigen" Kreises (1) sich befindet. Nun breitet sich der „verdächtige" Kreis (1) mit wachsendem n beständig aus. Der „freie Kreis" (3) verändert sich mit n ebenfalls, und zwar wird der „freie Kreis" (3) den „verdächtigen" für genügend großes n sicher übertreffen, denn es ist, $|z| = \sqrt{n}$ gesetzt, die linke Seite von (3) bloß von der Größenordnung $n^{k-\frac{1}{2}}$, die rechte hingegen von der Größenordnung n^k. Von dem Augenblick an, in welchem der „freie" Kreis den „verdächtigen" im Wettlauf überholt und definitiv bedeckt, d. h. von einem bestimmten Werte von n an, gibt es keinen Platz für imaginäre oder für außerordentliche mehrfache Nullstellen der n-ten Ableitung von (2), d. h. diese beiden Sorten von Nullstellen existieren nicht, w. z. b. w.[6]).

Da der „verdächtige" Kreis (1) für genügend großes n nicht bloß die außerordentlichen, sondern auch die eventuellen (unbeweglichen!) ordentlichen, und somit alle mehrfachen Nullstellen der n-ten Ableitung von (2) bedeckt, gelangen wir zum Schluß, daß diese Ableitung für genügend großes n *nur reelle und einfache Nullstellen* besitzt. Diese Tatsache wird von Wiman in seinem Beweis als wesentlicher Hilfssatz verwendet.

Substituieren wir an Stelle dieses Hilfssatzes seine eben besprochene Herleitung, so entsteht aus der Wimanschen eine neue Beweisanordnung, welche den Jensenschen Satz (genauer gesagt, seine Folgerung, den Hilfssatz II) an zwei verschiedenen Stellen verwendet. Wollen wir, sparsamerweise, diese doppelte Verwendung des Hilfssatzes II durch eine einmalige Anwendung ersetzen, so gelangen wir in motivierter Weise zur folgenden Beweisanlage.

[6]) Vgl. den analogen Schluß in den unter [1]) zitierten Arbeiten.

4. Anlage des Beweises.

Die ganze Funktion $G(z)$, von der der zu beweisende Satz handelt, hat nach Voraussetzung die Gestalt

$$G(z) = P(z) e^{az} \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\mu}\right) e^{\frac{z}{\alpha_\mu}} \tag{4}$$

$P(z)$ ist ein reelles Polynom, a eine reelle Zahl, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ eine Folge reeller, von 0 verschiedener Zahlen, so beschaffen, daß die Reihe

$$\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_\mu^2} + \ldots \tag{5}$$

monoton fallende (nichtzunehmende) Glieder hat und konvergiert.

Ich mache beim Beweis eine wesentliche Einschränkung: Ich schließe erstens den Fall aus, in welchem die Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ endlich ist, und zweitens den Fall, in welchem die Reihe

$$a + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_\mu} + \ldots$$

konvergiert und die Summe 0 hat. Der erste Fall wurde nämlich in Nr. 3 besprochen und der zweite Fall ist in der Wimanschen Beweisanordnung so vollständig und einfach behandelt[7]), daß ich nichts hinzuzufügen habe. Nach der getroffenen wesentlichen Einschränkung verliert man nichts weiter an Allgemeinheit, wenn man voraussetzt, wie wir es tun wollen, daß es eine positive Zahl σ gibt, so beschaffen, daß,

$$s_m = a + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_m} \tag{6}$$

gesetzt, für unendlich viele ganze Zahlen m

$$s_m \geqq \sigma > 0 \tag{7}$$

ist. (Man kann ja z durch $-z$ ersetzen.) Weiter machen wir, ebenfalls ohne Beschränkung der Allgemeinheit, die Annahme, daß die Imaginärteile aller Nullstellen von $P(z)$ unterhalb 1 liegen (wodurch Hilfssatz II anwendbar wird) und daß der höchste Koeffizient von $P(z)$ die Einheit ist.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$Q_m(z) = \prod_{\mu=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\mu}\right), \tag{8}$$

$$R_m(z) = \prod_{\mu=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\mu}\right) e^{\frac{z}{\alpha_\mu}}, \tag{9}$$

$$F_m(z) = e^{s_m z} P(z) R_m(z); \tag{10}$$

---

[7]) Vgl. insbesondere die Schlußbemerkung der Nr. 2, auf S. 620.

s_m ist durch (6) definiert. Mit diesen Bezeichnungen ist, gemäß (4),

$$G(z) = F_m(z)\,Q_m(z). \tag{11}$$

$Q_m(z)$ ist ein Polynom mit nur reellen Nullstellen. Gemäß dem Wimanschen Beweisgedanken, der auf Hilfssatz I fußt, werden wir unseren Satz über (11) bewiesen haben, sobald uns gelingt, zwei ganze Zahlen m und n zu finden, so daß

$$\frac{d^n F_m(z)}{d z^n}$$

nur reelle Nullstellen und nur ordentliche mehrfache Nullstellen hat.

$F_m(z)$ hat, wie auch m beschaffen sei, keine anderen imaginären Nullstellen als diejenigen, die schon in $P(z)$ stecken. Gemäß dem in Nr. 3 angewendeten Beweisgedanken, der auf Hilfssatz II fußt, wird die Funktion $F_m^{(n)}(z)$ nur die richtigen Sorten von Nullstellen haben (reelle und bloß ordentliche mehrfache Nullstellen), sobald uns gelingt, einen Kreis zu finden, mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit *Radius größer als* $\sqrt{n}$, *der von Nullstellen der Funktion* $F_m^{(n)}(z)$ *frei ist*, vorausgesetzt, daß n eine bestimmte, *von* m *unabhängige* Grenze übersteigt. (In dieser Unabhängigkeit von m kommt ein wichtiger Punkt des Hilfssatzes II zur Anwendung, der in Nr. 3 noch keine Rolle spielte.)

Die Aufgabe, den in der Einleitung ausgesprochenen Satz zu beweisen, reduziert sich somit darauf, *für beliebig großes* n *und dazu passendes* m *einen Kreis um* $z = 0$ *herum abzustecken, dessen Radius größer als* $\sqrt{n}$ *und dessen Inneres von den Nullstellen der Funktion* $F_m^{(n)}(z)$ *frei ist.*

5. Der nullstellenfreie Kreis im einfachsten Fall.

Wir wollen zunächst den Beweis des Hilfssatzes III nachholen. Dies wird nicht bloß indirekt, als Vorübung, nützlich sein, sondern es wird sich nachher die entscheidende Ungleichung auch als direkt für unseren Hauptzweck verwendbar erweisen.

Wir setzen

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{k-1} z^{k-1} + z^k, \tag{12}$$

$$A = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{k-1}|. \tag{13}$$

Diese Bezeichnungen stimmen mit dem Wortlaut des Hilfssatzes III überein; $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ sind reelle Zahlen. Wir verwenden D als Zeichen des Differenzierens nach der Variablen z. Um Hilfssatz III zu beweisen, müssen wir ein von den Nullstellen der Funktion

$$D^n e^{sz} P(z) = s^n e^{sz} (1 + s^{-1} D)^n P(z) \tag{14}$$

freies Gebiet angeben. Wir haben also von unten abzuschätzen den Betrag von

$$(15)\qquad (1+s^{-1}D)^n P(z) = (1+s^{-1}D)^n z^k + \sum_{\varkappa=0}^{k-1} a_\varkappa (1+s^{-1}D)^n z^\varkappa .$$

Nun ist

$$(1+s^{-1}D)^n z^\varkappa = z^\varkappa + \binom{n}{1}\frac{Dz^\varkappa}{s} + \binom{n}{2}\frac{D^2 z^\varkappa}{s^2} + \dots + \binom{n}{\varkappa}\frac{D^\varkappa z^\varkappa}{s^\varkappa}$$

$$= z^\varkappa + \binom{\varkappa}{1}\frac{n}{s} z^{\varkappa-1} + \binom{\varkappa}{2}\frac{n(n-1)}{s^2} z^{\varkappa-2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-\varkappa+1)}{s^\varkappa},$$

$$(16)\qquad |(1+s^{-1}D)^n z^\varkappa| \leqq \left(|z| + \frac{n}{|s|}\right)^\varkappa ;$$

$$(1+s^{-1}D)^n z^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{s^k} + \sum_{\lambda=0}^{k-1}\binom{k}{\lambda}\frac{n(n-1)\dots(n-\lambda+1)}{s^\lambda} z^{k-\lambda}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{s^k} + kz\sum_{\lambda=0}^{k-1}\frac{1}{k-\lambda}\binom{k-1}{\lambda}\frac{n(n-1)\dots(n-\lambda+1)}{s^\lambda} z^{k-1-\lambda},$$

$$(17)\qquad |(1+s^{-1}D)^n z^k| \geqq \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{|s|^k} - k|z|\left(|z| + \frac{n}{|s|}\right)^{k-1};$$

$$(18)\qquad n(n-1)\dots(n-k+1) = n^k\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\geqq n^k\left(1 - \frac{k(k-1)}{2n}\right).$$

Man erhält durch Zusammenfassung von (15), (16), (17), (18), unter Beachtung der Voraussetzung $n \geqq |s|$ des Hilfssatzes III und der Bezeichnung (13),

$$(19)\qquad |(1+s^{-1}D)^n P(z)| \geqq \left(\frac{n}{|s|}\right)^k\left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right) - (k|z| + A)\left(|z| + \frac{n}{|s|}\right)^{k-1}.$$

Die Ungleichung (19) setzt das Nichtverschwinden von (14) im Kreis (3') und damit den Hilfssatz III in Evidenz.

6. Der nullstellenfreie Kreis im allgemeinen Fall.

Um die Funktion (10) behandeln zu können, sind wir genötigt, geeignete Beziehungen zwischen n, s_m und

$$(20)\qquad \varrho_m = \frac{1}{\alpha_{m+1}^2} + \frac{1}{\alpha_{m+2}^2} + \frac{1}{\alpha_{m+3}^2} + \dots,$$

dem Restglied der Reihe (5), anzunehmen. Zwar werden diese Annahmen erst durch den weiteren Verlauf der Rechnung motiviert, aber im Interesse einer bequemen Kontrolle der folgenden Überlegungen ist es besser, sie schon jetzt auszusprechen. Wir wollen also annehmen, daß

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{s_m}{\sqrt{n}} < 1,$$

(II) $$\left(\frac{3n}{s_m}\right)^3 \varrho_m < 1,$$

(III) $$\frac{6n}{s_m |\alpha_{m+1}|} < 1$$

ist. Unter welchen Bedingungen diese drei Annahmen miteinander verträglich sind, soll erst in der nächsten Nummer geprüft werden. In der gegenwärtigen Nummer wollen wir zunächst Folgerungen aus ihnen ziehen.

Wir brauchen den folgenden leicht beweisbaren

Hilfssatz IV. *Es seien s und z beliebig komplex, n positiv ganz. Wenn die Funktion $f(u)$ für*

(21) $$|u - z| \leqq \frac{2n}{|s|}$$

regulär analytisch ist und der Ungleichung

$$|f(u)| \leqq M$$

genügt, so ist

$$|(1 + s^{-1}D)^n f(z)| \leqq 2M.$$

In der Tat ist, wenn das nachfolgende Integral um den Kreisbereich (21) der u-Ebene herum im positiven Sinne erstreckt wird,

$$\begin{aligned} |(1 + s^{-1}D)^n f(z)| &= \left| \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{f^{(\nu)}(z)}{s^\nu} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(u)\,du}{u-z} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{\nu!}{s^\nu (u-z)^\nu} \right| \\ &\leqq M \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n^\nu}{|s|^\nu} \left(\frac{|s|}{2n}\right)^\nu = 2M. \end{aligned}$$

Wir wollen nun diesen Hilfssatz auf die Funktion

(22) $$f(u) = P(u)(R_m(u) - 1)$$

mit

(23) $$s = s_m = |s_m|$$

[vgl. (7)] anwenden, und auf solche Werte von z, welche der Ungleichung

(24) $$|z| < \frac{n}{s_m}$$

genügen.

Wir haben die Funktion (22) für solche u-Werte abzuschätzen, die (21) erfüllen, also wegen (23) und (24) in dem Kreis

(25) $$|u| < \frac{3n}{s_m}$$

der u-Ebene liegen. In diesem Kreis erhält man, unter Beachtung von (12), (13) und auch der Annahme (I),

$$(26)\qquad |P(u)| < (A+1)\left(\frac{3n}{s_m}\right)^k.$$

Um in demselben Kreis (25) auch den zweiten Faktor der Funktion (22) abzuschätzen, führen wir die Funktion

$$(27)\qquad S_m(u) = \log R_m(u) = \sum_{\mu=m+1}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{u}{\alpha_\mu}\right)+\frac{u}{\alpha_\mu}\right]$$

ein; vgl. (9). Die Definition von $S_m(u)$ ist so gemeint, daß alle Logarithmen unter dem Summenzeichen rechts in (27) für $u=0$ sich auf 0 reduzieren, so daß $S_m(0)=0$ ist. Unter der Annahme (III) erhalten wir, daß im Kreise (25)

$$S_m(u) = -\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\left(\frac{u^2}{2\alpha_\mu^2}+\frac{u^3}{3\alpha_\mu^3}+\cdots\right),$$

$$|S_m(u)| < \sum_{\mu=m+1}^{\infty}\frac{|u|^2}{2\alpha_\mu^2}\,\frac{1}{1-\left|\frac{u}{\alpha_\mu}\right|}$$

$$< \frac{|u|^2}{2\left(1-\frac{3n}{s_m|\alpha_{m+1}|}\right)}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_\mu^2} < |u|^2\varrho_m;$$

wir haben wieder (III) und die Bezeichnung (20) verwendet. Es ist also im Kreis (25)

$$|S_m(u)| < \left(\frac{3n}{s_m}\right)^2\varrho_m.$$

Hieraus folgt, gemäß (27), unter der Annahne (II), daß

$$|R_m(u)-1| = |e^{S_m(u)}-1| < \left(\frac{3n}{s_m}\right)^2\varrho_m\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)$$

$$< 18\left(\frac{n}{s_m}\right)^2\varrho_m.$$

Vereinigen wir diese letzte Abschätzung mit (26), so finden wir, daß im Kreise (25), also sicherlich dann, wenn (21) und (24) gleichzeitig erfüllt sind, folgende Ungleichung besteht:

$$(28)\qquad |P(u)(R_m(u)-1)| < 18(A+1)3^k\left(\frac{n}{s_m}\right)^{k+2}\varrho_m.$$

Durch (28) haben wir die Grundlage zur Anwendung des Hilfssatzes IV auf die Funktion (22) gewonnen; es folgt nun

$$(29)\qquad |(1+s_m^{-1}D)^n P(z)(R_m(z)-1)| < B\left(\frac{n}{s_m}\right)^{k+2}\varrho_m$$

für solche Werte z, die (24) genügen; die von z unabhängige Konstante B hat den Wert

$$B = 36(A+1)3^k.$$

Jetzt sind wir gut vorbereitet zur Behandlung von $D^n F_m(z)$; es ist nämlich nach (10)

$$D^n F_m(z) = s_m^n e^{s_m z} (1 + s_m^{-1} D)^n P(z) R_m(z).$$

Also ist, unter Benutzung von (19) und (29),

$$\begin{aligned} &|s_m^{-n} e^{-s_m z} D^n F_m(z)| \\ &\quad = |(1 + s_m^{-1} D)^n P(z) + (1 + s_m^{-1} D)^n P(z)(R_m(z) - 1)| \\ &\quad \geqq \left(\frac{n}{s_m}\right)^k \left(1 - \frac{k(k-1)}{2n}\right) - (k|z| + A)\left(|z| + \frac{n}{s_m}\right)^{k-1} - B\left(\frac{n}{s_m}\right)^{k+2} \varrho_m; \end{aligned}$$

die Voraussetzung $n \geqq |s|$ der Ungleichung (19) (des Hilfssatzes III) ist wegen (23) und (I) reichlich erfüllt.

Wir können das erhaltene Resultat so formulieren: *Wenn die Annahmen* (I), (II), (III) *zutreffen, und wenn z sowohl die Ungleichung* (24) *wie*

$$(30) \qquad (k|z| + A)\left(|z| + \frac{n}{s_m}\right)^{k-1} < \left(\frac{n}{s_m}\right)^k \left(1 - B\left(\frac{n}{s_m}\right)^2 \varrho_m - \frac{k(k-1)}{2n}\right)$$

erfüllt, so ist z keine Nullstelle von $D^n F_m(z)$.

Diejenigen Punkte z, welche beiden Ungleichungen (24) und (30) genügen, bilden den nullstellenfreien Kreis, von welchem am Schluß der Nr. 4 die Rede war. Es fragt sich noch, ob dieser für großes n größer als der „verdächtige" Kreis (1) wird.

7. Der Einfluß der Ordnung.

Die Annahmen (I), (II), (III) regulieren nicht bloß den Zusammenhang zwischen m und n, sondern legen auch der Zahlenfolge $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ eine Bedingung auf. Indem man n aus (I) und (II) eliminiert, erhält man die Bedingung

$$(31) \qquad 9\, s_m^2\, \varrho_m < 1.$$

Untersucht man zunächst die Zahlenfolge

$$\alpha_1 = 1^\lambda, \quad \alpha_2 = 2^\lambda, \quad \alpha_3 = 3^\lambda, \quad \ldots,$$

so sieht man leicht, daß die linke Seite von (31) für $\lambda \geqq \frac{3}{4}$ beschränkt und für $\lambda < \frac{3}{4}$ unbeschränkt ist oder nicht existiert. Nun weiß man, daß

$$(32) \qquad \lim_{\mu \to \infty} \mu^{\frac{3}{4}} \alpha_\mu^{-1} = 0$$

ist, wenn die Ordnung der ganzen Funktion $G(z)$ kleiner als $\frac{4}{3}$ ist.

Jetzt hängt der in der Einleitung formulierte Satz nur noch von den folgenden, rein reihentheoretischen Zusammenhängen ab:

Hilfssatz V. *Die nichtverschwindenden reellen Zahlen* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ *sollen der Bedingung* (32) *genügen. Es sei a eine feste reelle Zahl, s_m durch* (6), *ϱ_m durch* (20) *definiert* [die Konvergenz folgt aus (32)]. *Ferner sei vorausgesetzt,*

daß eine positive Zahl σ existiert, so beschaffen, daß (7) *für eine gewisse ausgezeichnete unendliche Folge von ganzzahligen m-Werten erfüllt ist.*

Unter diesen Voraussetzungen behaupten wir zunächst, daß

$$\text{(A)} \qquad \lim_{m \to \infty} s_m^2 \varrho_m = 0$$

ist. Wir behaupten ferner: Es läßt sich jeder durch die Bedingung (7) *ausgezeichneten ganzen Zahl m eine ganze Zahl $n = n_m$ zuordnen, welche folgende Eigenschaften hat:*

$$\text{(B)} \qquad \lim_{m \to \infty}{}^{*} n = \infty;$$

$$\text{(C)} \qquad \lim_{m \to \infty}{}^{*} \frac{s_m^2}{n} = \lim_{m \to \infty}{}^{*} \frac{n^2 \varrho_m}{s_m^2} = \lim_{m \to \infty}{}^{*} \frac{n}{s_m \alpha_{m+1}} = 0;$$

(D) *die Ungleichungen* (24) *und* (30) *sind für* $|z| = \sqrt{n}$ (und umsomehr für $|z| < \sqrt{n}$) *bei allen genügend großen m erfüllt.*

In den Behauptungen (B), (C), (D) *ist m auf die durch* (7) *ausgezeichnete Folge beschränkt, was durch* lim* (statt lim) *hervorgehoben ist.*

Durch den Beweis des Hilfssatzes V wird die am Schluß der Nr. 4 gestellte Aufgabe gelöst und damit der durch die Einleitung in Aussicht gestellte Satz bewiesen sein. Die Voraussetzung betreffend die Ordnung wird durch (32) ausgenützt. Die Anzahl der Differentiationen n wird, gemäß (B), beliebig groß, wie sie sein soll. Die Annahmen (I), (II), (III), unter welchen der durch das Bestehen der beiden Ungleichungen (24) und (30) abgegrenzte Kreis als nullstellenfrei für $D^n F_m(z)$ nachgewiesen wurde, sind wegen (C) für genügend großes m sicher erfüllt. Das Bestehen der Ungleichungen (24) und (30) für $|z| \leqq \sqrt{n}$ bedeutet, daß der nullstellenfreie Kreis den „verdächtigen" Kreis (1) schließlich bedeckt, und damit ist das gewünschte erreicht.

Wir haben nun die Behauptungen des Hilfssatzes V der Reihe nach durchzugehen.

Laut Voraussetzung (32) ist, mit einer passend großen festen Zahl C, für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$|s_m| \leqq C + 1^{-3/4} + 2^{-3/4} + \ldots + m^{-3/4} < C + \int_0^m x^{-3/4}\, dx$$
$$= C + 4\, m^{1/4}$$

und mit einem beliebig kleinen ε, $\varepsilon > 0$, für alle genügend großen m

$$\varrho_m < \varepsilon\, [(m+1)^{-3/2} + (m+2)^{-3/2} + \ldots] < \varepsilon \int_m^\infty x^{-3/2}\, dx$$
$$= \varepsilon\, 2\, m^{-1/2},$$

folglich

$$s_m^2 \varrho_m < \varepsilon\, 2\, m^{-1/2} [C + 4\, m^{1/4}]^2.$$

Hiermit ist die Behauptung (A) nachgewiesen.

Von nun an ist m auf die durch (7) ausgezeichnete Zahlenfolge zu beschränken.

Wir wollen n so wählen, daß die beiden ersten Behauptungen unter (C) miteinander stehen oder fallen, also so, daß

$$\frac{s_m^2}{n} \sim \frac{n^2 \varrho_m}{s_m^2}, \tag{33}$$

folglich so, daß

$$n \sim s_m^{4/3} \varrho_m^{-1/3} \tag{34}$$

ist. Wir wählen somit n als den ganzen Teil der rechten Seite von (34), in Zeichen

$$n = [s_m^{4/3} \varrho_m^{-1/3}]. \tag{35}$$

Gemäß dieser Definition von n ist, wegen (7),

$$n > \sigma^{4/3} \varrho_m^{-1/3} - 1;$$

nun ist ϱ_m, nach (20) und (32), das Restglied einer konvergenten Reihe und strebt als solches gegen 0. Somit haben wir die Behauptung (B) und übrigens auch (34) und (33) bewiesen.

Die erste Behauptung unter (C) betrifft

$$\frac{s_m^2}{n} \sim \frac{s_m^2}{s_m^{4/3} \varrho_m^{-1/3}} = (s_m^2 \varrho_m)^{1/3} \to 0; \tag{36}$$

wir haben nacheinander (34) und das schon bewiesene (A) verwendet. Durch (36) ist die erste Behauptung unter (C) bewiesen; die zweite, deren Los mit dem der ersten durch (33) verbunden wurde, ist mitbewiesen. Die dritte Behauptung unter (C) ist aber unter der zweiten enthalten; es ist nämlich gemäß (20)

$$\left(\frac{n}{s_m \alpha_{m+1}}\right)^2 < \frac{n^2 \varrho_m}{s_m^2}.$$

Die beiden Ungleichungen (24) und (30) sind, wenn $|z| = \sqrt{n}$ gesetzt wird, mit den folgenden beiden gleichbedeutend

$$\frac{s_m}{\sqrt{n}} < 1, \tag{24'}$$

$$\left(k \frac{s_m}{\sqrt{n}} + A \frac{s_m}{n}\right)\left(\frac{s_m}{\sqrt{n}} + 1\right)^{k-1} < 1 - B \frac{n^2 \varrho_m}{s_m^2} - \frac{k(k-1)}{2n}. \tag{30'}$$

Die beiden linken Seiten streben, wegen der schon nachgewiesenen ersten Grenzformel unter (C), gegen 0, die beiden rechten Seiten gegen 1; für (30′) ist die zweite, schon bewiesene Grenzformel unter (C) und das ebenfalls schon bewiesene (B) zu verwenden. Die Ungleichungen (24′), (30′) sind also für genügend großes n sicherlich richtig, und damit ist auch die letzte Behauptung (D) des Hilfssatzes V dargetan.

(Eingegangen am 22. 6. 1937.)

Über die Einheiten der Divisionsalgebren.

Von

M. Eichler in Halle a. S.

Einleitung.

1. Wenn man sich auch bisher über die Einheitengruppen rationaler Divisionsalgebren kaum ein Bild machen konnte, so reicht das bereits bekannte doch aus, wichtige Eigenschaften dieser Gruppen festzustellen und die Richtung anzugeben, in welcher eine fruchtbare Weiterentwicklung der Einheitentheorie vermutet werden muß. Und zwar wird man auf die Zahlengeometrie gewiesen, durch welche die Einheitentheorie der Zahlkörper längst einen befriedigenden Abschluß gefunden hat. Die vorliegende Arbeit soll nun erneut auf die Fruchtbarkeit geometrischer Vorstellungen für arithmetische Überlegungen hinweisen; dabei verfolgen die ersten Abschnitte das Ziel, endliche Erzeugendensysteme für die Einheitengruppen von beliebigen rationalen Divisionsalgebren sicherzustellen, während die letzten sich mit den indefiniten Quaternionenalgebren beschäftigen.

Es sei $\mathfrak{J}$ eine Maximalordnung einer nullteilerfreien Algebra $\mathfrak{Q}$ vom Rang n über dem rationalen Zahlkörper. Unter Benutzung von $\mathfrak{J}$ als Darstellungsmodul hat Frl. Hey die Einheitengruppe von $\mathfrak{J}$ als eine lineare Substitutionsgruppe $\mathfrak{E}$ im n-dimensionalen Raume dargestellt[1]). $\mathfrak{E}$ bildet eine gewisse, durch die Norm der allgemeinen Zahl von $\mathfrak{J}$ definierte algebraische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ auf sich ab. Man weiß nun zweierlei: erstens ist $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{M}$ eigentlich diskontinuierlich, zweitens existiert ein ganz im Endlichen gelegener Diskontinuitätsbereich von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{M}$ (Satz 4, 5). Zur Bequemlichkeit des Lesers leite ich beide Sätze noch einmal ausführlich ab; es ist hier zu bemerken, daß der zweite nur dann gilt, wenn $\mathfrak{Q}$ keine Nullteiler enthält.

Zum weiteren Aufbau der Einheitentheorie wäre es erwünscht, wenn man $\mathfrak{E}$ auf eine Untergruppe der Bewegungsgruppe einer metrischen Geometrie mit konstanter Krümmung beziehen könnte. Dies ist für den Fall von Zahlkörpern und von rationalen Quaternionenalgebren (s. u.) auch möglich, wodurch hier die Geometrie besonders wirksam zur Erfor-

[1]) K. Hey, Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen, Diss. Hamburg 1929. Vgl. auch O. Schilling, Einheitentheorie in hyperkomplexen Systemen, Journ. für d. r. u. a. Math. 175 (1936), S. 246.

schung der Einheitengruppen eingesetzt werden kann. In Zahlkörpern wird man bekanntlich durch Bildung der Logarithmen der Einheiten des Körpers und deren algebraisch konjugierten Größen auf eine Translationsgruppe in einem euklidischen Raume von geeigneter Dimensionszahl geführt. Es ist jetzt nur noch ein kleiner Schritt von der bereits festgestellten Diskontinuität und der Endlichkeit der Diskontinuitätsbereiche der Gruppe bis zu der Kenntnis der Erzeugendenanzahl. Es mag dahingestellt bleiben, ob man die Einheiten aller hyperkomplexen Systeme als Bewegungen schreiben kann, jedenfalls lassen sie sich als topologische Abbildungen darstellen, wie dies ja durch die Gruppe $\mathfrak{E}$ geschieht.

Allein die Auffassung von $\mathfrak{E}$ als Gruppe von topologischen Selbstabbildungen der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ garantiert für sie die Existenz eines endlichen Erzeugendensystems. $\mathfrak{M}$ läßt sich nämlich ganz in Diskontinuitätsbereiche von $\mathfrak{E}$ aufteilen, welche durch ihre gegenseitigen Lagebeziehungen die Gruppe $\mathfrak{E}$ eindeutig charakterisieren[2]). Mit Hilfe der obengenannten Sätze von Frl. Hey über das Verhalten von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{M}$ kann man nun eine solche Einteilung von $\mathfrak{M}$ in Diskontinuitätsbereiche vornehmen, welche die Angabe eines endlichen Erzeugendensystems für $\mathfrak{E}$ möglich macht.

Diese Überlegungen führen aber noch weiter; identifiziert man nämlich alle Punkte von $\mathfrak{M}$, welche bezüglich $\mathfrak{E}$ äquivalent sind, so erhält man eine geschlossene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$, und $\mathfrak{E}$ erweist sich als isomorph mit deren topologischer Fundamentalgruppe. Dabei muß allerdings vorausgesetzt werden, daß $\mathfrak{E}$ keine Elemente von endlicher Ordnung enthält; trifft diese Annahme nicht zu, so hat man diese Elemente durch geeignete Untergruppenbildung zu entfernen. Man wird hierdurch an die Einheitentheorie in Zahlkörpern erinnert, wo auch die Einheitswurzeln eine Sonderrolle spielen. Im letzten Abschnitt wird von der hier festgestellten Beziehung zwischen Einheitengruppen und topologischen Fundamentalgruppen mit Erfolg Gebrauch gemacht. Schließlich liefert die Möglichkeit, die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$ zu einer einfach zusammenhängenden zu zerschneiden, den für die analytische Zahlentheorie wichtigen Satz, daß es endliche und stetig berandete Diskontinuitätsbereiche von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{M}$ gibt[3]).

Besonders weit kann die Einheitentheorie der rationalen indefiniten Quaternionenalgebren entwickelt werden; es ist dies dem Umstand zu verdanken, daß sich die Einheiten dieser Systeme als komplexe lineare

---

[2]) Beim Beweise müssen zwar $\mathfrak{E}$ durch eine Untergruppe von endlichem Index und $\mathfrak{M}$ durch eine Teilmannigfaltigkeit ersetzt werden, was hier aber nicht zum Ausdruck gebracht zu werden braucht.

[3]) Bisher stand nur fest, daß es im Sinne von Lebesgue meßbare Diskontinuitätsbereiche gibt, a. a. O.[1]).

Substitutionen schreiben lassen[1]), welche in dem Poincaréschen Modell der hyperbolischen Ebene die Rolle der Bewegungen spielen. Jede Einheitengruppe einer rationalen indefiniten Quaternionenalgebra kann also als eine Gruppe E von Bewegungen der hyperbolischen Ebene dargestellt werden. Diese ist eigentlich diskontinuierlich und der Flächeninhalt B der Diskontinuitätsbereiche wird nach einem von Frl. Hey angegebenen Verfahren mit dem Residuum der Zetafunktion der Algebra in Beziehung gebracht. Identifizierung von bezüglich E äquivalenten Punkten liefert jetzt eine geschlossene und orientierbare Fläche, deren Geschlecht einerseits aus B berechnet werden kann und andererseits die Gruppe E und damit die Einheitengruppe im abstrakten Sinne eindeutig festlegt (s. die Sätze 11, 12, 13, 14). Besondere Beachtung verdienen dabei die Fälle, wo E Elemente von endlicher Ordnung enthält, welche durch Bildung geeigneter Untergruppen entfernt werden müssen.

Die Einheitengruppen als Transformationsgruppen.

2. Es sei $\mathfrak{J} = [\iota_1, \ldots, \iota_n]$ eine Maximalordnung einer Divisionsalgebra $\mathfrak{Q}$ über dem rationalen Zahlkörper. Die Gruppe aller Einheiten aus $\mathfrak{J}$ werde mit H bezeichnet.

Die Norm[4]) jeder Einheit aus $\mathfrak{J}$ ist eine Einheit des rationalen Zahlkörpers, also gleich ± 1. Man sieht nun den folgenden Satz unmittelbar ein.

Satz 1. *Die Gruppe* E *aller Einheiten aus* $\mathfrak{J}$ *mit positiver Norm ist entweder mit der vollen Einheitengruppe* H *von* $\mathfrak{J}$ *identisch oder ein Normalteiler von* H *vom Index* 2.

Es macht wenig aus, wenn weiterhin nur die Gruppe E betrachtet wird. Bezeichnen $x_1, \ldots, x_n$ reelle Variable, die mit allen ι_i vertauschbar sind, und ist ε eine Einheit aus E, so besteht eine Gleichung

$$(1) \qquad (\sum_{i=1}^{n} \iota_i x_i)\, \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \iota_i x_i',$$

wobei die x_i' durch die x_i linear ausgedrückt werden:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} s_{ik} x_k \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$(x') = \mathfrak{e}(x).$$

Die Determinante der linearen Substitution $\mathfrak{e}$ ist gleich der Norm von ε im Sinne der charakteristischen Gleichung von $\mathfrak{Q}$, diese ist aber eine Potenz der aus der Hauptgleichung genommenen Norm von ε, somit ist die Determinante von $\mathfrak{e}$ gleich 1.

[4]) Die Normen werden stets der Hauptgleichung entnommen.

Satz 2. *Vermittels* (1) *wird die Gruppe* E *als eine Gruppe* $\mathfrak{E}$ *von volumentreuen linearen Substitutionen isomorph dargestellt.*

Die Norm der allgemeinen Zahl $\Sigma \iota_i x_i$ aus $\mathfrak{J}$ ist eine homogene rationale Funktion in den x_i, sie sei mit

$$n(\Sigma \iota_i x_i) = n((x))$$

bezeichnet. Bildet man nun in (1) die Norm, so erkennt man, daß $\mathfrak{e}$ die durch

$$n((x)) = 1 \tag{2}$$

definierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ fest läßt. $\mathfrak{M}$ zerfällt im allgemeinen in mehrere zwar in sich, aber nicht untereinander zusammenhängende Teile $\mathfrak{M}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{M}^{(t)}$, deren es offenbar nur endlich viele geben kann, da $n((x))$ eine rationale Funktion ist. Entsprechend ist $\mathfrak{E}$ mit einer Gruppe $\mathfrak{T}$ von Permutationen dieser $\mathfrak{M}^{(i)}$ homomorph, und $\mathfrak{E}$ enthält einen Normalteiler $\mathfrak{E}^*$, welcher alle $\mathfrak{M}^{(i)}$ einzeln auf sich abbildet, und dessen Faktorgruppe in $\mathfrak{E}$ gleich $\mathfrak{T}$ ist. Der Index von $\mathfrak{E}^*$ in $\mathfrak{E}$ ist gleich der Ordnung von $\mathfrak{T}$, also jedenfalls kleiner oder gleich $t!$. Ebenso hat auch E einen mit $\mathfrak{E}^*$ isomorphen Normalteiler E^*, und es gilt

$$\mathsf{E}/\mathsf{E}^* \simeq \mathfrak{E}/\mathfrak{E}^* \simeq \mathfrak{T}.$$

Satz 3. $\mathfrak{E}$ *ist eine Gruppe von Abbildungen der durch* (2) *definierten Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}$ *und besitzt einen Normalteiler* $\mathfrak{E}^*$ *von endlichem Index, welcher alle zusammenhängenden Teilmannigfaltigkeiten von* $\mathfrak{M}$ *auf sich abbildet.*

Zunächst wird jetzt die Diskontinuität von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{M}$ untersucht, dann erst wird die soeben eingeführte Gruppe $\mathfrak{E}^*$ Gegenstand eingehenderer Betrachtungen sein, aus denen sich insbesondere endliche Erzeugendensysteme für $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{E}$ ergeben werden.

3. Satz 4[5]). c *sei eine beliebige positive Konstante und* $\mathfrak{M}_c$ *bedeute den Teil von* $\mathfrak{M}$, *für dessen Punkte* $(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ *die Ungleichungen*

$$|x_i| \leqq c \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

bestehen. Dann gibt es nur endlich viele Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{E}$, *welche einen Punkt von* $\mathfrak{M}_c$ *in einen ebensolchen transformieren können.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{e}$ eine Substitution von $\mathfrak{E}$, welche den Punkt (x) von $\mathfrak{M}_c$ in einen anderen Punkt (x') von $\mathfrak{M}_c$ transformiert. Stellt man die Algebra $\mathfrak{Q}$ durch Matrizen dar und insbesondere $\Sigma \iota_i x_i$ durch die Matrix X, so wird $(\Sigma \iota_i x_i)^{-1}$ wegen $n(\Sigma \iota_i x_i) = 1$ durch die adjungierte transponierte Matrix $\overline{X}'$ dargestellt, denn es ist

$$X\overline{X}' = \overline{X}'X = |X| = n(\Sigma \iota_i x_i) = 1.$$

---

[5]) Die beiden folgenden Sätze entnehme ich nebst dem Beweise der oben zitierten Dissertation von Frl. Hey [1]).

Eine Beschränkung der Koeffizienten einer Matrix überträgt sich in gewisser Weise auf die Koeffizienten der adjungierten transponierten Matrix; deshalb werden auch die Koeffizienten y_i von

$$(\Sigma \iota_i x_i)^{-1} = \Sigma \iota_i y_i$$

unterhalb einer von c und von der gewählten Matrixdarstellung abhängigen Schranke liegen. Schließlich sind jetzt zugleich mit den Koordinaten von $(x') = \mathfrak{e}(x)$ auch die Koeffizienten z_i der Zahl

$$\Sigma \iota_i y_i \cdot \Sigma \iota_i x_i' = (\Sigma \iota_i x_i)^{-1} \cdot \Sigma \iota_i x_i' = \Sigma \iota_i z_i = \varepsilon$$

beschränkt. Die Zahl ε ist die der Substitution $\mathfrak{e}$ vermittels (1) zugeordnete Einheit, die z_i sind also ganz und rational. Da ε somit einem endlichen Vorrat von Einheiten entstammt, kann es auch nur endlich viele solche Substitutionen $\mathfrak{e}$ geben.

Satz 5. *Es gibt eine allein von $\mathfrak{J}$ abhängige Konstante a, so daß jeder Punkt (x) von $\mathfrak{M}$ durch eine Substitution aus $\mathfrak{E}$ in einen Punkt (x') von $\mathfrak{M}_a$ mit*

$$|x_i'| \leqq a \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

übergeführt werden kann.

Dieser Satz gilt nicht in nullteilerhaltigen Systemen. Nämlich die Matrix $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ läßt sich ersichtlich nicht durch rechtsseitige Multiplikation mit einer ganzzahligen Einheitsmatrix in eine derart reduzierte $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ verwandeln, bei welcher die Beträge der x_{ik} unterhalb einer von x unabhängigen Schranke liegen.

Ist (x) irgendein Punkt auf $\mathfrak{M}$, so werde

$$\xi = \Sigma \iota_i x_i$$

gesetzt; es ist dann definitionsgemäß $n(\xi) = 1$. Das Ideal $\xi\mathfrak{J} = [\xi\iota_1, \ldots, \xi\iota_n]$ geht aus $\mathfrak{J} = [\iota_1, \ldots, \iota_n]$ durch eine lineare Substitution der Determinante 1 hervor:

$$\xi \iota_k = \sum_i t_{ik} \iota_i, \qquad |t_{ik}| = 1;$$

schreibt man

$$(3) \qquad \sum_k \xi \iota_k y_k = \sum_i \iota_i z_i,$$

so gilt dann

$$(4) \qquad z_i = \sum_k t_{ik} y_k.$$

Den y_k kann man auf Grund des Satzes von Minkowski über homogene Linearformen solche ganzzahligen Werte erteilen, die nicht sämtlich Null sind, daß

$$(5) \qquad |z_i| = |\sum_k t_{ik} y_k| \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots n)$$

gilt. Es bezeichne jetzt b die obere Grenze der Zahlen $|n((z))| = |n(\Sigma \iota_i z_i)|$ für alle Punkte (z) innerhalb des Würfels (5). Dann gibt es bis auf assoziierte nur endlich viele ganze Größen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ in $\mathfrak{J}$, deren Normen kleiner oder gleich b sind; enthält $\mathfrak{J}$ Einheiten negativer Norm, so soll unter den Zahlen ϑ_i für jede von ihnen ein linksseitiges Produkt $\eta_i \vartheta_i$ mit irgend einer Einheit η_i der Norm -1 vorkommen.

Für jede gemäß (5) gewählte Zahl $\Sigma \iota_i y_i$ aus $\mathfrak{J}$ gilt nach (3) und (4)

$$|n(\Sigma \iota_i y_i)| = |n(\Sigma \xi \iota_i y_i)| = |n(\Sigma \iota_i z_i)| \leqq b,$$

also $\Sigma \iota_i y_i$ ist einer der Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ linksseitig assoziiert; es gibt daher eine Einheit ε, so daß für ein j

$$\Sigma \iota_i y_i = \varepsilon \vartheta_j$$

ist, auf Grund der getroffenen Verabredung über die ϑ_i darf sogar vorausgesetzt werden, daß ε positive Norm hat. Da ϑ_j aus einem endlichen Vorrat genommen wird, so sind nicht allein die Beträge der z_i, sondern auch die der Koeffizienten x_i' von

$$\Sigma \xi \iota_i y_i \cdot \vartheta_j^{-1} = \xi \varepsilon = \Sigma \iota_i x_i'$$

beschränkt; weil die Algebra nullteilerfrei ist, kann die Division stets ausgeführt werden. Die Schranke, die mit a bezeichnet sei, hängt allein von $\mathfrak{J}$ ab, und zu ε gehört eine Substitution $\mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{E}$, so daß $(x') = \mathfrak{e}(x)$ ist; damit ist der Satz 5 bewiesen.

Die Einheitengruppen als Fundamentalgruppen geschlossener Mannigfaltigkeiten.

4. Von jetzt ab betrachten wir den in 2 eingeführten Normalteiler $\mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{E}$, welcher die zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{M}^{(l)}$ einzeln auf sich abbildet. Unter diesen werde eine beliebige herausgegriffen und mit $\mathfrak{M}^*$ bezeichnet. Die Sätze 4 und 5 übertragen sich wörtlich auf $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{M}^*$, da $\mathfrak{E}^*$ in $\mathfrak{E}$ endlichen Index hat; nur die Konstante a des Satzes 5 muß eventuell durch eine größere, a^*, ersetzt werden. Nach den genannten Sätzen ist die Gruppe $\mathfrak{E}^*$ auf $\mathfrak{M}^*$ eigentlich diskontinuierlich, und es gibt einen ganz im Endlichen gelegenen Diskontinuitätsbereich. Er kann natürlich auf mannigfache Art gewählt werden; das Ziel dieses Abschnittes ist es, für ihn eine möglichst einfache Gestalt anzugeben und gleichzeitig einige Aussagen über die Gruppen $\mathfrak{E}^*$ und E^* herzuleiten.

Entwirft man mit allen Substitutionen $\mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{E}^*$ Bilder des Bereiches $\mathfrak{M}^*_{a^*}$, so wird die ganze Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^*$ überdeckt; aber höchstens endlich viele dieser Bilder haben mit $\mathfrak{M}^*_{a^*}$ wieder Punkte gemeinsam, denn sonst würde es unendlich viele Substitutionen in $\mathfrak{E}^*$ geben, welche gewisse Punkte von $\mathfrak{M}^*_{a^*}$ in ebensolche transformieren, aber

das widerspricht dem Satz 4. Sind $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_s$ alle Substitutionen, für welche die Bildbereiche $\mathfrak{e}_i(\mathfrak{M}^*_{a^*})$ mit $\mathfrak{M}^*_{a^*}$ Punkte gemeinsam haben, so behaupte ich, daß durch einige von ihnen die ganze Gruppe $\mathfrak{E}^*$ erzeugt werden kann.

Ein Diskontinuitätsbereich $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{E}^*$ kann wegen Satz 5 ganz innerhalb von $\mathfrak{M}^*_{a^*}$ gewählt werden; dieser wird durch $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_s$ auf äquivalente Diskontinuitätsbereiche $\mathfrak{e}_1(\mathfrak{B}), \ldots, \mathfrak{e}_s(\mathfrak{B})$ abgebildet, welche mit $\mathfrak{B}$ höchstens Randpunkte gemeinsam haben können. Außer diesen Bereichen gibt es keinen mit $\mathfrak{B}$ äquivalenten Diskontinuitätsbeich $\mathfrak{e}(\mathfrak{B})$, welcher an $\mathfrak{B}$ angrenzt, denn sonst würden $\mathfrak{M}^*_{a^*}$ und $\mathfrak{e}(\mathfrak{M}^*_{a^*})$ gemeinsame Punkte haben. $\mathfrak{e}_1(\mathfrak{B}), \ldots, \mathfrak{e}_r(\mathfrak{B})$ mögen wirklich an $\mathfrak{B}$ angrenzen ($r \leqq s$).

Durch sämtliche Substitutionen von $\mathfrak{E}^*$ erhält man jetzt Bildbereiche $\mathfrak{e}(\mathfrak{B})$, welche $\mathfrak{M}^*$ schlicht und lückenlos bedecken. Da die $\mathfrak{e}$ stetige Abbildungen vermitteln, so ist jeder dieser Bereiche von gerade r angrenzenden umgeben. Und zwar ist $\mathfrak{e}(\mathfrak{B})$ von $\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}_1(\mathfrak{B}), \ldots, \mathfrak{e}\,\mathfrak{e}_r(\mathfrak{B})$ umgeben. Beachtet man, daß $\mathfrak{M}^*$ zusammenhängend ist, so kann $\mathfrak{B}$ durch sukzessive Transformation in Nachbarbereiche, was durch Anwendung von $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_r$ möglich ist, in jeden Bereich $\mathfrak{e}(\mathfrak{B})$ transformiert werden. Dann ist also für jedes $\mathfrak{e}$ und geeignet zu bestimmende $a_1, a_2, \ldots$

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{e}_1^{a_1}\,\mathfrak{e}_2^{a_2} \ldots (\mathfrak{B}),$$

und weil keine Substitution außer der identischen $\mathfrak{B}$ in sich überführen kann, folgt

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1^{a_1}\,\mathfrak{e}_2^{a_2} \ldots,$$

$\mathfrak{E}^*$ läßt sich somit durch endlich viele Elemente erzeugen. Daß auch E und H ein endliches Erzeugendensystem besitzen, folgt unmittelbar aus der in Satz 1 und 3 festgestellten Endlichkeit der Indizes $(\mathsf{H} : \mathsf{E})$, $(\mathsf{E} : \mathsf{E}^*)$.

Satz 6. *Die Gruppen* $\mathfrak{E}^*$, E^*, E, H *lassen sich durch endlich viele ihrer Elemente erzeugen.*

Jedem Element $\mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{E}^*$ darf somit ein Weg von $\mathfrak{B}$ in den Bereich $\mathfrak{e}(\mathfrak{B})$ zugeordnet werden; aus den dabei durchlaufenen Bereichen und der Art, wie sie durchlaufen werden, kann man eine Darstellung von $\mathfrak{e}$ durch die Erzeugenden $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_r$ ablesen; verschiedenen Wegen entsprechen verschiedene Darstellungen. Diese Wege sind also nichts anderes als das Dehnsche Gruppenbild für $\mathfrak{E}^*$, wenn überflüssige Überschneidungen vermieden werden.

5. Zur weiteren Untersuchung der Gruppen $\mathfrak{E}^*$ und E^* müssen wir aus ihnen zunächst alle Elemente von endlicher Ordnung entfernen. Zu dem Zwecke betrachten wir die Untergruppe H_p aller Einheiten ε aus $\mathfrak{J}$, die für eine noch näher zu bestimmende Primzahl p der Kongruenz

$$\varepsilon \equiv 1 \pmod{p\,\mathfrak{J}} \tag{6}$$

genügen. Den Nebengruppen von H_p in H entsprechen umkehrbar eindeutig gewisse Restklassen von $\mathfrak{J}$ nach dem Modul $p\,\mathfrak{J}$; weil es nur endlich viele solche Restklassen gibt, hat H_p in H endlichen Index. Ist ferner η irgend eine Einheit von H, so ist wegen (6) für jede Einheit ε von H_p

$$\eta \equiv \eta\,\varepsilon \equiv \varepsilon\,\eta \pmod{p\,\mathfrak{J}},$$

deshalb ist

$$\eta\,\mathsf{H}_p = \mathsf{H}_p\,\eta,$$

und H_p ist sogar ein Normalteiler von H.

Die Zahlen m, die als Ordnungen von Einheiten aus H auftreten können, liegen unterhalb einer von dem Grad von $\mathfrak{Q}$ bestimmten Schranke. Denn ist η eine Einheit der Ordnung m, so muß die Hauptgleichung $f(z) = 0$ von η, d. h. die auf $\Sigma\,\iota_i x_i = \eta$ spezialisierte Hauptgleichung $f(z; x_1, \ldots, x_n) = 0$ der Algebra $\mathfrak{Q}$, die primitiven m-ten Einheitswurzeln als Wurzeln haben, da ja $\mathfrak{Q}$ nullteilerfrei ist. Dann hat aber $f(z)$ und desgleichen $\mathfrak{Q}$ mindestens den Grad $\varphi(m)$. Wählt man nun p zu allen möglichen m prim, so enthält H_p außer der 1 keine Einheiten von endlicher Ordnung. Nämlich wegen (6) hat die Hauptgleichung jedes ε aus H_p die Form $(z-1)^r \equiv f(z) = 0 \pmod{p}$, und weil p und m teilerfremd sind, so haben $(z-1)^r$ und $z^m - 1$ mod p nur den gemeinsamen Teiler $z-1$. Ist nun $\varepsilon^m = 1$, so ist daher $\frac{\varepsilon^m - 1}{\varepsilon - 1} \not\equiv 0 \pmod{p}$ und erst recht $\frac{\varepsilon^m - 1}{\varepsilon - 1} \neq 0$, und ε kann nur gleich 1 sein. Der Durchschnitt

$$\mathsf{E}_p^* = \mathsf{E}^* \cap \mathsf{H}_p \tag{7}$$

ist dann auch von Einheiten endlicher Ordnung frei, er ist ein Normalteiler von E^* von endlichem Index. Entsprechend E_p^* hat auch $\mathfrak{E}^*$ eine Untergruppe $\mathfrak{E}_p^*$ ohne Elemente von endlicher Ordnung.

Wegen der Endlichkeit des Index $(\mathsf{E} : \mathsf{E}_p^*) = (\mathfrak{E} : \mathfrak{E}_p^*)$ folgt nun aus den Sätzen 4 und 5 sofort, daß auch $\mathfrak{E}_p^*$ eine auf $\mathfrak{M}^*$ eigentlich diskontinuierliche Abbildungsgruppe ist, für die man einen Diskontinuitätsbereich ganz im Endlichen wählen kann. Bezüglich $\mathfrak{E}_p^*$ äquivalente Punkte von $\mathfrak{M}^*$ besitzen, soweit sie einem beliebigen endlichen Teilbereich von $\mathfrak{M}^*$ angehören, stets einen positiven Minimalabstand voneinander, den man etwa auf den geodätischen Linien von $\mathfrak{M}^*$ messen möge. Denn würden sich in einem Punkte (x) Paare äquivalenter Punkte häufen, so wäre (x) ein Fixpunkt einer Substitution $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{E}_p^*$. Neben $\mathfrak{e}$ lassen auch alle Potenzen von $\mathfrak{e}$ den gleichen Punkt (x) fest, wegen Satz 4 darf dann $\mathfrak{e}$ nicht unendliche Ordnung haben, und Substitutionen von endlicher Ordnung gibt es in $\mathfrak{E}_p^*$ außer der identischen nicht.

Nun fasse man alle bezüglich $\mathfrak{E}_p^*$ äquivalenten Punkte von $\mathfrak{M}^*$ in Klassen zusammen. Wegen der Stetigkeit dieser Substitutionen werden

dadurch auch die Umgebungen aller Punkte zu Klassen vereinigt. Und weil Punkte, die zu einer Klasse gehören, in jedem endlichen Teil von $\mathfrak{M}^*$ einen positiven Minimalabstand voneinander haben, so kann man derartige äquivalente Umgebungen um äquivalente Punkte angeben, welche sämtlich zueinander punktfremd sind. Man kann aus diesem Grunde die Klassen äquivalenter Punkte als Punkte einer neuen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$ deuten, welche überall im Kleinen ein topologisches Abbild von $\mathfrak{M}^*$ ist. $\mathfrak{N}$ besitzt natürlich keinen Rand und ist zusammenhängend, weil $\mathfrak{M}^*$ zusammenhängt. Die Diskontinuitätsbereiche von $\mathfrak{E}_p^*$ sind schlichte Bilder von $\mathfrak{N}$, dabei entspricht den Begrenzungen dieser Bereiche ein System von Schnitten, welche $\mathfrak{N}$ zu einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit aufschneiden. Umgekehrt liefert jedes solche Schnittsystem auf $\mathfrak{N}$ eine Einteilung von $\mathfrak{M}^*$ in Diskontinuitätsbereiche für die Gruppe $\mathfrak{E}_p^*$.

Nun hatten wir die Gruppe $\mathfrak{E}^*$ durch Wege veranschaulicht, welche die einzelnen Diskontinuitätsbereiche $\mathfrak{e}(\mathfrak{B})$ mit $\mathfrak{B}$ verbinden. Diese Vorstellung läßt sich dahin präzisieren, daß in jedem Bereich $\mathfrak{e}(\mathfrak{B})$ ein zu einem festen Punkt (x) aus $\mathfrak{B}$ äquivalenter Punkt $\mathfrak{e}(x)$ als Station für dies Wegesystem genommen wird. Das Bild ist mutatis mutandis auf die Gruppe $\mathfrak{E}_p^*$ übertragbar, und die jetzt gebildeten Wege stellen in $\mathfrak{N}$ geschlossene Wege dar, wobei zwei stetig ineinander deformierbare Wege nicht als verschieden angesehen werden dürfen.

Satz 7. *Die durch* (6) *und* (7) *definierte Untergruppe von* E_p^* *ist ein Normalteiler von* E^* *von endlichem Index; sie ist mit der Fundamentalgruppe einer zusammenhängenden geschlossenen Mannigfaltigkeit isomorph.*

Da $\mathfrak{E}^*$ nach Satz 6 ein endliches Erzeugendensystem besitzt, so kann auch $\mathfrak{E}_p^*$ als Untergruppe von endlichem Index durch endlich viele Elemente erzeugt werden. Nach einem Satz aus der Topologie entspricht einem endlichen Erzeugendensystem der Fundamentalgruppe von $\mathfrak{N}$ ein System von endlich vielen Schnitten, welche diese Mannigfaltigkeit zu einer einfach zuzammenhängenden zerschneiden. Diese Schnitte ergeben eine Einteilung von $\mathfrak{M}^*$ in stetig berandete Diskontinuitätsbereiche der Gruppe $\mathfrak{E}_p^*$. Verfeinert man das durch die Aufschneidung von $\mathfrak{N}$ erzeugte Netz in $\mathfrak{M}^*$ durch Ausübung aller Substitutionen aus $\mathfrak{E}^*$, so stellen die Maschen dieses feineren Netzes Diskontinuitätsbereiche von $\mathfrak{E}^*$ dar, welche offenbar auch stetig berandet sind. Auf diese Weise erhält man aber nicht allein auf $\mathfrak{M}^*$, sondern auf allen Teilmannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{M}^{(t)}$ von $\mathfrak{M}$ stetig berandete Diskontinuitätsbereiche von $\mathfrak{E}^*$. Eine nochmalige Anwendung des eben durchgeführten Schlusses liefert dann den

Satz 8. *Es gibt einen ganz im Endlichen gelegenen Diskontinuitätsbereich von* $\mathfrak{E}$ *auf* $\mathfrak{M}$ *mit stetiger Berandung.*

Quaternioneneinheiten und lineare komplexe Substitutionen.

6. Die in den vorigen Abschnitten entwickelte Theorie soll nun auf die nullteilerfreien indefiniten Quaternionenalgebren über dem rationalen Zahlkörper angewandt werden. Es wird dabei von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß alle Ideale Hauptideale sind[6]). Dementsprechend sind alle Maximalordnungen und ihre Einheitengruppen isomorph, so daß man von den Einheitengruppen dieser Algebren schlechthin sprechen darf.

Den Idealen eines Quaternionensystems mit der Grundzahl d[7]) sind die quaternären quadratischen Stammformen mit der Diskriminante d^2 zugeordnet, welche eine Komposition zulassen. Und zwar sind alle diese Formen äquivalent, da es nur eine Idealklasse gibt. Ist jetzt $\mathfrak{J}$ irgend eine Maximalordnung und $n((x))$ ihre Normenform, so läßt auch die Form $-n((x))$ eine Komposition zu und ist aus dem Grunde mit $n((x))$ äquivalent. Entsprechend enthält $\mathfrak{J}$ eine Einheit mit negativer Norm[8]).

Satz 9. *Die Einheiten positiver Norm bilden in der Einheitengruppe* H *einer indefiniten Quaternionenalgebra einen Normalteiler* E *vom Index* 2.

In bekannter Weise kann jetzt die Einheitentheorie mit der analytischen Zahlentheorie in Zusammenhang gebracht werden[9]). Ist E die Gruppe aller Einheiten mit positiver Norm aus der Maximalordnung $\mathfrak{J} = [\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4]$ und $\mathfrak{E}$ die ihr vermittels (1) zugeordnete Substitutionsgruppe, so wähle man zunächst auf der durch $n(\Sigma\,\iota_i x_i) = n((x)) = 1$ definierten Mannigfaltigkeit einen stetig berandeten und ganz im Endlichen gelegenen Diskontinuitätsbereich von $\mathfrak{E}$, was nach Satz 8 immer möglich ist. Nun verbinde man dessen Rand durch Geraden mit dem Nullpunkt. So entsteht ein kegelförmiger Diskontinuitätsbereich $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{E}$ im vierdimensionalen Raum. Der durch $-1 \leqq n((x)) \leqq 0$ definierte endliche Teil von $\mathfrak{D}$ sei mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Jetzt gilt der

Satz 10. *Das Volumen von* $\mathfrak{F}$ *hat den Wert*

$$\iiiint\limits_{\mathfrak{F}} dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = \frac{\pi^2}{12}\,\frac{\varphi(d)}{d},$$

d bezeichne dabei die Grundzahl der Algebra.

Beweis. Da sämtliche Substitutionen von $\mathfrak{E}$ nach Satz 2 volumentreu sind, so darf die Wahl von $\mathfrak{D}$ in beliebiger Weise erfolgen.

[6]) M. Eichler, Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren, Journ. für d. r. u. a. Math. 176 (1937), S. 192. Oder C. G. Latimer, On Ideals in Generalized Quaternion Algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935).

[7]) d wird auf Vorschlag von Herrn Brandt für indefinite Systeme positiv, negativ für definite genommen, entgegen der ursprünglich getroffenen Festsetzung.

[8]) Diese Schlußweise verdanke ich Herrn Brandt. Vgl. dazu H. Brandt, Idealtheorie in Quaternionenalgebren, Math. Ann. 99 (1928). S. 1.

[9]) Vgl. zu dem folgenden K. Hey a. a. O.[1]) oder M. Deuring, Algebren, Ergebn. d. Math. IV, 1. Berlin 1935, S. 128 ff.

Jede Zahl α aus $\mathfrak{J}$ ist mit genau einer solchen Zahl

$$\alpha' = \sum_{i=1}^{4} \iota_i x_i'$$

linksseitig assoziiert, für welche der Punkt $(x') = (x_1', x_2', x_3', x_4')$ in $\mathfrak{D}$ liegt; nach Satz 9 darf α' als eine Zahl mit negativer Norm genommen werden. Somit entsprechen den Linkshauptidealen $\mathfrak{J}\alpha$ von $\mathfrak{J}$ umkehrbar eindeutig die Gitterpunkte (x') in $\mathfrak{D}$ mit $n((x')) < 0$. Die Anzahl $T(t)$ der Linkshauptideale von $\mathfrak{J}$, deren Normen kleiner oder gleich t sind, wächst mit zunehmendem t somit gleich schnell wie das Volumen des Teiles von $\mathfrak{D}$ mit $-t \leq n((x')) \leq 0$. Dies Volumen hat den Wert

$$V(t) = t^2 \iiiint\limits_{\mathfrak{F}} dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4,$$

es ist also

$$\lim_{t=\infty} \frac{T(t)}{t^2} = \lim_{t=\infty} \frac{V(t)}{t^2} = \iiiint\limits_{\mathfrak{F}} dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4.$$

Nach einem bekannten Satze von Dirichlet ist aber andererseits

$$\lim_{t=\infty} \frac{T(t)}{t^2} = \lim_{s=1} (s-1) \sum_{\alpha} |n(\alpha)|^{-2s},$$

wobei rechts über ein System von nicht linksseitig assoziierten Zahlen aus $\mathfrak{J}$ zu summieren ist. Die Funktion

$$\sum_{\alpha} |n(\alpha)|^{-2s}$$

ist die Zetafunktion der Algebra, weil alle Ideale Hauptideale sind[6]); folglich gilt

$$\sum_{\alpha} |n(\alpha)|^{-2s} = \zeta(2s)\,\zeta(2s-1) \prod_{p|d} (1 - p^{1-2s}),$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet. Das ergibt schließlich die Behauptung

$$\iiiint\limits_{\mathfrak{F}} dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = \lim_{s=1} \zeta(2s)\,\zeta(2s-1) \prod_{p|d} (1 - p^{1-2s}) = \frac{\pi^2}{12} \frac{\varphi(d)}{d}.$$

7. Mit Frl. Hey[10]) stellen wir jetzt die Quaternionenalgebra $\mathfrak{Q}$ durch Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

dar, wobei a und b komplexe Zahlen und $\bar{a}$ und $\bar{b}$ die dazu konjugiert komplexen bedeuten. Insbesondere sei

$$(8) \qquad \xi = \sum_{i=1}^{4} \iota_i x_i = \begin{pmatrix} y_1 + i y_2 & y_3 + i y_4 \\ y_3 - i y_4 & y_1 - i y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

[10]) In den nachstehenden Untersuchungen bis zum Schluß dieses Abschnittes folge ich der Dissertation von Frl. Hey[1]), die jedoch an einer Stelle berichtigt werden muß.

die allgemeine Zahl, deren Norm ist

$$n((x)) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = |z_1|^2 - |z_2|^2.$$

Da die Normenform $n((x))$ von $\mathfrak{I}$ die Diskriminante d^2 hat, dagegen $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$ die Diskriminante 16, so führt eine lineare Substitution

$$(9) \qquad y_i = \sum_{k=1}^{4} d_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

der Determinante $4/d$ von den x_i zu den y_i.

Man setze weiterhin

$$(10) \quad \begin{cases} y_1 + i y_2 = z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad y_3 + i y_4 = z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}, \\ |z_1|^2 - |z_2|^2 = r_1^2 - r_2^2 = n, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = r, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi, \quad \varphi_1 = \psi, \end{cases}$$

worin $r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2$ reelle Zahlen sein mögen; insbesondere soll r positiv und $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $0 \leqq \psi < \pi$ genommen werden. Durch (9) und (10) wird jedem Punkt (x_1, x_2, x_3, x_4) ein Punkt (n, r, φ, ψ) eindeutig zugeordnet, dagegen entsprechen einem Punkt (n, r, φ, ψ) stets zwei Punkte (x_1, x_2, x_3, x_4) und $(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$. Aber von diesen kann höchstens einer dem Diskontinuitätsbereiche $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{E}$ angehören, da die Substitution $(-x) = \mathsf{e}(x)$ vermittels (1) der Einheit $\varepsilon = -1$ zugeordnet ist und daher zu $\mathfrak{E}$ gehört; so kann auch $\mathfrak{F}$ höchstens einen der Punkte (x) und $(-x)$ enthalten. Nach (9), (10) und Satz 10 wird jetzt

$$(11) \qquad \frac{\pi^2}{12}\varphi(d) = 2\iiiint \frac{n r}{(r^2-1)^2}\, dn\, dr\, d\varphi\, d\psi,$$

wobei über den Bereich zu integrieren ist, auf den $\mathfrak{F}$ durch (9) und (10) abgebildet wird. Da für $\mathfrak{F}$ die Ungleichung $-1 \leqq n((x)) \leqq 0$ gilt, ist für diesen jedenfalls $r < 1$.

Insbesondere liefert (8) eine Darstellung

$$(12) \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ \bar{e}_2 & \bar{e}_1 \end{pmatrix}$$

der Gruppe E, und diese erweist sich als zweistufig isomorph mit der Gruppe E der gebrochen linearen Substitutionen

$$(13) \qquad e(z) = \frac{e_1 z + \bar{e}_2}{e_2 z + \bar{e}_1},$$

denn einer Substitution (13) entsprechen stets zwei Einheiten ε und $-\varepsilon$ der Darstellung (12). Bezeichnet Z den durch 1 und -1 erzeugten Normalteiler der Ordnung 2 in E, so sind jetzt E und E/Z isomorphe Gruppen. Wegen $n(\varepsilon) = |e_1|^2 - |e_2|^2 = 1$ bilden die Substitutionen (13) das Innere des Einheitskreises auf sich ab.

Die aus (8) und (12) resultierende Gleichung

$$(14) \quad \xi\varepsilon = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ \bar{e}_2 & \bar{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 z_1 + \bar{e}_2 z_2 & e_2 z_1 + \bar{e}_1 z_2 \\ e_1 \bar{z}_2 + \bar{e}_2 \bar{z}_1 & e_2 \bar{z}_2 + \bar{e}_1 \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1' & z_2' \\ \bar{z}_2' & \bar{z}_1' \end{pmatrix}$$

erlaubt es jetzt, den Bereich anzugeben, über den das Integral (11) erstreckt werden muß: geht nämlich ein Punkt (x) durch eine Substitution von $\mathfrak{E}$, welche zu der Einheit (12) gehört, in einen Punkt (x') über und sind (n, r, φ, ψ), $(n', r', \varphi', \psi')$ die diesen Punkten vermittels (9) und (10) zugeordneten Punkte, so folgt aus (10), (14) und $n(\varepsilon) = |e_1|^2 - |e_2|^2 = 1$

$$r' e^{i\varphi'} = e(r e^{i\varphi}) = \frac{e_1 r e^{i\varphi} + \bar{e}_2}{e_2 r e^{i\varphi} + \bar{e}_1}, \qquad n' = n.$$

Somit geht $\mathfrak{F}$ durch (9) und (10) in folgenden Bereich über: $re^{i\varphi}$, n, ψ durchlaufen bezüglich einen Diskontinuitätsbereich $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{E}$ im Inneren des Einheitskreises und die Intervalle $-1 \leqq n \leqq 0$, $0 \leqq \psi < \pi$.

Die Existenz eines Diskontinuitätsbereiches $\mathfrak{B}$ folgt erstens aus obigen Betrachtungen wegen der Stetigkeit der wechselseitigen Zuordnungen (9) und (10) nebenher und zweitens aus der Tatsache, daß E keine infinitesimalen Substitutionen enthält[11]). Die Integration über n und ψ kann in (11) bereits ausgeführt werden und ergibt

$$\frac{\pi}{12}\,\varphi(d) = \iint\limits_{\mathfrak{B}} \frac{r\,dr\,d\varphi}{(r^2-1)^2}. \tag{15}$$

8. Wenn E und damit auch E keine nichttrivialen Elemente von endlicher Ordnung enthält, so kann (15) jetzt weiter umgeformt werden. Ist $\varepsilon \neq \pm 1$ eine Einheit von endlicher Ordnung, so kann höchstens $\varepsilon^4 = 1$ oder $\varepsilon^6 = 1$ sein, da ε als Zahl einer Quaternionenalgebra $\mathfrak{Q}$ einer quadratischen Gleichung genügen muß. ε erzeugt dann einen kommutativen quadratischen Unterkörper von $\mathfrak{Q}$ der Diskriminante -4 oder -3, und dies ist immer dann unmöglich, wenn die Grundzahl d von $\mathfrak{Q}$ einen Primteiler der Form $4k+1$ und einen der Form $3k+1$ enthält[12]). Diese Bedingungen sollen einstweilen als erfüllt angenommen werden. E ist dann von Elementen von endlicher Ordnung frei.

Das Innere des Einheitskreises ist nun bekanntlich ein Modell der hyperbolischen Ebene, die Orthogonalkreise des Einheitskreises spielen dabei die Rolle der Geraden, und die hyperbolischen Bewegungen sind die Substitutionen

$$z' = e^{i\alpha}\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$$

[11]) Fricke-Klein, Automorphe Funktionen, Bd. I, Leipzig 1897, S. 99. Um diesen zweiten Beweis für die Existenz von $\mathfrak{B}$ vollständig zu machen, müßte man noch zeigen, daß E mit einer solchen Gruppe von linearen nicht infinitesimalen Substitutionen äquivalent ist, welche reelle Koeffizienten haben.

[12]) Dies folgt aus bekannten Sätzen über Zerfällungskörper. Vgl. auch V. Kořínek, Kvadratická tělesa v kvaternionových okruzích, Věst. Král. Čes. Spol. Nauk, Tř. II, 1930.

mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Das Flächenelement wird durch den Ausdruck

$$df = 4 \frac{r\,dr\,d\varphi}{(r^2-1)^2}$$

wiedergegeben[13]). Der hyperbolische Flächeninhalt von $\mathfrak{B}$ ist nach (15) somit

$$B = \frac{\pi}{3}\,\varphi(d).$$

Eine Substitution (13) besitzt stets zwei getrennt liegende Fixpunkte, denn sonst wäre

$$(e_1 - \bar{e}_1)^2 + 4\,e_2\bar{e}_2 = s(\varepsilon)^2 - 4\,n(\varepsilon) = -n\big(s(\varepsilon) - 2\,\varepsilon\big) = 0,$$

und die Algebra enthielte den Nullteiler $s(\varepsilon) - 2\,\varepsilon$. Folglich kann ein Diskontinuitätsbereich $\mathfrak{B}$ von E ganz im Innern des Einheitskreises oder m. a. W. ganz im Endlichen der hyperbolischen Ebene gewählt werden[14]). Aus der Voraussetzung, daß E keine Substitutionen von endlicher Ordnung enthält, folgt jetzt wie in 5, daß bezüglich E äquivalente Punkte einen positiven Minimalabstand voneinander haben. Deshalb kann man die Klassen äquivalenter Punkte wiederum als die Punkte einer geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ deuten, welche überall im Kleinen ein topologisches und sogar konformes Abbild der hyperbolischen Ebene ist. (Man pflegt auch zu sagen, daß $\mathfrak{R}$ durch „Zusammenbiegen" eines Diskontinuitätsbereiches von E entsteht.) Ferner ist $\mathfrak{R}$ orientierbar, da die Substitutionen aus E orientierungstreu sind. Der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ entspricht ein System von Rückkehrschnitten, welche $\mathfrak{R}$ zu einem einfach zusammenhängenden Flächenstück aufschneiden, und die so aufgeschnittene Fläche $\mathfrak{R}$ ist ein umkehrbar eindeutiges und konformes Abbild von $\mathfrak{B}$. Deshalb darf das Integral (15) auch über $\mathfrak{R}$ erstreckt werden. Weil auf $\mathfrak{R}$ die hyperbolische Geometrie gilt, so hat $\mathfrak{R}$ in jedem Punkt die Krümmung $K = -1$, unter der Krümmung wird dabei die allein aus den Koeffizienten des Linienelementes ableitbare Gaußsche Hauptkrümmung verstanden. Nach der Gauß-Bonnetschen Integralformel ergibt sich jetzt für (15) der Wert

$$\frac{\pi}{12}\,\varphi(d) = \frac{1}{4}\int_{\mathfrak{B}} df = \frac{1}{4}\int_{\mathfrak{R}} df = -\frac{1}{4}\int_{\mathfrak{R}} K\,df = \pi(h-1),$$

worin

$$h = \frac{\varphi(d)}{12} + 1 \tag{16}$$

das Geschlecht der Fläche $\mathfrak{R}$ bedeutet.

Ich fasse die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen:

Satz 11. *$\mathfrak{Q}$ sei eine nullteilerfreie indefinite Quaternionenalgebra mit der Grundzahl d, E die Gruppe aller Einheiten positiver Norm innerhalb der*

---

[13]) Vgl. hierzu etwa L. Bieberbach, Funktionentheorie, Bd. II, Leipzig und Berlin, 1931, S. 55.

[14]) A. a. O.[11]), S. 117.

vollen Einheitengruppe H *von* $\mathfrak{Q}$, *und* Z *der durch* 1 *und* -1 *erzeugte Normalteiler von* E. *Dann ist die Faktorgruppe* E/Z *mit einer eigentlich diskontinuierlichen Bewegungsgruppe* E *der hyperbolischen Ebene isomorph. Ein Diskontinuitätsbereich von* E *hat den Flächeninhalt*

$$B = \frac{\pi}{3}\,\varphi(d).$$

Enthält d *mindestens einen Primteiler der Form* $4k+1$ *und mindestens einen der Form* $3k+1$, *so bilden die Klassen bezüglich* E *äquivalenter Punkte der hyperbolischen Ebene eine geschlossene und orientierbare Fläche vom Geschlecht*

$$h = \frac{\varphi(d)}{12} + 1.$$

Erzeugende und Relationen der Quaternioneneinheitengruppen.

9. Nach dem Vorbild von 5 kann E als die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{R}$ aufgefaßt werden; das liefert nach einem bekannten Satze aus der Topologie für sie ein System von $2h$ Erzeugenden $e_1, \ldots, e_{2h}$, wobei

$$e_1^{-1} e_2 e_1 e_2^{-1} \ldots e_{2h-1}^{-1} e_{2h} e_{2h-1} e_{2h}^{-1} = 1$$

ein vollständiges Relationensystem darstellt[15]). Zu dem gleichen Ergebnis führt die Untersuchung der Einteilung der hyperbolischen Ebene in Diskontinuitätsbereiche für die Gruppe E, die aus einer kanonischen Zerschneidung von $\mathfrak{R}$ entspringt[16]). Eine kanonische Zerschneidung liefert ein $4h$-Eck mit der Winkelsumme 2π als Diskontinuitätsbereich, dessen Seiten zunächst beliebige einander paarweise äquivalente stetige Kurven sind. Jedoch kann man die Ecken auch durch hyperbolische Geraden verbinden, das so in der ganzen Ebene erhaltene Netz geht wegen der Äquivalenz sämtlicher Ecken bei allen Substitutionen von E in sich über und liefert mithin eine Einteilung der Ebene in Diskontinuitätsbereiche von E. Wendet man jetzt die bekannte Formel für den hyperbolischen Dreiecksinhalt (π — Winkelsumme) an, so erhält man für den Flächeninhalt dieser Diskontinuitätsbereiche die Formel

$$B = \pi(4h-4),$$

aus der sich unter Benutzung des Wertes von B wiederum (16) ergibt.

Man wähle, um auch zu Erzeugenden und Relationen für E zu gelangen, in der Zerlegung

$$\mathsf{E} = \mathsf{Z} + \mathsf{Z}\varepsilon_1 + \ldots$$

in jeder zu einer Erzeugenden e_i von E gehörigen Nebengruppe $\mathsf{Z}\varepsilon_i$ eine beliebige Einheit ε_i. Dann gilt

$$\varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1} \ldots \varepsilon_{2h-1}^{-1} \varepsilon_{2h} \varepsilon_{2h-1} \varepsilon_{2h}^{-1} = \pm 1.$$

[15]) Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Leipzig und Berlin 1934, S. 170.

[16]) A. a. O.[11]), S. 182 ff.

Ich zeige zunächst, daß hier das obere Zeichen richtig ist. Da die Grundzahl d eines indefiniten Quaternionensystems ohne Nullteiler mindestens zwei Primteiler besitzt, so ist diese Behauptung mit der folgenden gleichbedeutend:

$$s(\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\ldots\varepsilon_{2h-1}^{-1}\varepsilon_{2h}\varepsilon_{2h-1}\varepsilon_{2h}^{-1}) \equiv 2 \pmod{d}.$$

Die Zahlen $-\frac{1}{d}(\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_1^{-1})$ und $\frac{1}{d}(\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_1^{-1})\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}$ sind nun in dem Komplement der Maximalordnung $\mathfrak{J}$ enthalten[17]) und haben daher ganze Spuren. So gilt also

$$s((\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_1^{-1})\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}) \equiv s(\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}) - 2 \equiv 0 \pmod{d}.$$

Es sei bereits für ein $n \geqq 1$ die Kongruenz

$$s(\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{2n-1}^{-1}\varepsilon_{2n}\varepsilon_{2n-1}\varepsilon_{2n}^{-1}) \equiv 2 \pmod{d}$$

als richtig erkannt; dann liegt auch

$$\frac{1}{d}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\ldots\varepsilon_{2n-1}^{-1}\varepsilon_{2n}\varepsilon_{2n-1}\varepsilon_{2n}^{-1}(\varepsilon_{2n+1}^{-1}\varepsilon_{2n+2} - \varepsilon_{2n+2}\varepsilon_{2n+1}^{-1})\varepsilon_{2n+1}\varepsilon_{2n+2}^{-1}$$

im Komplement von $\mathfrak{J}$, und es ist

$$\begin{aligned} s(\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\ldots\varepsilon_{2n+1}^{-1}\varepsilon_{2n+2}\varepsilon_{2n+1}\varepsilon_{2n+2}^{-1}) \\ \equiv s(\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\ldots\varepsilon_{2n-1}^{-1}\varepsilon_{2n}\varepsilon_{2n-1}\varepsilon_{2n}^{-1}) \equiv 2 \pmod{d}. \end{aligned}$$

Die behauptete Kongruenz ist also in der Tat richtig, und es gilt

$$\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\ldots\varepsilon_{2h-1}^{-1}\varepsilon_{2h}\varepsilon_{2h-1}\varepsilon_{2h}^{-1} = 1. \tag{17}$$

Die Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2h}$ erzeugen eine zu E isomorphe Gruppe E', und E ist das direkte Produkt

$$\mathsf{E} = \mathsf{E}' \times \mathsf{Z}. \tag{18}$$

Nimmt man zu E noch eine Einheit η von negativer Norm hinzu, so wird nach Satz 9 die ganze Gruppe H erzeugt. Das Relationensystem besteht jetzt aus (17), (18) und

$$(-1)^2 = 1, \quad \eta^{-1}\mathsf{Z}\eta = \mathsf{Z}, \quad \eta^{-1}\mathsf{E}\eta = \mathsf{E}, \quad \eta^2 \in \mathsf{E}. \tag{19}$$

Jede Relation zwischen $\eta, -1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2h}$ läßt sich nach (18) und (19) auf die Form

$$\eta^a(-1)^b\varepsilon_1^{e_1}\varepsilon_2^{e_2}\ldots = 1$$

bringen, wobei a und b entweder 0 oder 1 sind. Da η nicht in E liegt, so kann jetzt nur $a = 0$ sein. Dann ist nach (18) auch $b = 0$ und die zurückbleibende Relation ist eine Folge von (17).

Satz 12. *Enthält die Grundzahl d einer indefiniten Quaternionenalgebra mindestens einen Primteiler der Form $4k+1$ und mindestens einen der Form $3k+1$, so wird ihre Einheitengruppe durch* $2h+2 = \frac{\varphi(d)}{6} + 4$

[17]) R. Fueter, Quaternionenringe, Comm. Math. Helv. 6 (1934), S. 199. Oder M. Eichler, Untersuchungen in der Zahlentheorie der rationalen Quaternionenalgebren, Journ. für d. r. u. a. Math. 174 (1936), S. 129, besonders S. 138.

Einheiten η, $-1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2h}$ *erzeugt;* (17), (18) *und* (19) *stellen ein vollständiges Relationensystem dar.*

10. In den bisher ausgeschlossenen Fällen, wo die Grundzahl d keinen Primteiler der Form $4k+1$ oder keinen der Form $3k+1$ enthält, treten in E Elemente von endlicher Ordnung auf. Jetzt muß wie in 5 eine gewisse Untergruppe betrachtet werden. Da d stets mindestens zwei verschiedene Primteiler besitzt, so gibt es außer in dem Falle $d = 6$ eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl p, welche d teilt — der Fall $d = 6$ muß später getrennt behandelt werden.

Es sei $\mathfrak{p}$ das gleichseitige Primideal der Norm p für die Maximalordnung $\mathfrak{J}$ und $\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ die Gruppe aller Einheiten ε aus $\mathfrak{J}$, welche die Kongruenz

$$\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}} \tag{20}$$

befriedigen. Den Nebengruppen von $\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ in H entsprechen umkehrbar eindeutig gewisse Restklassen von $\mathfrak{J}$ nach dem Modul $\mathfrak{p}$, und zwar gehören $\eta\,\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ und $\mathsf{H}_\mathfrak{p}\,\eta$ immer zu der gleichen Restklasse. Daher ist $\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ eine invariante Untergruppe von H, deren Faktorgruppe mit einer Untergruppe der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen Restklassen von $\mathfrak{J}$ mod $\mathfrak{p}$ isomorph ist.

Nun bilden die Restklassen nach einem unzerlegbaren Primideal ein Galoisfeld, und die von Null verschiedenen von ihnen bilden bekanntlich eine zyklische Gruppe bezüglich der Multiplikation. Da jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe selber zyklisch ist, so ist insbesondere die Faktorgruppe $\mathsf{H}/\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ zyklisch.

Eine Basis von $\mathfrak{p}$ geht aus einer von $\mathfrak{J}$ durch eine lineare Substitution der Determinante p^2 hervor[18]), folglich hat der Restklassenkörper von $\mathfrak{J}$ mod $\mathfrak{p}$ gerade p^2 Elemente. Deren Normen verteilen sich auf die Restklassen der ganzen rationalen Zahlen mod p. Somit bilden diejenigen Restklassen, deren Normen kongruent ± 1 mod p sind, eine multiplikative Gruppe der Ordnung $\frac{p^2-1}{\frac{1}{2}(p-1)} = 2(p+1)$. Offenbar können nur diese Restklassen Einheiten aus $\mathfrak{J}$ enthalten; enthalten sie aber sämtlich Einheiten, so hat die Faktorgruppe $\mathsf{H}/\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ die Ordnung $2(p+1)$. Und jenes ist tatsächlich der Fall:

Nämlich jedes Paar konjugierter Restklassen von $\mathfrak{J}$ mod $\mathfrak{p}$ ist durch Spur und Norm eindeutig charakterisiert, da ja die Restklassen einen kommutativen Körper bilden. Sind also η, α zwei Zahlen aus $\mathfrak{J}$ mit

$$s(\eta) \equiv s(\alpha) \pmod{p}, \quad n(\eta) \equiv n(\alpha) \pmod{p},$$

so ist

$$\eta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{oder} \quad \bar{\eta} \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}},$$

[18]) H. Brandt a. a. O.[8]).

wobei $\bar{\eta}$ das zu η konjugierte Quaternion bezeichnet. α möge irgend eine Restklasse von $\mathfrak{J}$ mod $\mathfrak{p}$ mit $n(\alpha) \equiv \pm 1 \pmod{p}$ repräsentieren. Es werde dann eine ganze rationale Zahl s gesucht, welche erstens der Kongruenz $s \equiv s(\alpha) \pmod{p}$ genügt, welche zweitens im Falle eines geraden d ungerade ist, und für welche drittens die Zahl $s^2 - 4(\pm 1)$ für alle ungeraden von p verschiedenen Primteiler von d ein quadratischer Nichtrest ist. Diese Bedingungen sind Kongruenzen mit relativ primen Moduln und daher miteinander verträglich; die ersten beiden sind selbstverständlich erfüllbar, die letzte deshalb, weil die quadratische Form $s^2 - 4(\pm 1)t^2$ für jede ungerade Primzahl sowohl quadratische Reste wie Nichtreste darstellt, wobei man nachträglich erkennt, daß sogar mit $t = 1$ Reste und Nichtreste dargestellt werden. Die Quadratwurzel aus $s^2 - 4(\pm 1)$ erzeugt jetzt einen Zerfällungskörper der Algebra $\mathfrak{Q}$, folglich enthält $\mathfrak{Q}$ eine Wurzel η der Gleichung $x^2 - sx \pm 1 = 0$. Sie ist eine Einheit und darf wegen der Isomorphie sämtlicher Maximalordnungen von $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{J}$ angenommen werden. η und $\bar{\eta}$ liegen nach obigen Betrachtungen jetzt in den durch α und $\bar{\alpha}$ repräsentierten Restklassen von $\mathfrak{J}$ mod $\mathfrak{p}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Erstens enthält jetzt $\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ keine Einheit von endlicher Ordnung. Denn für eine Einheit $\varepsilon \neq \pm 1$ von endlicher Ordnung ist nach 8 entweder $\varepsilon^2 + 1 = 0$ oder $\varepsilon^2 \pm \varepsilon + 1 = 0$; da die Norm von $\mathfrak{p}$ weder 2 noch 3 ist, so widerspricht dies der Kongruenz (20). Bildet man in (20) die Norm, so folgt aus $p \neq 2$ zweitens, daß $\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ nur Einheiten der Norm $+1$ enthält. Drittens liegt wegen (20) die Einheit -1 nicht in $\mathsf{H}_\mathfrak{p}$. Somit ist $\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ eine Untergruppe von E vom Index $p + 1$, und E enthält eine zu $\mathsf{H}_\mathfrak{p}$ isomorphe Untergruppe $E_\mathfrak{p}$, wobei die Faktorgruppen $E/E_\mathfrak{p}$ und $\mathsf{E}/\mathsf{H}_\mathfrak{p}\mathsf{Z}$ isomorph sind. Der Index von $E_\mathfrak{p}$ in E ist daher gleich $\frac{p+1}{2}$.

Die Gruppe $E_\mathfrak{p}$ ist nun ebenso wie E eine eigentlich diskontinuierliche Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene, der Flächeninhalt $B_\mathfrak{p}$ ihres Diskontinuitätsbereiches ist gleich dem von E, multipliziert mit dem Index $(E : E_\mathfrak{p}) = \frac{p+1}{2}$:

$$B_\mathfrak{p} = B\frac{p+1}{2} = \frac{\pi}{6}\varphi(d)(p+1).$$

Die Klassen von bezüglich $E_\mathfrak{p}$ äquivalenten Punkten bilden wiederum eine geschlossene und orientierbare Fläche, deren Geschlecht jetzt

$$h_\mathfrak{p} = \frac{1}{4\pi}B_\mathfrak{p} + 1 = \frac{\varphi(d)(p+1)}{24} + 1$$

ist.

E_p und H_p werden also durch $2h_p = \frac{\varphi(d)(p+1)}{12} + 2$ Elemente $e_1, \ldots, e_{2h_p}$ bzw. $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2h_p}$ mit der einzigen wesentlichen Relation

$$e_1^{-1} e_2 e_1 e_2^{-1} \ldots e_{2h_p-1}^{-1} e_{2h_p} e_{2h_p-1} e_{2h_p}^{-1} = 1$$

bzw.

$$\varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1} \ldots \varepsilon_{2h_p-1}^{-1} \varepsilon_{2h_p} \varepsilon_{2h_p-1} \varepsilon_{2h_p}^{-1} = 1 \tag{21}$$

erzeugt. Fügt man zu H_p eine geeignete Einheit η hinzu, so erhält man die ganze Gruppe H, weil die Faktorgruppe H/H_p zyklisch ist. Dabei treten noch die Relationen

$$\eta^{2(p+1)} \in \mathsf{H}_p, \quad \eta^{-1} \mathsf{H}_p \eta = \mathsf{H}_p \tag{22}$$

auf.

Diese Überlegungen gelten selbstverständlich auch dann, wenn die Grundzahl der Algebra einen Primteiler der Form $4k+1$ und einen der Form $3k+1$ hat. Der folgende Satz hat also einen größeren Gültigkeitsbereich als der Satz 12.

Satz 13. *Enthält die Grundzahl d einer indefiniten Quaternionenalgebra einen von 2 und 3 verschiedenen Primteiler p, so kann ihre Einheitengruppe durch $2h_p + 1 = \frac{\varphi(d)(p+1)}{12} + 3$ Einheiten $\eta, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2h_p}$ erzeugt werden, wobei* (21) *und* (22) *ein vollständiges Relationensystem darstellen.*

11. Ganz ähnlich wird die Algebra mit der Grundzahl $d = 6$ behandelt; ich gebe für diesen Fall nur das Endergebnis der Untersuchung an. In der Einheitengruppe H werden zunächst diejenigen Einheiten betrachtet, welche modulo der Differente der 1 kongruent sind. Diese bilden eine Untergruppe ohne Einheiten von endlicher Ordnung, welche wiederum als eine hyperbolische Bewegungsgruppe dargestellt wird. Die Diskontinuitätsbereiche dieser Gruppe lassen sich zu geschlossenen Flächen vom Geschlecht 2 zusammenbiegen. Die Gruppe H wird durch den folgenden Satz beschrieben.

Satz 14. *Die Einheitengruppe H der Quaternionenalgebra mit der Grundzahl $d = 6$ besitzt 6 Erzeugende $\eta_1, \eta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$. Die vier letzten erzeugen einen Normalteiler $\mathsf{H}_{2,3}$ von H; zwischen ihnen besteht die einzige wesentliche Relation*

$$\varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1} \varepsilon_3^{-1} \varepsilon_4 \varepsilon_3 \varepsilon_4^{-1} = 1.$$

Nimmt man η_2 zu $\mathsf{H}_{2,3}$ hinzu, so entsteht ein weiterer Normalteiler H_2 von H, es ist

$$\eta_2^2 \in \mathsf{H}_{2,3}, \quad \eta_2^{-1} \mathsf{H}_{2,3} \eta_2 = \mathsf{H}_{2,3}.$$

Schließlich gilt

$$\eta_1^3 \in \mathsf{H}_2, \quad \eta_1^{-1} \mathsf{H}_2 \eta_1 = \mathsf{H}_2.$$

12. Die Gruppe E bzw. E_p kann nach **9** und **5** als Fundamentalgruppe einer geschlossenen und orientierbaren Fläche aufgefaßt werden.

Man überlegt leicht, daß jede solche Fläche, deren Geschlecht gleich 2 oder größer ist, als eine unverzweigte Überlagerung der Brezelfläche gedeutet werden kann. Da einer unverzweigten Überlagerung eine Untergruppe der Fundamentalgruppe der überlagerten Fläche entspricht[19]), treten die Fundamentalgruppen aller Flächen vom Geschlecht $h \geqq 2$ als Untergruppen der Einheitengruppen der Algebren mit den Grundzahlen $d = 6$, 10 und 26 auf, da in diesen Fällen jedesmal $h = 2$ ist.

Ferner sieht man, daß die Einheitengruppen, als abstrakte Gruppen aufgefaßt, keine Charakteristika der Algebren sind, z. B. ist bei $d = 35$ und $d = 39$ jedesmal $h = 3$. Dies ist jedoch auch nicht verwunderlich, da es bei quadratischen Zahlkörpern nicht anders ist. Dort führt jedoch die analytische Zahlentheorie auf eine Verbindung zwischen Grundeinheit und Idealklassenzahl. Hier aber liefert der gleiche Ansatz nur das Geschlecht des Diskontinuitätsbereiches der Einheitengruppe und damit nicht mehr als abstrakte Eigenschaften von dieser. Weitere charakteristische Eigenschaften der Einheitengruppen (insbesondere die konkrete Gestalt der Erzeugenden) wird man daher auf anderem Wege suchen müssen, vermutlich wird man solche in den Seitenlängen und Winkeln derjenigen Diskontinuitätsbereiche finden, die einer kanonischen Aufschneidung von $\mathfrak{R}$ (vgl. 9) entspringen.

[19]) A. a. O.[15]), S. 188—193.

(Eingegangen am 1. 3. 1937.)

Die geometrische Theorie der algebraischen Funktionen für beliebige vollkommene Körper*).

Von

Wei-Liang Chow in Nanking (China).

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit steckt sich das Ziel, die klassische geometrische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen für einen beliebigen vollkommenen Körper zu begründen. Dabei stützen wir uns auf die von van der Waerden geschaffenen rein algebraischen Grundlagen der algebraischen Geometrie, deren charakteristisches Merkmal in methodischer Hinsicht die systematische Anwendung der „relationstreuen Spezialisierung" ist[1]). Wir werden im folgenden sehen, daß man bei den Beweisen der grundlegenden Tatsachen unserer Theorie fast ausschließlich mit der Methode der relationstreuen Spezialisierung und der dieser Methode zugrunde liegenden Resultantentheorie auskommen kann. Dadurch erreicht die Theorie eine gewisse methodische Reinheit, die, ganz abgesehen von der daraus folgenden Verallgemeinerungsfähigkeit, auch an sich von Interesse sein dürfte.

Bekanntlich hat F. K. Schmidt[2]) in einer Arbeit über analytische Zahlentheorie die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen für beliebige vollkommene Körper entwickelt. Seine Theorie soll sich übrigens auch auf unvollkommene Körper übertragen lassen[3]), unter der Voraussetzung, daß die Kurve absolut-irreduzibel ist. Ob die hier entwickelte Theorie sich auch auf unvollkommene Körper übertragen läßt, wird hier nicht beantwortet. Der Inhalt von § 1 bis § 3 läßt sich ohne Schwierigkeiten auch für unvollkommene Körper beweisen, aber der Beweis in § 4 für die Existenz eines singularitätenfreien birationalen Bildes läßt sich nicht ohne weiteres übertragen, weil dabei der sich am Schluß des Paragraphen befindende Hilfssatz gebraucht wird. Derselbe Hilfssatz wird am Anfang von § 6 nochmals gebraucht, ließe sich aber hier durch eine andere Betrachtung ersetzen, wenn wir den Existenzsatz

---

*) Diese Arbeit wurde von der Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig als Dissertation angenommen.

1) [5], [6], [9].

2) [4].

3) [2].

für den betreffenden Körper schon hätten. In der Tat bildet dieser Existenzsatz den Grundstein, worauf unsere Untersuchungen aufgebaut sind; hat man diesen Satz für unvollkommene Körper bewiesen, so kann man auch die ganze Theorie übertragen. Dabei genügt es schon, wenn man einen Existenzsatz im Kleinen hat, d. h. die Existenz eines birationalen Bildes, das in einem beliebigen vorgegebenen Zweige einfach ist.

In § 1 werden die Grundbegriffe und Tatsachen über algebraische Mannigfaltigkeiten zusammengestellt, in § 2 und § 3 werden die Begriffe der Schnittpunktgruppe und der linearen Schar entwickelt. Der in § 4 gegebene Beweis für die Existenz eines singularitätenfreien birationalen Bildes ist eine Verfeinerung des von Albanese[4]) stammenden. Auf Grund dieses Existenzsatzes wird dann in § 5 der Begriff des Punktes birationalinvariant begründet. Dabei wird auch die Potenzreihenentwicklung begründet und die Äquivalenz der „funktionentheoretischen" mit der „algebraisch-geometrischen" Schnittvielfachheit bewiesen. In § 6 sind wir dem Gedankengang von Severi[5]) eng gefolgt, die Beweise sind jedoch etwas vereinfacht. Den in § 7 gegebenen Beweis der Vollständigkeit der adjungierten Scharen haben wir von Severi[6]) übernommen.

§ 1.

Algebraische Mannigfaltigkeiten. Dimension.

Es sei K ein beliebiger Körper. Eine algebraische Mannigfaltigkeit M ist definiert durch ein System Φ_M von endlichvielen homogenen Polynomen oder Formen aus $K[x_0, x_1, \ldots, x_n] = K[x]$

$$f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Das System kann auch leer sein; die dadurch definierte Mannigfaltigkeit heißt der projektive Raum S_n. Ein geordnetes System von $n+1$ nicht sämtlich verschwindenden Elementen $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ aus irgendeinem Oberkörper von K heißt ein Punkt von M, wenn ξ eine gemeinsame Nullstelle aller Formen von Φ_M ist, d. h.

$$f_i(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0.$$

Dabei sind zwei Punkte ξ, ξ' als gleich zu betrachten, wenn es ein Element $\varrho \neq 0$ gibt, so daß $\xi_i = \varrho \xi'_i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$. Eine Mannigfaltigkeit M_1 heißt in einer anderen Mannigfaltigkeit M_2 enthalten, wenn jeder Punkt von M_1 zugleich Punkt von M_2 ist. M_1 heißt dann ein Teil von M_2, und zwar ein echter Teil, wenn M_2 nicht zugleich auch in M_1 enthalten ist. Zwei Mannigfaltigkeiten, die ineinander enthalten sind,

[4]) [1].

[5]) [3], S. 144—157.

[6]) [3], S. 149—152.

werden als gleich betrachtet. Alle durch Formensysteme aus $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ definierten Mannigfaltigkeiten sind offenbar in S_n enthalten.

Der Schnitt von s Mannigfaltigkeiten $M_1, \ldots, M_s$ ist die durch das Vereinigungssystem der Formen von $\Phi_{M_1}, \ldots, \Phi_{M_s}$ definierte Mannigfaltigkeit, die offenbar genau die gemeinsamen Punkte von $M_1, \ldots, M_s$ als ihre Punkte besitzt. Die Summe von $M_1, \ldots, M_s$ ist die durch das System der sämtlichen Produkte von s Formen, je eine aus jedem Φ_{M_i}, definierte Mannigfaltigkeit. Sie hat als ihre Punkte genau die Vereinigungsmenge aller Punkte von $M_1, \ldots, M_s$. Eine Mannigfaltigkeit heißt irreduzibel (in bezug auf K), wenn sie sich nicht als Summe von zwei echten Teilen darstellen läßt, sonst heißt sie reduzibel. Eine reduzible Mannigfaltigkeit läßt sich eindeutig als Summe von endlichvielen irreduziblen darstellen.

Es erweist sich als sehr zweckmäßig, den Mannigfaltigkeitsbegriff in der folgenden Weise zu verschärfen. Die obige Definition werden wir nur für irreduzible Mannigfaltigkeiten gebrauchen. Eine beliebige Mannigfaltigkeit M ist dann definiert als ein System von endlichvielen (nicht notwendig verschiedenen) irreduziblen Mannigfaltigkeiten $M_1, \ldots, M_t$, welche die irreduziblen Bestandteile von M genannt werden[7]). Jede irreduzible Mannigfaltigkeit tritt also in M mit einer gewissen Vielfachheit auf. Kommt eine irreduzible Mannigfaltigkeit in M überhaupt nicht vor, so sagen wir auch, sie tritt in M mit der Vielfachheit Null auf. Eine Mannigfaltigkeit ist also eine Menge von mit Vielfachheiten versehenen irreduziblen Mannigfaltigkeiten. Zwei Mannigfaltigkeiten heißen gleich, wenn sie dieselben irreduziblen Mannigfaltigkeiten mit denselben Vielfachheiten enthalten. Der Begriff der Summe wird in naheliegender Weise übertragen, indem man jeder irreduziblen Mannigfaltigkeit die Summe ihrer Vielfachheiten in den Summanden als ihre Vielfachheit in der Summe zuschreibt. Aber beim Schnittbegriff besteht hier eine Unbestimmtheit, die schon bei den irreduziblen Mannigfaltigkeiten vorkommt. Die obige Definition des Schnittes liefert zwar die irreduziblen Bestandteile, aber nicht die Vielfachheiten. Wir werden uns also vorbehalten, die Vielfachheiten der Schnittbestandteile in jedem Fall geeignet zu definieren[8]).

Ein Punkt $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ heißt t-dimensional (in bezug auf K), wenn, $\xi_i \neq 0$ vorausgesetzt, $K\left(\frac{\xi_0}{\xi_i}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_i}\right)$ vom Transzendenzgrad t über K

---

[7]) Wir unterscheiden hier nicht zwischen einer irreduziblen Mannigfaltigkeit und dem System, das aus dieser irreduziblen Mannigfaltigkeit allein besteht; diese beiden logisch verschiedenen Begriffe werden hier also identifiziert.

[8]) Wir dürfen natürlich immer noch von dem Schnittpunkte zweier beliebiger Mannigfaltigkeiten sprechen, nur bilden diese Schnittpunkte jetzt nicht ohne weiteres eine Mannigfaltigkeit.

ist. Nulldimensionale Punkte werden auch algebraische Punkte genannt. Die Obergrenze r der Dimensionszahlen der Punkte von M heißt die Dimension von M. Wir schreiben dann M_r. Es ist ersichtlich $r \leqq n$, wobei die Gleichheit nur bei dem projektiven Raum S_n erreicht wird. Mannigfaltigkeiten, die keinen Punkt besitzen, geben wir die Dimension -1. Die Summe von endlichvielen r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist offenbar wieder r-dimensional. Eine Mannigfaltigkeit, die sich als Summe von endlichvielen irreduziblen r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten darstellen läßt, heißt rein r-dimensional.

Eine irreduzible nulldimensionale Mannigfaltigkeit besteht aus endlichvielen in bezug auf K konjugierten Punkten. Eine beliebige nulldimensionale Mannigfaltigkeit besteht dann aus endlichvielen mit Vielfachheiten versehenen Punkten. Sie wird auch eine Punktgruppe genannt. Mit jedem Punkt treten also auch alle Konjugierten in einer Punktgruppe auf, und zwar mit derselben Vielfachheit. Umgekehrt ist auch (wenn K vollkommen ist) jede Menge von endlichvielen mit Vielfachheiten versehenen Punkten, in der mit jedem Punkte auch alle in bezug auf K konjugierten mit derselben Vielfachheit auftreten, eine Punktgruppe. Die rein 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten heißen Kurven, die rein $(n-1)$-dimensionalen Hyperflächen. Eine (irreduzible) Hyperfläche läßt sich durch eine einzige (irreduzible) Form darstellen, und umgekehrt definiert eine (irreduzible) Form auch eine (irreduzible) Hyperfläche. Wir werden eine Hyperfläche einfach mit der sie definierenden Form bezeichnen.

Die oben eingeführten Begriffe sind alle in bezug auf den Körper K definiert. Geht man von K zu einem Oberkörper Ω über, so bleiben Mannigfaltigkeiten, Summe, Schnitt in K auch solche in Ω. Die Irreduzibilität ist im allgemeinen nur gegen rein transzendente Erweiterung invariant, die Dimension eines Punktes nur gegen rein algebraische Erweiterung. Die Dimension einer Mannigfaltigkeit ist aber invariant gegenüber beliebiger Erweiterung.

Den nachstehenden Untersuchungen liegt ein vollkommener Körper K zugrunde. Wir werden aber im Laufe unserer Untersuchungen oft Mannigfaltigkeiten heranziehen, die durch Formen mit nicht zu K gehörigen Koeffizienten definiert sind. In solchem Fall ist immer zu verstehen, daß der Körper K dementsprechend durch Adjunktion dieser Koeffizienten zu erweitern ist. Alle weiteren Betrachtungen sind dann in bezug auf diesen erweiterten Körper zu verstehen. Wir werden auch, falls es nicht schon aus dem Zusammenhang klar oder sonst ausdrücklich erwähnt ist, den Bezugskörper oft dadurch andeuten, indem wir uns solcher Ausdrücke wie „K-Mannigfaltigkeit", „K-Hyperfläche", usw. bedienen. In allen anderen Fällen ist immer K der Bezugskörper.

§ 2.

Der Satz von Bezout.

Eine (in bezug auf K) allgemeine Hyperfläche F ist definiert durch eine Form

$$F(u, x) = \sum u_{i_1, \ldots, i_m} x_{i_1} \ldots x_{i_m},$$

deren Koeffizienten u neue nicht in K liegende Unbestimmte sind. F ist also eine $(n-1)$-dimensionale $K(u)$-Mannigfaltigkeit und ist offenbar irreduzibel.

M_r sei eine irreduzible r-dimensionale K-Mannigfaltigkeit. Eine allgemeine Hyperfläche $F(u, x)$ schneidet aus M_r eine irreduzible $(r-1)$-dimensionale $K(u)$-Mannigfaltigkeit[9]) aus, die wir als die Schnittmannigfaltigkeit von $F(u, x)$ mit M_r definieren. Daraus folgt durch r-malige Anwendung, daß r (verschiedene) allgemeine Hyperflächen $F_1(u^{(1)}, x), \ldots, F_r(u^{(r)}, x)$ aus M_r eine irreduzible nulldimensionale $K(u^{(1)}, \ldots, u^{(r)})$-Mannigfaltigkeit ausschneiden, die also aus endlichvielen (allgemeinen) Punkten von M_r besteht. Insbesondere hat ein allgemeiner $(n-r)$-dimensionaler linearer Unterraum S_{n-r}, d. h. eine durch r allgemeine Linearformen $\sum\limits_{j=0}^{n} u_j^{(1)} x_j, \ldots, \sum\limits_{j=0}^{n} u_j^{(r)} x_j$ definierte $K(u^{(1)}, \ldots, u^{(r)})$-Mannigfaltigkeit, mit M_r endlichviele Schnittpunkte. Die Anzahl dieser Punkte heißt der Grad von M_r. Der Grad einer beliebigen Mannigfaltigkeit ist gleich der Summe der Grade ihrer irreduziblen Bestandteile, jeder so oft gezählt, wie seine Vielfachheit angibt. Der Grad einer Punktgruppe wird im folgenden auch Ordnung genannt. Man überzeugt sich leicht, daß der Grad einer irreduziblen Hyperfläche gleich dem Grad der definierenden irreduziblen Form ist. Das gilt also insbesondere für eine allgemeine Hyperfläche $F(u, x)$ als eine irreduzible $K(u)$-Mannigfaltigkeit.

$K(u)$ entstehe aus K durch Adjunktion endlichvieler Unbestimmten u_i. Es sei $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(g)})$ eine beliebige irreduzible $K(u)$-Punktgruppe. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\xi_0^{(1)}$ und folglich auch alle $\xi_0^{(i)}$ nicht gleich Null sind. Normieren wir die Koordinaten dieser Punkte vorläufig so, daß $\xi_0^{(1)} = \xi_0^{(2)} = \ldots = \xi_0^{(g)} = 1$, so bilden die Linearformen $\sum\limits_{j=0}^{n} \xi_j^{(i)} v_j$ ein vollständiges System von konjugierten Linearformen über $K(u)$. Hat $K(\xi)$ den Exponenten e über $K(u)$, dann ist $\prod\limits_{i=1}^{g} (\sum\limits_{j=0}^{n} \xi_j^{(i)} v_j)^{p^e}$ eine Form in v mit Koeffizienten aus $K(u)$[10]). Wir behaupten: $\prod\limits_{i=1}^{g} (\sum\limits_{j=0}^{n} \xi_j^{(i)} v_j)^{p^e}$ *ist in bezug auf* $K(u)$ *irreduzibel.*

---

[9]) [9], S. 141.

[10]) p ist die Charakteristik von K, wenn sie nicht Null ist. Im Fall der Charakteristik Null ist $p = 1$ zu setzen.

Beweis: Da $\prod\limits_{i=1}^{g}(\sum\limits_{j=0}^{n}\xi_j^{(i)}v_j)$ invariant über $K(u)$ ist, so gibt es eine ganze Zahl e', so daß $\prod\limits_{i=1}^{g}(\sum\limits_{j=0}^{n}\xi_j^{(i)}v_j)^{p^{e'}}$ eine irreduzible Form in v mit Koeffizienten aus $K(u)$ ist. Dann gibt es offenbar Elemente $\mu_i^{(j)}$ aus $K(u)$ mit $|\mu_i^{(j)}| \neq 0$, so daß $\eta_j^{(i)} = -\Sigma\mu_j^{(k)}\xi_k^{(i)}$ (bei festem j) für alle i verschieden sind. Die $\eta_j^{(i)}$ sind dann Nullstellen des Polynoms $\prod\limits_{i=1}^{g}(v_0-\eta_j^{(i)})^{p^{e'}}$, also eines Polynoms in $K(u)$ mit g verschiedenen $p^{e'}$-fachen Wurzeln. Das bedeutet, die $\eta_j^{(i)}$ sind höchstens von dem Exponenten e' über $K(u)$. Da $K(\xi) = K(\eta)$ über $K(u)$ den Exponenten e hat, so folgt daraus, daß $e \leqq e'$ ist. Andererseits ist offenbar $e' \leqq e$, mithin ist $e' = e$. Also ist $\prod\limits_{i=1}^{g}(\sum\limits_{j=0}^{n}\xi_j^{(i)}v_j)^{p^e}$ irreduzibel.

Es sei nun $\prod\limits_{i=1}^{g}(\sum\limits_{j=0}^{n}\xi_j^{(i)}v_j)^{p^e} = R(u,v)\,q(u)$, wo $R(u,v)$ ein irreduzibles Element aus $K[u,v]$ ist und $q(u)$ ein Element aus $K(u)$. Normieren wir so, daß $\xi_0^{(i)} = q(u)^{-\frac{1}{g p^e}}$, so fällt in dem Produkt der Faktor $q(u)$ weg, und wir haben

$$R(u,v) = \prod_{i=1}^{g}(\sum_{j=0}^{n}\xi_j^{(i)}v_j)^{p^e}.$$

Die so definierte Normierung der Koordinaten von $\xi^{(i)}$ heißt die normale Normierung und $R(u,v)$ heißt die zugeordnete Form der $K(u)$-Punktgruppe. Die normale Normierung und die zugeordnete Form einer Punktgruppe sind offenbar bis auf einen multiplikativen Faktor aus K eindeutig.

Es sei nun C eine irreduzible K-Kurve. Eine allgemeine Hyperfläche $F(u,x)$ vom Grade m schneidet aus C eine irreduzible $K(u)$-Punktgruppe aus. Die Anzahl der Punkte in dieser Punktgruppe sei mit g_m bezeichnet. g_1 ist also der Grad von C. Wir werden jetzt beweisen: $g_m = m\,g_1$.

Wir betrachten zwei allgemeine Hyperflächen $F_1(u,x)$ bzw. $F_2(v,x)$ der Grade m bzw. k, deren g_m bzw. g_k Schnittpunkte mit C in normaler Normierung mit $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(g_m)}$ bzw. $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(g_k)}$ bezeichnet werden mögen. Haben $K(\xi)$ bzw. $K(\eta)$[11]) die Exponenten e_m bzw e_k über $K(u)$ bzw. $K(v)$, dann läßt sich leicht zeigen, daß

$$G_1(u,v) = \prod_{i=1}^{g_k} F_1(u,\eta^{(i)})^{p^{e_k}}$$

---

[11]) Es soll hier ein für allemal festgesetzt werden, daß $K(\xi)$ immer den Körper bedeuten soll, der aus K durch Adjunktion der Verhältnisse der Koordinaten der Punkte $\xi^{(i)}$, nicht der Koordinaten selbst, entstanden ist.

und

$$G_2(u,v) = \prod_{i=1}^{g_m} F_2(v, \xi^{(i)})^{p^{e_m}}$$

irreduzible Elemente aus $K(u,v)$ sind[12]).

Es ist nun $G_1(u,v) = G_2(u,v)$. Denn F_1, F_2, C haben dann und nur dann einen gemeinsamen Punkt, wenn $F_1(u,x)$ bzw. $F_2(v,x)$ für wenigstens einen der g_k bzw. g_m Schnittpunkte von $F_2(v,x)$ bzw. $F_1(u,x)$ mit C verschwinden, d. h. wenn $G_1(u,v) = 0$ bzw. $G_2(u,v) = 0$. Das bedeutet, $G_1(u,v)$ verschwindet dann und nur dann, wenn $G_2(u,v)$ verschwindet. Da $G_1(u,v)$ und $G_2(u,v)$ beide irreduzibel sind, so folgt daraus nach dem Hilbertschen Nullstellensatz, daß sie gleich sind. Die somit als gleich bewiesenen Formen werden wir jetzt mit $G(u,v)$ bezeichnen.

Alle e sind gleich Null. Denn setzt man $k = m$, so ist $e_k = e_m$, und die u, v werden in $G(u,v)$ nur in p^{e_m}-Potenzen auftreten. Wäre $e_m \neq 0$, so würde $G(u,v)$ reduzibel sein (da K vollkommen ist), was gegen die Definition von $G(u,v)$ ist. Also sind alle e gleich Null, und wir haben

$$G(u,v) = \prod_{i=1}^{g_k} F_1(u, \eta^{(i)}) = \prod_{i=1}^{g_m} F_2(v, \xi^{(i)}).$$

Spezialisieren wir jetzt $F_1(u^*, x) = \prod_{j=1}^{m} L_j(w^{(j)}, x)$, wo die L_j allgemeine Hyperebenen oder Linearformen sind, und bezeichnen wir mit $\Theta^{(j,1)}, \ldots, \Theta^{(j,g_1)}$ die g_1 Schnittpunkte von L_j mit C, dann haben wir

$$G(u^*,v) = \prod_{i=1}^{g_k} F_1(u^*, \eta^{(i)}) = \prod_{i=1}^{g_k} \prod_{j=1}^{m} L_j(w^{(j)}, \eta^{(i)})$$
$$= \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{g_k} L_j(w^{(j)}, \eta^{(i)}) = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{g_1} F_2(v, \Theta^{(j,i)}).$$

Vergleichen wir nun die Grade der rechten und linken Seiten in v, so haben wir $g_m = m g_1$.

Damit ist die Anzahl der Schnittpunkte einer allgemeinen Hyperfläche $F_1(u,x)$ mit der Kurve C bestimmt. Wir wollen nun untersuchen, was mit den Schnittpunkten geschieht, wenn man die allgemeine Hyperfläche spezialisiert, d. h. wenn man die Unbestimmten u durch irgendwelche Elemente aus einem Oberkörper von K ersetzt. Die $m g_1$ Schnittpunkte von $F_1(u,x)$ mit C lassen sich, wenn wir für F_2 eine Linearform $L(v,x) = \Sigma v_j x_j$ nehmen, durch Faktorzerlegung von $G(u,v)$ nach v

---

[12]) Daß $G_1(u,v)$ bzw. $G_2(u,v)$ in u bzw. v irreduzible Elemente aus $K[u,v]$ sind, ist nach dem Vorangegangenen ziemlich klar. Daß $G_1(u,v)$ bzw. $G_2(u,v)$ auch in v bzw. u irreduzibel sind, sieht man ein, wenn man die Hyperflächen $F_1(u,x)$ bzw. $F_2(v,x)$ in m bzw. k allgemeine Hyperebenen zerfallen läßt.

gewinnen:

$$G(u,v) = \prod_{i=1}^{mg_1} (v_0 \xi_0^{(i)} + \ldots + v_n \xi_n^{(i)}) = \prod_{i=1}^{mg_1} L(v, \xi^{(i)}).$$

Spezialisiert man nun $u \to \mu$, so geht $G(u,v)$ in $G(\mu,v)$ über. Ist identisch $G(\mu,v) = 0$, so ist $\prod_{i=1}^{g_1} F_1(\mu,\eta^{(i)}) = 0$, also etwa $F_1(\mu,\eta^{(i)}) = 0$. Da $\eta^{(i)}$ ein allgemeiner Punkt von C ist, so bedeutet dies, daß $F_1(\mu,x)$ die Kurve C enthält. Nehmen wir also an, daß $F_1(\mu,x)$ die Kurve C nicht enthält und daher mit C nur endlichviele Schnittpunkte hat, so verschwindet $G(\mu,v)$ nicht identisch.

Durch Faktorenzerlegung nach v, [13])

$$G(\mu,v) = \prod_{i=1}^{mg_1} L(v,\alpha^{(i)}) = \prod_{i=1}^{mg_1} (v_0 \alpha_0^{(i)} + \ldots + v_n \alpha_n^{(i)}),$$

erhalten wir mg_1 (nicht notwendig verschiedene) Punkte $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(mg_1)}$, die eine $K(\mu)$-Punktgruppe $P(\mu)$ der Ordnung mg_1 bilden. Da $P(\mu)$ eine relationstreue Spezialisierung von $P(u) = (\xi^{(i)}, \ldots, \xi^{(mg_1)})$ für die Spezialisierung $u \to \mu$ ist, so gehört jeder in $P(\mu)$ enthaltene Punkt zu den Schnittpunkten von $F_1(\mu,x)$ mit C. Umgekehrt ist auch jeder solche Schnittpunkt in $P(\mu)$ enthalten. Denn, sei β ein Schnittpunkt von $F_1(\mu,x)$ mit C, so ist β eine relationstreue Spezialisierung von $\xi^{(1)}$. Ist $F_1(\mu',x)$ eine allgemeine durch β gehende Hyperfläche, dann ist $(u,\xi^{(1)}) \to (\mu',\beta)$ eine relationstreue Spezialisierung. Da nun $(\mu',\beta) \to (\mu,\beta)$ offenbar eine relationstreue Spezialisierung ist, so ist folglich $(u,\xi^{(1)}) \to (\mu,\beta)$ eine relationstreue Spezialisierung. Daraus folgt wegen der Eindeutigkeit der relationstreuen Spezialisierung, daß β in $P(\mu)$ enthalten ist.

Betrachten wir eine zerfallende Form $F = F_1^{r_1} \ldots F_t^{r_t}$ vom Grade m als eine reduzible Hyperfläche, in der die irreduziblen Hyperflächen F_i mit den Vielfachheiten r_i vorkommen, so können wir das bisher in diesem Paragraphen bewiesene in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Der Satz von Bezout. *Jede Hyperfläche $F(\mu,x)$ vom Grade m, die eine irreduzible Kurve C vom Grade g nicht enthält, schneidet aus der Kurve C eine $K(\mu)$-Punktgruppe $P(\mu)$ der Ordnung mg aus. Die Punkte von $P(\mu)$ lassen sich durch Faktorenzerlegung einer Form $G(\mu,v)$ nach v erhalten, wobei die Form $G(u,v)$ nur von C und m abhängt. Ist $F(\mu,x)$ eine allgemeine Hyperfläche, so besteht $P(\mu)$ aus mg verschiedenen Punkten.*

---

[13]) Daß $G(\mu,v)$ in Linearfaktoren zerfällt, folgt daraus, daß $G(u,v)$ in Linearfaktoren zerfällt. Denn die Eigenschaft einer Form, in Linearfaktoren zu zerfallen, läßt sich bekanntlich durch das Verschwinden eines Formensystems in den Koeffizienten ausdrücken. Da nun das Formensystem schon für unbestimmte u verschwindet, so muß es natürlich auch für die speziellen Werte μ verschwinden.

§ 3.

Lineare Scharen und rationale Abbildungen.

Ein wichtiger Spezialfall der vorstehenden Begriffsbildungen entsteht, wenn man $u_i \to \Sigma a_j^{(i)} \lambda_j$ spezialisiert, wobei die $a_j^{(i)}$ Elemente aus K und die λ_j nicht in K liegende Unbestimmte sind. Die dadurch aus der allgemeinen Hyperfläche $F_1(u, x)$ entstandene spezialisierte Hyperfläche

$$F_1(\Sigma a \lambda, x) = \lambda_0 F_0(x) + \ldots + \lambda_s F_s(x) = F(\lambda, x)$$

nennen wir die allgemeine Hyperfläche des durch $F_0(x), \ldots, F_s(x)$ erzeugten s-dimensionalen Linearsystems Φ. Wir können annehmen, daß keine Hyperfläche $F(\mu, x)$ des Systems Φ, wo μ Elemente aus irgendeinem Oberkörper von K sind, die Kurve C enthält. Denn, wenn etwa q linear unabhängige Hyperflächen von Φ die Kurve C enthalten, so läßt sich in bekannter Weise ein lineares Teilsystem der Dimension $s - q$ aus Φ herausgreifen, welches dieselben Punktgruppen ausschneidet wie Φ und in welchem keine Hyperfläche die Kurve C enthält. Da es im folgenden nur auf diese Punktgruppen ankommt, so kann man das ganze System durch dieses Teilsystem ersetzen.

Die von $F(\lambda, x)$ auf der Kurve C ausgeschnittene $K(\lambda)$-Punktgruppe $P(\lambda)$ läßt sich nach dem Satz von Bezout durch die Faktorenzerlegung von $G(\Sigma a \lambda, v)$ nach v gewinnen:

$$G(\Sigma a \lambda, v) = \prod_{i=1}^{g_1} (\sum_j \lambda_j F_j(\eta^{(i)})) = \prod_{i=1}^{mg} (\sum_j v_j \alpha_j^{(i)}) = T(\lambda, v).$$

$T(\lambda, v)$ möge nun in einen von λ unabhängigen Teil $T(v)$ und einen von λ abhängigen Teil $T^*(\lambda, v)$ zerfallen. Dementsprechend zerfällt die Punktgruppe $P(\lambda)$ in eine feste Gruppe P und eine von λ abhängige Gruppe $P^*(\lambda)$. Die Punkte $\alpha^{(i)}$ seien so numeriert, daß $T^*(\lambda, v) = \prod_{i=1}^{t} (\sum_j v_j \alpha_j^{(i)})$, also $P^*(\lambda) = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(t)})$ ist. Die Punkte von P sind die festen Punkte, die Punkte von $P^*(\lambda)$ die allgemeinen Punkte der durch das System Φ auf der Kurve C erzeugten s-dimensionalen linearen K-Schar von Punktgruppen. Bis auf weiteres werden wir immer die feste Gruppe P aus der Schar weglassen. Dann ist $P^*(\lambda)$ die allgemeine Punktgruppe der Schar, und jede spezielle Punktgruppe für die Spezialisierung $\lambda \to \mu$ läßt sich durch Faktorenzerlegung von $T^*(\mu, v)$ nach v erhalten. Die Form $T^*(\lambda, v)$ wird die zugeordnete Form der Schar genannt. Die Ordnung t von $P^*(\lambda)$ heißt auch die Ordnung der Schar. Die Schar selbst bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_t^s = \langle P^*(\lambda) \rangle$. Es ist $s \leqq t$. Denn, wäre $s > t$, so würde es eine Hyperfläche von Φ geben, die durch wenigstens $t + 1$ allgemeine Punkte von C ginge. Das ist aber unmög-

lich, da die allgemeine Hyperfläche von Φ nur durch t allgemeine Punkte von C geht und keine Hyperfläche von Φ die Kurve C enthält.

Die Form $T^*(\lambda, v)$ ist irreduzibel oder, was offenbar damit gleichbedeutend ist, die Form $T(\lambda, v) = T(v)\, T^*(\lambda, v)$ ist in λ irreduzibel (in bezug auf $K(v)$).

Beweis: Es ist $T(\lambda, v) = \prod_{i=1}^{g} (\sum_j \lambda_j F_j(\eta^{(i)}))$. Da die $\eta^{(i)}$ zueinander konjugiert sind, folgt daraus, daß die Form $T(\lambda, v)$, wenn sie in λ reduzibel wäre, eine Potenz einer in λ irreduziblen Form sein müßte. Das bedeutet aber, daß es wenigstens zwei Punkte, etwa $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}$, gäbe, so daß $\sum \lambda_j F_j(\eta^{(1)}) = \sum \lambda_j F_j(\eta^{(2)})$. Daraus folgt, daß eine durch $\eta^{(1)}$ gehende Hyperfläche von Φ, z. B. etwa $H = F_2(\eta^{(1)}) F_1(x) - F_1(\eta^{(1)}) F_2(x)$, auch durch $\eta^{(2)}$ gehen müßte. Das ist aber absurd, denn die endlichvielen weiteren Schnittpunkte von H mit C sind schon durch den Punkt $\eta^{(1)}$ bestimmt, und eine allgemeine durch $\eta^{(1)}$ gehende Hyperebene kann offenbar keinen von diesen endlichvielen Punkten unter ihren weiteren Schnittpunkten mit C haben.

Aus der Irreduzibilität von $T^*(\lambda, v)$ folgt, daß $T^*(\lambda, v)$ die zugeordnete Form der irreduziblen $K(\lambda)$-Punktgruppe $P^*(\lambda)$ ist. Damit ist bewiesen:

Der (verschärfte) Satz von Bertini. Die allgemeinen Punkte $\alpha^{(i)} = (\alpha_0^{(i)}, \alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)})$ einer linearen Schar $\langle P^*(\lambda)\rangle$ auf einer irreduziblen Kurve haben die Vielfachheit p^e, wo e der Exponent der (zueinander konjugierten) Körper $K(\alpha^{(i)})$[11] über $K(\lambda)$ ist. Dabei ist p gleich der Charakteristik von K, falls sie nicht Null ist, gleich Eins, falls sie Null ist.

Eine rationale Abbildung der Kurve C ist gegeben durch die für die allgemeinen Punkte von C gültigen Formeln:

$$y_0 : y_0 : \ldots : y_t = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \ldots : \varphi_t(x).$$

Die Bildkurve ist die durch den Punkt $\varphi_i(\xi)$ in S_t definierte Kurve, wobei ξ einen allgemeinen Punkt von C bedeutet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir auch hier annehmen, daß keine Hyperfläche des Linearsystems $\sum \lambda_i \varphi_i(x)$ die Kurve C enthält, was damit gleichbedeutend ist, daß die Bildkurve in keinem echten linearen Unterraum von S_t liegt, also zu S_t gehört. Die Abbildung heißt birational, wenn die ξ_i auch von den $\varphi_i(\xi)$ rational abhängig sind, d. h. wenn es Formen $\psi_0(y), \psi_1(y), \ldots, \psi_n(y)$ gibt, so daß

$$\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n = \psi_0(\varphi(\xi)) : \psi_1(\varphi(\xi)) : \ldots : \psi_n(\varphi(\xi)).$$

Satz. *Die rationale Abbildung der Kurve C*

$$y_0 : y_1 : \ldots : y_t = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \ldots : \varphi_t(x)$$

ist (dann und nur dann) birational, wenn die durch $\Sigma \lambda_i \varphi_i$ erzeugte lineare Schar $\langle P^*(\lambda)\rangle$ auf C einfach ist, d. h. wenn alle durch einen allgemeinen Punkt von C gehenden Punktgruppen von $\langle P^*(\lambda)\rangle$ keinen weiteren Punkt gemeinsam haben.

Beweis: Die Abbildung ist für allgemeine Punkte eineindeutig. Denn, gäbe es zwei allgemeine Punkte ξ, ξ' von C mit demselben Bildpunkt, also

$$\varphi_0(\xi):\varphi_1(\xi):\ldots:\varphi_t(\xi) = \varphi_0(\xi'):\varphi_1(\xi'):\ldots:\varphi_t(\xi'),$$

so würden alle durch ξ gehenden Hyperflächen des Systems $\Sigma \lambda_j \varphi_j$ auch durch ξ' gehen. Da ξ' ein allgemeiner Punkt ist, so würde das bedeuten, daß alle durch ξ gehenden Punktgruppen von $\langle P(\lambda)\rangle$ auch durch ξ' gehen müßten, gegen die Voraussetzung, daß $\langle P(\lambda)\rangle$ einfach ist. Also ist der Punkt ξ durch $\varphi_i(\xi)$ eindeutig bestimmt. Das bedeutet, wenn $\xi_0 = 1$ normiert ist, daß $\xi_1, \ldots, \xi_n$ über $K(\varphi(\xi))$ keine verschiedenen Konjugierten besitzen. Da $\langle P(\lambda)\rangle$ einfach ist, sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ separabel über $K(\lambda)$. Daraus folgt wegen

$$K(\xi, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \supset K(\varphi(\xi), \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \supset K(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = K(\lambda),$$

$$\left(\lambda_0 = \frac{\sum\limits_1^t \lambda_i \varphi_i(\xi)}{\varphi_0(\xi)}\right),$$

daß $K(\xi, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ über $K(\varphi(\xi), \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, mithin auch $K(\xi)$ über $K(\varphi(\xi))$ separabel ist. Da außerdem $\xi_1, \ldots, \xi_n$ über $K(\varphi(\xi))$ keine verschiedenen Konjugierten besitzen, so ist $K(\xi) = K(\varphi(\xi))$.

Satz (Die Invarianz der linearen Schar). *Die Kurve C sei durch die birationale Abbildung*

$$y_0 : y_1 : \ldots : y_s = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \ldots : \varphi_s(x),$$
$$x_0 : x_1 : \ldots : x_n = \psi_0(y) : \psi_1(y) : \ldots : \psi_n(y)$$

in die Kurve $\overline{C}$ in S_s abgebildet. $P^*(\lambda) = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(t)})$ sei die allgemeine Punktgruppe der von $F(\lambda, x)$ auf C erzeugten linearen Schar, $\overline{P}^*(\lambda)$ die allgemeine Punktgruppe der von $F(\lambda, \psi(y))$ auf $\overline{C}$ erzeugten. Dann ist $\overline{P}^*(\lambda) = (\varphi(\alpha^{(1)}), \ldots, \varphi(\alpha^{(t)}))$.

Beweis: Sind $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(h)}$ die verschiedenen allgemeinen Schnittpunkte von $F(\lambda, x)$ mit C, so folgt aus der Eineindeutigkeit der birationalen Abbildung für allgemeine Punkte, daß $\varphi(\alpha^{(1)}), \ldots, \varphi(\alpha^{(h)})$ genau die verschiedenen allgemeinen Schnittpunkte von $F(\lambda, \psi(y))$ mit $\overline{C}$ sind. Also enthält $\overline{P}^*(\lambda)$ die Punkte $\varphi(\alpha^{(1)}), \ldots, \varphi(\alpha^{(h)})$ und keinen anderen. Da nun $K(\alpha^{(i)}) = K(\varphi(\alpha^{(i)}))$ ist, so folgt aus dem (verschärften) Satz von Bertini, daß $\varphi(\alpha^{(i)})$ in $\overline{P}^*(\lambda)$ dieselbe Vielfachheit haben wie $\alpha^{(i)}$ in $P^*(\lambda)$. Also ist $\overline{P}^*(\lambda) = (\varphi(\alpha^{(1)}), \ldots, \varphi(\alpha^{(t)}))$.

§ 4.

Die Auflösung der Singularitäten.

Bisher haben wir nur die allgemeinen Punkte der Kurve C betrachtet. Jetzt wenden wir uns den speziellen oder nulldimensionalen Punkten zu. Die Verhältnisse sind hier wesentlich komplizierter, da die speziellen Punkte, im Gegensatz zu den allgemeinen, nicht mehr alle miteinander algebraisch äquivalent sind. Dabei ergibt sich als besonders wichtig für algebraisch-geometrische Untersuchungen der Begriff der Singularitäten, den wir jetzt definieren werden. Ein Punkt $p = (p_0, \ldots, p_n)$ heißt ein k-facher Punkt der Kurve C, wenn eine allgemeine durch p gehende Hyperebene — d. h. eine Hyperebene $\Sigma v_i x_i$, wo die v_i Koordinaten eines allgemeinen Punktes der Hyperebene $\Sigma p_i x_i$ sind — mit C einen k-fachen Schnittpunkt in p hat. Punkte, die nicht einfach sind, heißen die singulären Punkte, deren Gesamtheit die Singularitäten der Kurve C genannt wird. Die allgemeinen Punkte einer irreduziblen Kurve sind offenbar einfach, dagegen zeigen schon einfache Beispiele, daß unter den speziellen Punkten sehr wohl Singularitäten auftreten können.

Es ist eine komplizierte Sache, die Struktur aller möglichen Singularitäten einer irreduziblen Kurve zu untersuchen. Glücklicherweise ist dies für unseren Zweck nicht nötig. Wir werden nämlich zeigen, daß es möglich ist, jede irreduzible Kurve durch eine birationale Abbildung in eine singularitätenfreie Kurve zu transformieren. Dazu seien einige Bemerkungen über rationale Abbildungen vorausgeschickt. Wir haben bisher die rationalen Abbildungen nur für allgemeine Punkte definiert, und zwar durch die Formeln:

$$y_0 : y_1 : \ldots : y_s = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \ldots : \varphi_s(x).$$

Da jeder Punkt einer irreduziblen Kurve eine relationstreue Spezialisierung eines allgemeinen Punktes ist, so liegt es nahe, die rationale Abbildung dadurch zu ergänzen, daß man einen Punkt δ in S_s als Bildpunkt eines Punktes γ der Kurve C betrachtet, wenn γ, δ eine relationstreue Spezialisierung[14]) von $\xi, \varphi(\xi)$ ist (wobei ξ ein allgemeiner Punkt von C ist). Ein so definierter Bildpunkt δ gehört offenbar zu der durch $\varphi(\xi)$ definierten Bildkurve $\overline{C}$, da δ auch insbesondere eine relationstreue Spezialisierung von $\varphi(\xi)$ sein muß. Jeder Punkt von C besitzt wenigstens einen Bildpunkt, und umgekehrt ist jeder Punkt von $\overline{C}$ auch Bild von wenigstens einem Punkte von C. Das folgt daraus, daß jede partielle relationstreue Spezialisierung sich immer zu einer vollständigen ergänzen läßt[15]).

---

[14]) [5], S. 756.
[15]) [8], S. 131.

Die Abbildung sei nun birational. Wir betrachten die durch das System $\Sigma \lambda_i \varphi_i$ auf der Kurve C erzeugte lineare Schar $\langle P(\lambda)\rangle$. Die Bildpunktgruppe $\overline{P}(\lambda)$ von $P(\lambda)$ ist die von einer allgemeinen Hyperebene $\Sigma \lambda_i y_i$ auf der Kurve $\overline{C}$ ausgeschnittene Punktgruppe. Daraus folgt: Der Grad $\overline{g}$ der Bildkurve ist gleich der Ordnung von $\langle P(\lambda)\rangle$. Ist δ ein k-facher Punkt von $\overline{C}$ und $\Sigma \mu_i y_i$ eine allgemeine durch δ gehende Hyperebene, wo etwa $\mu_0 = -(\delta_1 \lambda_1' + \ldots + \delta_s \lambda_s')$, $\mu_1 = \delta_0 \lambda_1', \ldots, \mu_s = \delta_0 \lambda_s'$, so hat $\overline{P}(\mu)$ außer dem k-fachen Punkte δ noch $\overline{g} - k$ allgemeine Punkte. Dann hat $P(\mu)$ auch $\overline{g} - k$ allgemeine Punkte, die jenen $\overline{g} - k$ Punkten von $\overline{P}(\mu)$ entsprechen[16]), und einige weitere Punkte der gesamten Vielfachheit k, die die in δ abgebildeten Punkte von C sind. Alle in δ abgebildeten Punkte von C sind aber schon dadurch erhalten. Denn, sei γ, δ eine relationstreue Spezialisierung von $\xi, \varphi(\xi) = \overline{\xi}$. Es gelten für $\xi, \varphi(\xi)$ die Relationen: Setzt man $\lambda_0 = -(\overline{\xi}_1 \lambda_1' + \ldots + \overline{\xi}_s \lambda_s')$, $\lambda_1 = \overline{\xi}_0 \lambda_1', \ldots, \lambda_s = \overline{\xi}_0 \lambda_s'$, $v_0 = -(\xi_1 v_1' + \ldots + \xi_n v_n')$, $v_1 = \xi_0 v_1', \ldots, v_n = \xi_0 v_n'$, dann verschwindet $T(\lambda, v)$ (die zugeordnete Form von $\langle P(\lambda)\rangle$) identisch in λ' und v'. Diese Relationen müssen auch für γ, δ gelten, also: Setzt man $\lambda_0 = -(\delta_1 \lambda_1' + \ldots + \delta_s \lambda_s')$, $\lambda_1 = \delta_0 \lambda_1', \ldots, \lambda_s = \delta_0 \lambda_s'$, $v_0 = -(\gamma_1 v_1' + \ldots + \gamma_n v_n')$, $v_1 = \gamma_0 v_1', \ldots, v_n = \gamma_0 v_n'$, dann verschwindet $T(\lambda, v)$ identisch. Das bedeutet, daß $\Sigma v_i \gamma_i$ ein Linearfaktor von $T(\mu, v)$ ist. Folglich ist γ in $P(\mu)$ enthalten. Das Bild von δ (bei der inversen Abbildung) hat also höchstens k Punkte; daraus folgt für $k = 1$, daß bei einer birationalen Abbildung ein einfacher Punkt nur einen Bildpunkt besitzt. Wir haben demzufolge: *Eine birationale Abbildung zwischen zwei singularitätenfreien Kurven ist (für alle Punkte) eineindeutig.*

Läßt man nun die k festen Punkte von $P(\mu)$ weg, so bilden die übrigen $\overline{g} - k$ (allgemeinen) Punkte eine Punktgruppe $Q(\lambda')$, die eine in $\langle P(\lambda)\rangle$ enthaltene lineare $K(\delta)$-Schar $\langle Q(\lambda')\rangle$ der Dimension $s - 1$ und der Ordnung $\overline{g} - k$ definiert. Daraus folgt: Enthält eine lineare Schar $\langle P(\lambda)\rangle$ der Dimension $s \geqq 2$ und der Ordnung g keine Teilschar (in bezug auf einen Oberkörper von K) der Dimension $s - 1$ und der Ordnung $< g - 1$, so ist die durch die entsprechende birationale[17]) Abbildung transformierte Kurve C singularitätenfrei. Durch den Nachweis der Existenz einer solchen Schar werden wir den Beweis des folgenden Satzes erbringen.

[16]) Denn $P(\mu)$ bzw. $\overline{P}(\mu)$ entstehen aus $P(\lambda)$ bzw. $\overline{P}(\lambda)$ durch relationstreue Spezialisierung für die Spezialisierung $\lambda \to \mu$. Daraus folgt, daß $(P(\mu), \overline{P}(\mu))$ eine relationstreue Spezialisierung von $(P(\lambda), \overline{P}(\lambda)) = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(f)}, \varphi(\alpha^{(1)}), \ldots, \varphi(\alpha^{(f)}))$ ist. Daraus folgt, daß jeder Punkt von $P(\mu)$ wenigstens einen Bildpunkt in $\overline{P}(\mu)$ besitzt und umgekehrt.

[17]) Eine solche Schar $\langle P(\lambda)\rangle$ ist offenbar einfach.

Satz. *Jede irreduzible Kurve C läßt sich durch eine birationale Abbildung in eine singularitätenfreie Kurve transformieren.*

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß wir uns auf ebene Kurven beschränken können. Denn jede irreduzible Kurve C läßt sich auf eine ebene Kurve birational abbilden. Ist nämlich $\xi = (\xi_0 = 1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein allgemeiner Punkt von C, dann ist $K(\xi)$ vom Transzendenzgrad 1 über K, also eine algebraische Erweiterung über $K(y_1)$, wo y_1 ein von K unabhängiges Element aus $K(\xi)$ ist. Da K vollkommen ist, so hat $K(y_1)$ den Grad p über dem Körper $[K(y_1)]^p = K(y_1^p)$, der aus den p-ten Potenzen der Elemente von $K(y_1)$ besteht. Daraus folgt nach Steinitz[18]), daß $K(\xi)$ eine einfache Erweiterung über $K(y_1)$ ist, d. h. $K(\xi) = K(y_1, y_2)$, wo y_2 algebraisch von y_1 abhängt. Setzt man nun $\eta_1 = \eta_0 y_1$, $\eta_2 = \eta_0 y_2$, dann definiert $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2)$ eine ebene Kurve, die, wie leicht einzusehen ist, ein birationales Bild von C ist.

C sei also eine ebene Kurve vom Grad m. Das System aller Kurven vom Grade $m-1$ schneidet auf C eine lineare Schar $\mathfrak{G}_{n_1}^{r_1}$ der Ordnung $n_1 = m(m-1)$ und der Dimension $r_1 = \frac{(m-1)(m+2)}{2}$ aus. Enthält $\mathfrak{G}_{n_1}^{r_1}$ keine Teilschar der Dimension $r_1 - 1$ und der Ordnung $\leqq n_1 - 2$, so sind wir schon am Ziel; sonst sei $\mathfrak{G}_{n_2}^{r_2}$ eine Ω_1-Teilschar (wo Ω_1 eine algebraische Erweiterung von K ist) der Dimension $r_2 = r_1 - 1$ und der Ordnung $n_2 \leqq n_1 - 2$. Stimmt $\mathfrak{G}_{n_2}^{r_2}$ mit ihren Konjugierten (relativ zu K) überein, so ist sie eine K-Schar; sonst seien $\mathfrak{G}_{n_2}^{(1)r_2}, \ldots, \mathfrak{G}_{n_2}^{(s)r_2}$ die voneinander verschiedenen konjugierten Scharen. Die Schar $\mathfrak{G}_{n_3}^{r_3} = \mathfrak{G}_{n_2}^{r_2} \frown \mathfrak{G}_{n_2}^{(1)r_2}$ hat dann die Dimension $r_3 = r_2 - 1$ und die Ordnung $n_3 \leqq n_2 - 2$.[19]) Die Schar $\mathfrak{G}_{n_4}^{r_4} = \mathfrak{G}_{n_3}^{r_3} \frown \mathfrak{G}_{n_2}^{(2)r_2}$ hat dann die Dimension $r_4 \geqq r_3 - 1$ und die Ordnung $n_4 \leqq n_3 - 2$ usw. Schließlich hat die Schar

$$\mathfrak{G}_{n_{s+2}}^{r_{s+2}} = \mathfrak{G}_{n_{s+1}}^{r_{s+1}} \frown \mathfrak{G}_{n_2}^{(s)r_2} = \mathfrak{G}_{n_2}^{r_2} \frown \mathfrak{G}_{n_2}^{(1)r_2} \frown \ldots \frown \mathfrak{G}_{n_2}^{(s)r_2}$$

die Dimension $r_{s+2} \geqq r_{s+1} - 1$ und die Ordnung $n_{s+2} \leqq n_{s+1} - 2$. Nun stimmt $\mathfrak{G}_{n_{s+2}}^{r_{s+2}}$ offenbar mit ihren Konjugierten überein und ist daher eine K-Schar. Enthält sie keine Teilschar der Dimension $r_{s+2} - 1$ und der Ordnung $\leqq n_{s+2} - 2$, dann sind wir am Ziel; sonst sei $\mathfrak{G}_{n_{s+3}}^{r_{s+3}}$ eine Ω_2 Teilschar der Dimension $r_{s+3} = r_{s+2} - 1$ und der Ordnung $n_{s+3} \leqq n_{s+2} - 2$. So setzen wir das Verfahren fort. Nach dem i-ten Schritte haben wir dann eine Schar $\mathfrak{G}_{n_i}^{r_i}$ der Dimension $r_i \geqq r_1 - i + 1$ und der Ordnung $n_i \leqq n_1 - 2(i-1)$. Da aber $r_i \leqq n_i$ sein muß, so haben wir $r_1 - i + 1 \leqq n_1 - 2(i-1)$, und daraus

[18]) Journ. f. Math. **137** (1910), S. 244.

[19]) Denn die weggelassenen festen Ω_1-Punktgruppen von $\mathfrak{G}_{n_2}^{r_2}$ und $\mathfrak{G}_{n_2}^{(1)r_2}$ haben keinen gemeinsamen Punkt, sonst würde $\mathfrak{G}_{n_2}^{r_2} = \mathfrak{G}_{n_2}^{(1)r_2}$ sein.

$$i \leqq \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1.$$

Also muß das Verfahren nach höchstens $k = \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ Schritten zu Ende kommen. Da $n_i \geqq n_k \geqq 2(m-1) \geqq 2$ (für $i \leqq k$) ist, so liefert der letzte Schritt eine lineare K-Schar mit den erwünschten Eigenschaften.

Bei dem Beweis haben wir den folgenden Hilfssatz benutzt, den wir auch später gebrauchen werden:

Ω sei algebraisch über K. Stimmt eine lineare Ω-Schar $\mathfrak{S}$ mit ihren Konjugierten überein, so ist sie eine lineare K-Schar.

Ist nämlich $\mathfrak{S}$ durch das System

$$\Sigma \lambda_i F_i(x) = \Sigma \lambda_i f_{i0}(x) + \omega \Sigma \lambda_i f_{i1}(x) + \ldots + \omega^s \Sigma \lambda_i f_{is}(x)$$

erzeugt, wo $f_{ij}(x)$ Formen aus $K[x]$ sind, so gehören auch

$$\Sigma \lambda_i f_{i0}(x) + \omega_j \Sigma \lambda_i f_{i1}(x) + \ldots + \omega_j^s \Sigma \lambda_i f_{is}(x),$$

wo $\omega_1, \ldots, \omega_s$ die Konjugierten von ω sind, zu dem System. Da K vollkommen ist, ist $|\omega_j^i| \neq 0$. Daraus folgt, daß die $\Sigma \lambda_i f_{ij}(x)$, daher auch die $f_{ij}(x)$ zu dem System gehören. Das System läßt sich also durch $f_{ij}(x)$ erzeugen, und $\mathfrak{S}$ ist folglich eine lineare K-Schar.

§ 5.

Punktgruppen. Äquivalenz. Vollscharen.

Die Existenz eines singularitätenfreien birationalen Bildes für eine irreduzible Kurve ermöglicht es, eine Geometrie auf der Kurve zu entwickeln. Wir betrachten nämlich alle miteinander birational äquivalenten (d. h. aufeinander birational abbildbaren) Kurven als die verschiedenen projektiven Darstellungen („projektiven Modelle") einer einzigen im abstrakten Sinne zu verstehenden Kurve C. Als Eigenschaften der Kurve C sollen dann nur die birational invarianten gelten. Unter den bisher eingeführten Begriffen ist der einer linearen Schar schon als birational invariant nachgewiesen. Dagegen ist der Begriff eines Punktes, und folglich auch der einer Punktgruppe als einer Menge von endlichvielen mit Vielfachheiten versehenen nulldimensionalen Mannigfaltigkeiten, nicht invariant, da eine birationale Abbildung nicht notwendig für alle Punkte eineindeutig ist[20]). Das gibt Veranlassung, diese Begriffe vom Standpunkt der Geometrie auf der Kurve aus zu modifizieren.

---

[20]) Eine Punktgruppe, betrachtet als eine relationstreue Spezialisierung der allgemeinen Punktgruppe einer bestimmten linearen Schar, ist natürlich birational invariant.

Die Nichtinvarianz des bisher benutzten Punktbegriffes zeigt, daß dieser projektiv invariante Begriff von dem birationalen Standpunkt aus etwas zu allgemein ist. Um die Invarianz wieder herzustellen, hat man also diesen Begriff etwas zu verengen. Das geschieht hier im folgenden in zwei verschiedenen Weisen. Einmal beschränken wir uns auf die singularitätenfreien Kurven und lassen dabei beliebige Punkte zu, ein anderes Mal beschränken wir uns auf die allgemeinen Punkte und lassen dabei beliebige Kurven zu. Den beiden Methoden liegt die im vorigen Paragraphen bewiesene Existenz eines singularitätenfreien birationalen Bildes zugrunde, und aus der Eineindeutigkeit der Zuordnung zwischen den Punkten und den Zweigen einer singularitätenfreien Kurve (die wir bald beweisen werden) geht auch gleichzeitig hervor, daß diese beiden äußerlich verschiedenen Methoden im Grunde genommen äquivalent sind und folglich zu denselben Resultaten führen müssen.

I. Die Gesamtheit aller singularitätenfreien Darstellungen der Kurve C ist offenbar ein invarianter Begriff. Diese Gesamtheit legen wir unseren Untersuchungen zugrunde. Da eine birationale Abbildung zwischen singularitätenfreien Darstellungen für alle Punkte eineindeutig ist, so können wir hier von einem Punkte bzw. einer Punktgruppe der Kurve C sprechen. Ein Punkt bzw. eine Punktgruppe auf C ist also eindeutig bestimmt durch einen Punkt bzw. eine Punktgruppe auf irgendeiner singularitätenfreien Darstellung. Eine Punktgruppe P_n der Ordnung n auf C ist also eine Menge von mit Vielfachheiten versehenen Punkten von C. Mit jedem Punkte treten also auch alle Konjugierten in P_n auf, und zwar mit derselben Vielfachheit. Den schon als invariant nachgewiesenen Begriff einer linearen Schar werden wir von jetzt an prinzipiell nur für singularitätenfreie Darstellungen gebrauchen, jedoch mit der Verallgemeinerung, daß jetzt auch einige feste Punkte, die zusammen eine Punktgruppe bilden, in der Schar zugelassen sind. Das heißt, in der Zerlegung $T(\lambda, v) = T(v)\,T^*(\lambda, v)$ (vgl. § 3) ist $T(v)$ zwar immer noch von λ unabhängig, aber $T^*(\lambda, v)$ kann jetzt auch einige von λ unabhängige Faktoren enthalten. Die aus $T^*(\lambda, v)$ entstandene Punktgruppe $P^*(\lambda)$ wird wieder die allgemeine Punktgruppe der Schar $\langle P^*(\lambda)\rangle$ genannt. Die Ordnung von $P^*(\lambda)$ heißt wieder die Ordnung von $\langle P^*(\lambda)\rangle$. Eine lineare Schar der Dimension r und der Ordnung n werden wir wieder mit $\mathfrak{G}_n^r$ bezeichnen.

Im folgenden werden wir irgendeine singularitätenfreie Darstellung der im abstrakten Sinne zu verstehenden Kurve C auch mit C bezeichnen. Aus dem Zusammenhang wird jedesmal klar sein, welche gemeint ist.

Die Zweckmäßigkeit der Beschränkung auf singularitätenfreie Kurven kommt zur Geltung in dem folgenden einfachen, aber grundlegenden Satz:

Die Gesamtheit aller durch einen Punkt δ von C gehenden Punktgruppen einer linearen Schar $\mathfrak{G}_n^r$ auf C bildet eine lineare $K(\delta)$-Schar der Dimension $\geqq r-1$, und zwar genau der Dimension $r-1$, wenn δ nicht ein fester Punkt von $\mathfrak{G}_n^r$ ist.

Beweis: Ist δ ein fester Punkt der Schar, dann ist nichts mehr zu beweisen. Es sei also δ kein fester Punkt. Wir haben zu beweisen, daß die Bedingung der Teilbarkeit von $T^*(\lambda, v)$ durch $\Sigma\,\delta_i v_i$ sich durch eine einzige lineare Gleichung in λ ausdrücken läßt. Aus

$$T(v)\,T^*(\lambda, v) = T(\lambda, v) = \prod_{i=1}^{g} \big(\sum_j \lambda_j F_j(\eta^{(i)})\big)$$

folgt, daß $T^*(\lambda, v)$ als Form in λ durch die g Linearformen $\sum_j \lambda_j F_j(\eta^{(i)})$ teilbar ist. Läßt man nun $\Sigma\,v_i x_i$ sich in eine allgemeine durch δ gehende Hyperebene $\Sigma\,\mu_i x_i$ spezialisieren, so gehen $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(g)}$ in $\Theta^{(1)} = \delta, \Theta^{(2)}, \ldots, \Theta^{(g)}$ über. Daraus folgt, daß $T^*(\lambda, \mu)$ durch $\sum_j \lambda_j F_j(\Theta^{(i)})$ für $i = 2, \ldots, n$ teilbar ist, mithin auch durch

$$\prod_{i=2}^{g} \big(\sum_j \lambda_j F_j(\Theta^{(i)})\big).$$

Folglich ist

$$\frac{T^*(\lambda, \mu)}{\prod_{i=2}^{g} \big(\sum_j \lambda_j F_j(\Theta^{(i)})\big)} = \Sigma\,\lambda_j \varrho_j$$

eine Linearform in λ mit Koeffizienten aus $K(\delta)$. Da δ kein fester Punkt ist, kann $T^*(\lambda, \mu)$, und folglich auch $\Sigma\,\lambda_j \varrho_j$, nicht identisch verschwinden. Also ist das Verschwinden von $T^*(\lambda, \mu)$ für eine von μ unabhängige Wahl der λ gleichbedeutend mit $\Sigma\,\lambda_j \varrho_j = 0$. Da $T^*(\lambda, \mu) = 0$ mit der Teilbarkeit von $T^*(\lambda, v)$ durch $\Sigma\,\delta_i v_i$ gleichbedeutend ist, ist damit der Satz bewiesen.

Es folgt aus diesem Satz: 1. Die Gesamtheit aller durch eine Punktgruppe P_k gehenden Punktgruppen einer linearen Schar $\mathfrak{G}_n^r$ auf C bildet eine lineare Schar der Dimension $\geqq r-k$. Wenn man die feste Punktgruppe P_k wegläßt, so bildet sie eine lineare Schar der Ordnung $n-k$ und der Dimension $\geqq r-k$. Sie heißt dann der *Rest* von $\mathfrak{G}_n^r$ in bezug auf P_k. 2. Schneiden die Hyperflächen $F_0, F_1, \ldots, F_t$ die Kurve C in einer Punktgruppe P, dann schneidet auch $\lambda_0 F_0 + \ldots + \lambda_t F_t$ (für beliebige λ) die Kurve C in P.

Bemerkung. Der obige Satz und seine Folgerungen gelten offenbar auch für eine beliebige (nicht notwendig singularitätenfreie) Kurve D, wenn δ ein einfacher Punkt von D ist bzw. wenn nur einfache Punkte von D in P auftreten[21]). Es läßt sich übrigens genau wie oben der allgemeinere Satz beweisen: *Die Gesamtheit aller durch einen h-fachen Punkt δ von D gehenden Punktgruppen einer linearen Schar $\mathfrak{G}_n^r$ auf D bildet höchstens h lineare K_1-Scharen (wo K_1 ein Oberkörper von $K(\delta)$ ist) der Dimension $\geqq r-1$, und zwar genau der Dimension $r-1$, wenn δ nicht ein fester Punkt von $\mathfrak{G}_n^r$ ist.* Wenden wir diesen Satz auf die Hyperebenen an, so haben wir die folgende Definition (wo alle Begriffe in bezug auf K_1 zu verstehen sind): Die Gesamtheit aller Hyperebenen durch einen h-fachen Punkt δ ist offenbar ein $(n-1)$-dimensionales Linearsystem. Die Gesamtheit aller Hyperebenen, die mit D in δ einen wenigstens $(h+1)$-fachen Schnittpunkt haben, zerfällt in höchstens h $(n-2)$-dimensionale Linearsysteme $\Phi^{(i)}$. Jedes System $\Phi^{(i)}$ hat eine Gerade als seine Basis. Diese Geraden nennen wir die Tangenten der Kurve D im Punkte δ. Ein einfacher Punkt hat also eine einzige Tangente. Ein h-facher Punkt hat höchstens h Tangenten; hat er genau h verschiedene Tangenten, so heißt er ein gewöhnlicher h-facher Punkt.

II. Die Gesamtheit aller allgemeinen Punkte einer Kurve ist offenbar ein invarianter Begriff. Diese Gesamtheit legen wir unseren Untersuchungen zugrunde. Da eine birationale Abbildung für allgemeine Punkte eineindeutig ist, so können wir hier von einem Punkte bzw. einer Punktgruppe sprechen. Wir werden nun eine besondere Klasse von allgemeinen Punkten definieren, die wir Zweige nennen und die gerade deshalb von Bedeutung sind, weil sie im engsten Zusammenhang mit den speziellen Punkten stehen.

Ω sei die algebraisch-abgeschlossene Hülle von K. Wir betrachten den Körper $\Omega\langle\tau\rangle$, der aus allen Potenzreihen in τ (endlichviele negative Potenzen erlaubt) mit Koeffizienten aus Ω besteht. Dann heißt ein allgemeiner Punkt $\xi(\tau) = (\xi_0(\tau), \xi_1(\tau), \ldots, \xi_n(\tau))$ von C aus $\Omega\langle\tau\rangle$ ein Zweig von C, wenn er der folgenden Bedingung genügt: Es gibt keinen anderen allgemeinen Punkt $\eta(\tau)$ von C aus $\Omega\langle\tau\rangle$ mit der Eigenschaft, daß es ein durch τ^2 teilbares Element $\sigma = a\tau^s + \ldots$ aus $\Omega\langle\tau\rangle$ gibt, so daß $\xi(\tau) = \eta(\sigma)$. Durch geeignete Normierung der Koordinaten kann man immer erreichen, daß einerseits keine negativen Potenzen von τ in $\xi_i(\tau)$ vorkommen und andererseits auch nicht alle $\xi_i(\tau)$ durch τ teilbar sind. Der Zweig ist dann in reduzierter Form. Der spezielle Punkt $\xi(0)$ heißt der zugehörige spezielle Punkt von $\xi(\tau)$, und $\xi(\tau)$ ein zugehöriger Zweig von $\xi(0)$. Zwei Zweige $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ heißen äquivalent, wenn

[21]) Diese einfachen Punkte von D dürfen natürlich mehrfach in P auftreten.

es ein genau durch τ teilbares Element $\sigma = a\tau + \ldots$ $(a \neq 0)$ aus $\Omega\langle\tau\rangle$ gibt, so daß $\xi^{(1)}(\tau) = \xi^{(2)}(\sigma)$. Äquivalente Zweige gehören offenbar zu demselben Punkte. Es läßt sich in bekannter Weise zeigen, daß die Äquivalenz reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, und folglich alle Zweige in Klassen von äquivalenten verteilt sind. Wir werden im folgenden äquivalente Zweige als gleich betrachten; sie sind nur verschiedene Darstellungen desselben Zweiges mit verschiedenen „Ortsuniformisierenden". Man überzeugt sich leicht, daß der Zweig und die Äquivalenz der Zweige birational invariante Begriffe sind. Dagegen hängt der zugehörige Punkt eines Zweiges von den verschiedenen „projektiven Modellen" der Kurve C ab.

Zwischen den speziellen Punkten und den Zweigen einer Kurve bestehen die folgenden Beziehungen:

Satz A. *Es gibt zu jedem (speziellen) k-fachen Punkte* $\alpha = (\alpha_0 = 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *von C genau r (inäquivalente) zugehörige Zweige, wenn* α *bei einer birationalen Abbildung von C auf eine singularitätenfreie Kurve auf r verschiedene Punkte abgebildet ist. Es ist also* $1 \leqq r \leqq k$.

Beweis: Man braucht den Satz nur für den Fall einer singularitätenfreien Kurve zu beweisen, der allgemeine Fall folgt dann unmittelbar daraus, wenn man die gegebene Kurve auf eine singularitätenfreie Kurve birational abbildet. Denn der zugehörige Punkt des Bildzweiges ist ein Bildpunkt des zugehörigen Punktes des Urzweiges, da diese beiden Punkte eine relationstreue Spezialisierung der beiden Zweige bilden. Haben die r Bildpunkte von α r zugehörige Zweige, so sind die Bilder dieser Zweige bei der inversen Abbildung r verschiedene zugehörige Zweige von α.

C sei nun eine singularitätenfreie Kurve. Die Projektion von C auf die (x_0, x_1, x_2)-Ebene sei durch die Kurve $f(x_0, x_1, x_2)$ gegeben. Durch eine geeignete Koordinatentransformation (mit Koeffizienten aus Ω) können wir erreichen, daß 1. die Projektion auf die (x_0, x_1, x_2)-Ebene eine birationale Abbildung ist, und 2. $\dfrac{\partial f(x_0, x_1, x_2)}{\partial x_2}$ für $x_0 = \alpha_0$, $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$ nicht verschwindet. Die durch die Projektion definierte birationale Abbildung sei:

$$\begin{aligned} & x_0 : x_1 : \ldots : x_n \\ & = x_0\,\psi(x_0, x_1, x_2) : x_1\,\psi(x_0, x_1, x_2) : x_2\,\psi(x_0, x_1, x_2) \\ & \qquad : \varphi_3(x_0, x_1, x_2) : \ldots : \varphi_n(x_0, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Dann läßt sich in bekannter Weise zeigen, daß

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 1, \\ \xi_1 &= \alpha_1 + \tau, \\ \xi_2 &= \alpha_2 + \sum_1^\infty C_i \tau^i = \alpha_2 + \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_\alpha \tau + \ldots, \\ \xi_i &= \varphi_i(\xi_0, \xi_1, \xi_2)/\psi(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \qquad (i = 3, \ldots, n) \end{aligned}$$

ein zu α zugehöriger Zweig von C ist. — Es sei nun $\xi_0^{(1)} = (1, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)})$ irgendein zu α zugehöriger Zweig von C. Setzt man $\sigma = \xi_1^{(1)} - \alpha_1 = a\tau + \ldots$, so folgt aus $f(\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}) = f(1, \alpha_1 + \sigma, \xi_2^{(1)}) = 0$ und $\xi_i^{(1)} \psi(\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}) = \varphi_i(\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)})$, daß

$$\xi_0^{(1)} = 1,$$

$$\xi_1^{(1)} = \alpha_1 + \sigma,$$

$$\xi_2^{(1)} = \alpha_2 + \sum_{1}^{\infty} C_i \sigma^i = \alpha_2 + \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \sigma + \ldots,$$

$$\xi_i^{(1)} = \varphi_i(\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}) / \psi(\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}) \qquad (i = 3, \ldots, n).$$

Da $\xi^{(1)}$ ein Zweig ist, so ist $a \neq 0$ wegen der Bedingung in der Definition eines Zweiges. Daraus folgt, daß $\xi^{(1)}$ zu ξ äquivalent ist.

Satz B. *$\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(r)}$ seien die r zugehörigen Zweige von α in reduzierter Form. Eine Hyperfläche $F_1(\mu, x)$ schneidet die Kurve C in α dann und nur dann s-fach, wenn $\prod_{i=1}^{r} F_1(\mu, \xi^{(i)})$ durch τ^s teilbar ist.*

Beweis: C sei durch die birationale Abbildung

$$y_0 : y_1 : \ldots : y_t = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \ldots : \varphi_t(x)$$

auf die singularitätenfreie Kurve C' in S_t abgebildet. $G(u, v)$ sei die in § 2 für $F_1(u, x)$ und $F_2(v, x)$ definierte Form. Setzt man nun $F_2(v, x) = \Sigma \lambda_i \varphi_i(x)$, so geht $G(u, v)$ in $H(u, \lambda) = H(u) H^*(u, \lambda)$ über, wo $H(u)$ und $H^*(u, \lambda)$ ähnliche Bedeutungen haben wie $T(v)$ und $T^*(\lambda, v)$ in § 3 Dann ist

$$H^*(u, \lambda) = \prod_{i=1}^{g'} F_1(u, \Theta^{(i)}) = \prod_{i=1}^{g} \left(\sum_{j=0}^{t} \lambda_j \omega_j^{(i)}\right),$$

wo $(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \ldots, \Theta^{(g')})$ die allgemeine Punktgruppe von $\Sigma \lambda_i \varphi_i(x)$, also das Bild (auf C) der Schnittpunktgruppe von C' mit der allgemeinen Hyperebene $\Sigma \lambda_i y_i$ ist, und $(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(g)})$ das Bild (auf C') der Schnittpunktgruppe von C mit der allgemeinen Hyperfläche $F_1(u, x)$ ist. Die Schnittpunktgruppe von $F_1(\mu, x)$ mit C sei $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(g)})$, wobei $\alpha^{(1)} = \ldots = \alpha^{(s)} = \alpha$ sein mögen. Das Bild dieser Punktgruppe auf C' sei $(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(g)})$, wobei $\beta^{(1)} = \ldots = \beta^{(s_1)} = \gamma^{(1)}, \beta^{(s_1+1)} = \ldots = \beta^{(s_1+s_2)} = \gamma^{(2)}, \ldots, \beta^{(s_1+\cdots+s_{r-1}+1)} = \ldots = \beta^{(s_1+\cdots+s_r)} = \gamma^{(r)}$ $\left(\sum_{1}^{r} s_i = s\right)$ sein mögen. Die Koordinaten in S_m seien (durch Koordinatentransformation mit Koeffizienten aus Ω) so gewählt, 1. daß die Hyperebenen $\gamma_0^{(1)} y_1 - \gamma_1^{(1)} y_0, \gamma_0^{(2)} y_1 - \gamma_1^{(2)} y_0, \ldots, \gamma_0^{(r)} y_1 - \gamma_1^{(r)} y_0$ mit C' nur einfache Schnittpunkte haben, 2. daß für jeden dieser Schnittpunkte die in dem Beweise von Satz A für α aufgestellten Bedingungen gelten, 3. daß $\beta_0^{(i)} \beta_1^{(j)} \neq \beta_1^{(i)} \beta_0^{(j)}$ ist für $\beta^{(i)} \neq \beta^{(j)}$. Dann hat die Hyperebene $\Sigma \Phi_j^{(i)} y_j = \gamma_0^{(i)} y_1 - (\gamma_1^{(i)} + \tau) y_0$

mit C' genau g' verschiedene Zweige von C' als Schnittpunkte. Die Bilder dieser Zweige auf C seien $\xi^{(i,1)} = \xi^{(i)}, \xi^{(i,2)}, \ldots, \xi^{(i,g')}$, wir haben dann

$$H^*(u, \Phi) = \prod_{j=1}^{g'} F_1(u, \xi^{(i,j)}) = \prod_{h=1}^{g} (\Sigma \Phi_j^{(i)} \omega_j^{(h)}).$$

Da $H^*(u, \Phi)$ nicht durch τ teilbar ist, können wir die $\xi^{(i,j)}$ in reduzierter Form nehmen. Spezialisieren wir nun endlich $u \to \mu$, so haben wir

$$H^*(\mu, \Phi) = \prod_{j=1}^{g'} F_1(\mu, \xi^{(i,j)}) = \prod_{h=1}^{g} (\gamma_0^{(i)} \beta_1^{(h)} - \gamma_1^{(i)} \beta_0^{(h)} - \beta_0^{(h)} \tau)$$

oder

$$F_1(\mu, \xi^{(i)}) \prod_{j=2}^{g'} F_1(\mu, \xi^{(i,j)}) = \tau^{s_i} \prod_{\beta^{(h)} \neq \gamma^{(i)}} (\gamma_0^{(i)} \beta_1^{(h)} - \gamma_1^{(i)} \beta_0^{(h)} - \beta_0^{(h)} \tau).$$

Da $\prod\limits_{j=2}^{g'} F_1(\mu, \xi^{(i,j)})$ und $\prod\limits_{\beta^{(h)} \neq \gamma^{(i)}} (\gamma_0^{(i)} \beta_1^{(h)} - \gamma_1^{(i)} \beta_0^{(h)} - \beta_0^{(h)} \tau)$ nicht durch τ teilbar sind, so ist $F_1(\mu, \xi^{(i)})$ durch τ^{s_i} teilbar, mithin ist $\prod\limits_{i=1}^{r} F_1(\mu, \xi^{(i)})$ durch τ^s teilbar.

Nach diesen beiden Sätzen ist es klar, daß alles, was wir bisher für die (speziellen) Punkte bewiesen haben, auch für die Zweige gilt, wenn wir die Schnittvielfachheit einer beliebigen Hyperfläche $F(\mu, x)$ mit C in einem Zweige ξ so definieren: $F(\mu, x)$ schneidet C in ξ s-fach, wenn $F(\mu, \xi)$ durch τ^s teilbar ist. Der Zweigbegriff ist also eine Verfeinerung des Punktbegriffes und ist offenbar birational invariant. Der Satz auf S. 671 bedarf nun kaum eines Beweises und gilt für beliebige Kurven. Da wir im folgenden (außer am Schluß von § 7) ausschließlich mit Zweigen zu tun haben, so werden wir dem üblichen Sprachgebrauch gemäß die Zweige wiederum Punkte nennen.

Definition. *Zwei Punktgruppen P, Q der Ordnung n heißen äquivalent,*

$$P \equiv Q,$$

wenn sie beide in einer linearen Schar der Ordnung n enthalten sind.

Satz. *Aus $P \equiv Q$, $Q \equiv R$ folgt $P \equiv R$.*

Dieser Satz ist in dem folgenden enthalten:

Satz. *Wenn zwei lineare Scharen $\mathfrak{G}_n^r$, $\mathfrak{G}_n^s$ eine gemeinsame Punktgruppe haben, so gibt es eine lineare Schar $\mathfrak{G}_n$, die sie beide enthält.*

Beweis. $\mathfrak{G}_n^r$ bzw. $\mathfrak{G}_n^s$ seien durch $\sum\limits_0^r \lambda_i F_i$ bzw. $\sum\limits_0^s \mu_i G_i$ erzeugt, die weggelassenen festen Punktgruppen seien A bzw. B, die den beiden gemeinsame Punktgruppe P sei (außer A bzw. B) durch F_0 bzw. G_0 ausgeschnitten. Das System

$$\varepsilon F_0 G_0 + \mu_1 G_1 F_0 + \ldots + \mu_s G_s F_0 + \lambda_1 F_1 G_0 + \ldots + \lambda_r F_r G_0$$

schneidet die Kurve in der festen Punktgruppe $A + B + P$. Läßt man diese feste Punktgruppe weg, so erzeugt es eine Schar der Ordnung n, die, wie man leicht einsieht, die beiden Scharen $\mathfrak{G}_n^r$ und $\mathfrak{G}_n^s$ enthält.

Es folgt aus diesem Satz, daß es zu jeder Punktgruppe P_n eine größte lineare Schar der Ordnung n gibt, die F_n enthält. Diese Schar nennen wir die durch P_n bestimmte *Vollschar* $|P_n|$. Ist P_n in keiner linearen Schar enthalten, so sagen wir, die Vollschar $|P_n|$ habe die Dimension 0.

Es gilt: 1. Aus $P \equiv Q$ folgt $P + A \equiv Q + A$, wo A eine beliebige Punktgruppe ist. Denn man kann eine beliebige durch A gehende Hyperfläche dem erzeugenden System der P, Q enthaltenden Schar hinzufügen und die übrigen Schnittpunkte dieser Hyperfläche mit C aus der Schar weglassen. 2. Aus $P \equiv Q$, $A \equiv B$ folgt $P + A \equiv Q + B$. Denn $P + A \equiv Q + A \equiv Q + B$. Die hiernach durch $|P|$, $|A|$ eindeutig bestimmte Vollschar $|P + A|$ nennen wir die Summe von $|P|$ und $|A|$. 3. Der Rest einer Vollschar $|P + A|$ in bezug auf A ist die Vollschar $|P|$. Enthielte nämlich $|P|$ eine nicht in dem Rest liegende Punktgruppe Q, dann würde die Schaar $|P| + A$ eine nicht in $|P + A|$ liegende Punktgruppe $Q + A$ enthalten. Das ist aber absurd, denn $|P + A|$ ist eine Vollschar und muß daher $|P| + A$ enthalten. 4. Ist $A \equiv B$, so ist der Rest von $|P + A|$ in bezug auf B auch gleich $|P|$. Denn aus $P + B \equiv P + A$ folgt $|P + B| = |P + A|$. Wir können also sagen: $|P|$ ist der Rest von $|P + A|$ in bezug auf $|A|$.

§ 6.

Der Riemann-Rochsche Satz.

Bevor wir die folgenden Sätze beweisen, die zu dem Ziel unserer Untersuchungen, dem Riemann-Rochschen Satz, führen, sei hier gleich bemerkt, daß wir uns bei dem Beweise auf den Fall eines algebraisch-abgeschlossenen Körpers beschränken können. Denn es handelt sich hier lediglich um Beziehungen zwischen den Ordnungen und den Dimensionen der Vollscharen auf C. Ist nämlich K nicht schon algebraisch-abgeschlossen, dann gehen wir zu seiner algebraisch-abgeschlossenen Hülle Ω über. Gelten die folgenden Sätze für die Ω-Vollscharen, so gelten sie natürlich insbesondere auch für K-Vollscharen. Es bleibt also nur zu zeigen, daß die durch eine K-Punktgruppe P in bezug auf Ω bestimmte Ω-Vollschar $\mathfrak{G} = |P|$ auch eine K-Vollschar ist. Das ist aber unmittelbar klar. Denn alle Konjugierten von $|P|$ müssen auch die K-Punktgruppe P enthalten und sind daher der Vollschar $\mathfrak{G} = |P|$ gleich. Daraus folgt nach dem Hilfssatz am Schluß von § 4, daß $\mathfrak{G}$ eine K-Vollschar ist. Ebenso ist die kanonische Schar $\mathfrak{G}_{2g-2}^{g-1}$ eine K-Schar, da sie nach Satz 6 die einzige

Schar der Ordnung $2g-2$ und der Dimension $g-1$ ist und daher mit ihren Konjugierten übereinstimmen muß.

Definition. *Das Geschlecht einer irreduziblen Kurve C ist die kleinste Zahl g derart, daß jede Vollschar der Ordnung $> g$ auf C die Dimension $\geqq 1$ hat.*

Daß es eine solche Zahl gibt, sieht man so: C sei durch eine ebene Kurve vom Grade m dargestellt. Die Gesamtheit aller Kurven vom Grade $k = m + \lambda\,(\lambda \geqq 0)$ schneidet auf C eine lineare Schar $\mathfrak{G}^{\varrho}_{km}$ der Ordnung km und der Dimension

$$\varrho = \frac{k(k+3)}{2} - \frac{(k-m)(k-m+3)}{2} - 1 \geqq \binom{m}{2} + \lambda$$

aus. P sei eine beliebige Punktgruppe der Ordnung $\binom{m}{2} + \lambda$, dann enthält $\mathfrak{G}^{\varrho}_{km}$ eine Punktgruppe $P+Q$, wo Q die Ordnung $km - \binom{m}{2} - \lambda$ hat. Der Rest von $\mathfrak{G}^{\varrho}_{km}$ in bezug auf Q ist eine P enthaltende lineare Schar und hat die Dimension

$$r \geqq \varrho - km + \binom{m}{2} + \lambda = m + \lambda - 1 \geqq 1.$$

Folglich hat um so mehr die Vollschar $|P|$ die Dimension $\geqq 1$.

Satz 1. *Eine Vollschar der Ordnung n hat die Dimension $r \geqq n - g$*

Beweis: Der Rest in bezug auf einen nicht festen Punkt ist eine Vollschar der Ordnung $n-1$ und der Dimension $r-1$. Nach r-maliger Anwendung solcher Restbildung haben wir dann eine Vollschar der Ordnung $n-r$ und der Dimension 0. Daraus folgt, daß $n - r \leqq g$ oder $r \geqq n - g$.

Satz 2. *Es gibt für jedes $k \geqq 0$ Vollscharen der Ordnung $n = g + k$ und der Dimension k.*

Beweis: Hätten alle Vollscharen der Ordnung $n = g + k$ die Dimension $\geqq k+1$, so würde die durch eine beliebige P_g und eine Q_k definierte Vollschar $|P_g + Q_k|$ auch die Dimension $\geqq k+1$ haben. Dann würde der Rest von $|P_g + Q_k|$ in bezug auf Q_k, d. h. die Vollschar $|P_g|$, die Dimension $\geqq 1$ haben, gegen die Definition von g.

Definition. *Eine Vollschar $\mathfrak{G}^r_n$ heißt speziell, wenn $r > n - g$ ist.* Alle Vollscharen der Ordnung $n < g$ sind offenbar speziell. Dagegen gibt es nach Satz 2 nicht spezielle Vollscharen für jede Ordnung $n \geqq g$.

Satz 3. *Jede Vollschar der Dimension $r \geqq g$ ist nicht speziell.*

Beweis: Wäre sie speziell, so würde sie die Ordnung $n < r + g$ haben. Der Rest in bezug auf eine nicht spezielle P_g sei $|Q_{n-g}|$. Dann würde der Rest der Schar in bezug auf Q_{n-g}, d. h. die Vollschar $|P_g|$ eine Dimension $\geqq r - n + g \geqq 1$ haben, also wäre P_g doch speziell.

Im Fall $g = 0$ oder $g = 1$ ist jede Vollschar nicht speziell, es gilt also für jede Vollschar die Beziehung $r = n - g$. Wir haben dann nichts mehr zu beweisen. Wir werden also im folgenden annehmen, daß $g > 1$ ist.

Satz 4. (Existenzsatz.) *Es gibt eine lineare Schar* $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$.

Beweis: Wir werden diesen Existenzsatz erst im nächsten Paragraphen beweisen.

Es folgt zunächst: 1. $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ ist eine Vollschar. Denn jede Vollschar der Dimension $r \geqq g$ ist nicht speziell, muß daher die Ordnung $n \geqq 2g$ haben. 2. $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ ist speziell, da $g-1 > 2g-2-g = g-2$ ist. 3. Jede in $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ enthaltene Vollschar ist speziell. Dies gilt in der Tat für jede beliebige spezielle Vollschar $\mathfrak{G}^r_n$. Denn eine Teilvollschar der Ordnung k entsteht dadurch, daß man den Rest in bezug auf eine gewisse P_{n-k} bildet, und hat daher die Dimension $\geqq r-n+k > k-g$, ist also speziell.

Satz 5. (Reduktionssatz.) *Es sei $P+Q$ eine Punktgruppe von $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ und O ein nicht in Q vorkommender Punkt. Dann ist O ein fester Punkt von $|P+O|$.*

Beweis: $|P+Q+O|$ ist von der Ordnung $2g-1$, mithin nicht speziell, mithin von der Dimension $g-1$. Also ist O ein fester Punkt von $|P+Q+O|$, mithin auch ein fester Punkt von $|P+O|$, da er der Rest von $|P+Q+O|$ in bezug auf die O nicht enthaltende Punktgruppe Q ist.

Satz 6. *Jede spezielle Vollschar ist in $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ enthalten.*

Beweis: Dies gilt offenbar für spezielle Vollscharen der Dimension $r=0$, also der Ordnung $n \leqq g-1$, da $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ die Dimension $g-1$ hat. Es sei der Satz für spezielle Vollscharen der Dimension $r-1$ schon bewiesen. Der Rest $\mathfrak{G}^{r-1}_{n-1}$ einer speziellen Vollschar $\mathfrak{G}^r_n$ in bezug auf einen nicht festen Punkt O ist also in $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ enthalten. Alle durch eine Gruppe von $\mathfrak{G}^{r-1}_{n-1}$ gehenden Gruppen von $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ müssen aber O enthalten, sonst würde O nach Satz 5 ein fester Punkt von $\mathfrak{G}^r_n$ sein, gegen die Voraussetzung. Das bedeutet aber, daß $\mathfrak{G}^{r-1}_{n-1}+O = \mathfrak{G}^r$ in $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ enthalten ist.

Nach Satz 6 kann es offenbar nur eine einzige $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ geben. Diese $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ nennen wir die *kanonische Schar* von C. Ist der Rest von $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ in bezug auf eine spezielle Vollschar $\mathfrak{G}^r_n$ von der Dimension $i-1$, so heißt i der *Spezialitätsindex* von $\mathfrak{G}^r_n$. Nicht spezielle Vollscharen sollen den Spezialitätsindex $i=0$ haben.

Satz 7. (Riemann-Rochscher Satz.) *Für eine Vollschar $\mathfrak{G}^r_n$ vom Spezialitätsindex i gilt:*

$$r = n - g + i.$$

Beweis: Der Satz gilt offenbar für $i=0$. Es sei der Satz für $i-1$ schon bewiesen. Der Rest von $\mathfrak{G}^{g-1}_{2g-2}$ in bezug auf eine Vollschar $\mathfrak{G}^r_n$ vom Spezialitätsindex i hat die Dimension $i-1$. O sei ein

nicht zu den festen Punkten dieses Restes gehöriger Punkt, dann hat die Vollschar $\mathfrak{G}_n^r + O$ der Ordnung $n+1$ und der Dimension r (Satz 5) den Spezialitätsindex $i-1$. Daraus folgt, daß $r = n+1-g+i-1 = n-g+i$.

§ 7.

Der Beweis des Existenzsatzes.

Wir werden jetzt den im letzten Paragraphen angenommenen Satz beweisen, daß es eine lineare Schar $\mathfrak{G}_{2g-2}^{g-1}$ gibt. Zunächst werden wir zeigen, daß es eine zu dem Zweck besonders geeignete Darstellung der Kurve C gibt: eine ebene Kurve mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten (d. h. Doppelpunkten mit zwei verschiedenen Tangenten). Dazu bedienen wir uns der Projektion. Wir nehmen zuerst eine Vollschar $\mathfrak{G}_{r+g}^r$ von der Dimension $r \geqq g+3$, die natürlich einfach ist und daher eine Darstellung der Kurve C in S_r erzeugt. Diese Darstellung $\overline{C}$ besitzt keine Singularitäten (da es keine Schar der Dimension $r-1 \geqq g+2$ und der Ordnung $\leqq r+g-2$ gibt), keine dreifachen Sehnen (da es keine Schar der Dimension $r-2 \geqq g+1$ und der Ordnung $\leqq r+g-3$ gibt), keine Paare in einer Ebene liegender Tangenten, und keine Paare außerhalb $\overline{C}$ schneidender Sehnen (da es keine Schar der Dimension $r-3 \geqq g$ und der Ordnung $\leqq r+g-4$ gibt). Die durch die Gesamtheit aller Sehnen von $\overline{C}$ erzeugte Mannigfaltigkeit N hat den allgemeinen Punkt $\eta = \lambda\xi + \lambda'\xi'$, wo ξ, ξ' zwei voneinander unabhängige allgemeine Punkte von $\overline{C}$ sind. Sie ist daher von der Dimension $\leqq 3$. Die Gesamtheit der Tangenten von $\overline{C}$ bildet eine Mannigfaltigkeit N', die offenbar von der Dimension $\leqq 2$ ist. Nehmen wir nun einen S_{n-3}, der mit N nur endlichviele Schnittpunkte, mit N' und der Kurve $\overline{C}$ aber keinen Schnittpunkt hat, was gewiß möglich ist, und bilden die durch das System aller durch S_{n-3} gehenden Hyperebenen auf $\overline{C}$ erzeugte lineare Schar $\mathfrak{G}^2$, dann definiert $\mathfrak{G}^2$ eine birationale Abbildung, die die erwünschte ebene Kurve liefert. Da N nur endlichviele Schnittpunkte mit S_{n-3} hat und da diese Punkte nicht auf $\overline{C}$ liegen, also nicht Schnittpunkte von zwei Sehnen sind, so ist es klar, daß die durch einen allgemeinen Punkt von $\overline{C}$ gehenden Punktgruppen von $\mathfrak{G}^2$ keinen weiteren Schnittpunkt mit $\overline{C}$ gemeinsam haben können. Also ist die Abbildung birational. Daß die Bildkurve D nur Doppelpunkte besitzt, sieht man so. Den Schnittpunktgruppen von D mit den Geraden des durch einen Punkt δ von D gehenden Büschels entsprechen die Schnittpunktgruppen einer 1-dimensionalen Teilschar $\mathfrak{G}^1$ von $\mathfrak{G}^2$, die von einem durch einen aus S_{n-3} und einem gewissen Punkt von $\overline{C}$ gebildeten S_{n-2} gehenden Büschel von Hyperebenen auf $\overline{C}$ ausgeschnitten wird. Da $\overline{C}$ keine dreifachen Sehnen besitzt, kann ein solches Büschel

nicht mehr als zwei feste Schnittpunkte mit $\overline{C}$ haben. Mithin hat $\mathfrak{G}^1$ nicht mehr als zwei feste Punkte, und daraus folgt (§ 4), daß δ höchstens ein Doppelpunkt ist. Ebenso leicht überzeugt man sich, daß, da $\overline{C}$ keine Paare in einer Ebene liegender Tangenten besitzt und da S_{n-3} sich mit N' nicht schneidet, es in jeder der endlichvielen $\mathfrak{G}^1$ (entsprechend den endlichvielen Schnittpunkten von N mit S_{n-3}), die zwei feste Punkte besitzen, zwei verschiedene Punktgruppen gibt, in denen einer der beiden festen Punkte mehrfach auftritt. Das bedeutet, daß die Doppelpunkte von D alle zwei verschiedene Tangenten haben.

Die ebene Kurve D sei vom Grade m und besitze die d Doppelpunkte $\delta^{(1)}, \ldots, \delta^{(d)}$. Die Gesamtheit der durch die $\delta^{(i)}$ gehenden Kurven vom Grade k (der adjungierten Kurven vom Grade k) schneidet D außer in einer festen Punktgruppe, in der jeder $\delta^{(i)}$ zweifach auftritt, noch in einer linearen Schar $\mathfrak{G}_{n_k}^{r_k}$ (der k-ten adjungierten Schar) der Ordnung $n_k = mk - 2d$ und der Dimension

$$r_k = \frac{k(k+3)}{2} - \frac{(k-m)(k-m+3)}{2} - 1 - d$$

$$= n_k - g' \qquad (k \geqq m, d+1),$$

$$r_k = \frac{k(k+3)}{2} - d \qquad (k \leqq m),$$

wo

$$g' = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d$$

ist. Da für hinreichend große k $r_k \leqq n_k - g$ ist, so ist $g' \geqq g > 1$ (unsere Annahme). Für $k = m - 3$ haben wir

$$n_k = 2g' - 2,$$
$$r_k = g' - 1.$$

Wenn wir zeigen können, daß $g' = g$ ist, so haben wir hier schon eine $\mathfrak{G}_{2g-2}$, deren Dimension $\geqq g - 1$, also $= g - 1$ ist[22]). Im folgenden werden wir die Gleichheit von g und g' dadurch beweisen, daß wir zeigen, daß die oben definierten Scharen $\mathfrak{G}_{n_k}^{r_k}$ für genügend große k Vollscharen sind.

$\mathfrak{G}_{n-m}^{n-m-g}$ sei eine Vollschar der Ordnung $\geqq 2g$, $|P_m|$ sei die von der Gesamtheit aller Geraden erzeugte Schar. Der Rest der nicht speziellen Vollschar $|P_m + \mathfrak{G}_{n-m}^{n-m-g}| = \mathfrak{G}_n^{n-g}$ in bezug auf $|P_m|$ ist die nicht spezielle Vollschar $\mathfrak{G}_{n-m}^{n-m-g}$, aus $|P_m|$ folgen also m unabhängige Bedingungen für $\mathfrak{G}_n^{n-g}$. Nun läßt sich $\mathfrak{G}_n^{n-g}$, wie jede Vollschar überhaupt,

[22]) Denn eine Schar der Dimension $> g - 1$ ist nicht speziell und hat folglich die Ordnung $\geqq 2g$.

als der Rest einer adjungierten Schar $\mathfrak{G}_{n_h}^{r_h}$ in bezug auf eine Punktgruppe K darstellen. Da der Rest von $\mathfrak{G}_{n_h+i}^{r_h+i}$ $(i \geqq 0)$ in bezug auf K die Schar $\mathfrak{G}_n^{n-g}$ enthält, so legt $|P_m|$ natürlich auch diesem Rest m unabhängige Bedingungen auf. Daraus folgt durch e-malige Anwendung, daß $e\,|P_m|$ dem Rest von $\mathfrak{G}_{n_h+e}^{r_h+e}$ in bezug auf K $e\,m$ unabhängige Bedingungen auferlegt. Da $\mathfrak{G}_{n_h+e}^{r_h+e} \subset |\mathfrak{G}_{n_h}^{r_h} + e\,P_m|$ ist, so ist der Rest von $\mathfrak{G}_{n_h+e}^{r_h+e}$ in bezug auf $K + e\,|P_m|$ die Vollschar $\mathfrak{G}_n^{n-g}$, also ist der Rest von $\mathfrak{G}_{n_h+e}^{r_h+e}$ in bezug auf K eine Vollschar $\mathfrak{G}_{n+em}^{n-g+em}$. Wenn wir nun beweisen können, daß K der $\mathfrak{G}_{n_h+e}^{r_h+e}$ für genügend große e genau k (die Ordnung von K) unabhängige Bedingungen auferlegt, dann hat $\mathfrak{G}_{n_h+e}^{r_h+e}$ die Ordnung $n + e\,m + k$ und die Dimension $n + e\,m + k - g$ und ist also eine Vollschar.

Wir haben also zu zeigen, daß K der $\mathfrak{G}_{n_h}^{r_h}$ (für genügend große h) k unabhängige Bedingungen auferlegt. Dazu genügt es zu zeigen, daß es eine adjungierte Kurve vom Grade h gibt, die, außer in der festen Punktgruppe G der Ordnung $2\,d$ (die aus der Adjungiertheit entsteht), die Kurve D genau in einer beliebigen in K enthaltenen Punktgruppe K' und einer mit K punktfremden Gruppe H schneidet. Wir können uns dabei auf den Fall beschränken, wo K' aus einem k'-fach zu zählenden Punkte besteht, der dem Zweige ξ: $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = \alpha + \tau$, $\xi_2 = \beta + \sum_{1}^{\infty} \beta_i \tau^i$, zugeordnet ist; der allgemeine Fall läßt sich leicht darauf zurückführen. Nun schneidet eine allgemeine k'-fach durch ξ gehende adjungierte Kurve vom Grade h die Kurve D (außer in G) genau k'-fach in ξ und in keinem anderen nicht zu dem zugehörigen Punkte $(1, \alpha, \beta)$ von ξ zugehörigen Zweig von K. Denn dies gilt für die adjungierte Kurve vom Grade h, die aus k' allgemeinen durch $(1, \alpha, \beta)$ gehenden Geraden, d allgemeinen durch die d Doppelpunkte gehenden Geraden, und $h - k' - d$ allgemeinen Geraden besteht. Sie schneidet aber auch (außer in G) den anderen zu $(1, \alpha, \beta)$ gehörigen Zweig (falls $(1, \alpha, \beta)$ ein Doppelpunkt ist) nicht, denn das gilt für die adjungierte Kurve vom Grade h, die aus der Kurve

$$x_2 x_0^{k'-1} - \sum_{1}^{k'} \beta_i (x_1 - \alpha x_0)^i x_0^{k'-i},$$

$d - 1$ allgemeinen durch die übrigen $d - 1$ Doppelpunkte gehenden Geraden und $h - k' - d + 1$ allgemeinen Geraden besteht. Damit ist alles bewiesen.

Literaturverzeichnis.

Albanese, G.

(1) **Trasformazione birazionale di una curva algebrica qualunque in un'altra priva di punti multipli. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (5) 33[1] (1924).**

Hasse, H.

(2) Über die Kongruenzzetafunktionen. S.-B. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1934. XVII.

Severi, F.

(3) Trattato di geometria algebrica. Vol. I, Parte I (1926).

Schmidt, F. K.

(4) Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p. Math. Zeitschr. 33 (1931).

van der Waerden, B. L.

(5) Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie. Math. Annalen 97 (1927).

(6) Moderne Algebra; Bd. II (1931).

(7) Zur algebraischen Geometrie. I; Gradbestimmung von Schnittmannigfaltigkeiten einer beliebigen Mannigfaltigkeit mit Hyperflächen. Math. Annalen 108 (1933).

(8) Zur algebraischen Geometrie. V; Ein Kriterium für die Einfachheit von Schnittpunkten. Math. Annalen 110 (1934).

(9) Zur algebraischen Geometrie. VI; Algebraische Korrespondenzen und rationale Abbildungen. Math. Annalen 110 (1934).

(Eingegangen am 26. 2. 1937.)

Zur algebraischen Geometrie. XI.

Projektive und birationale Äquivalenz und Moduln von ebenen Kurven.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Man möchte meinen, daß die projektive Äquivalenz von zwei ebenen irreduziblen Kurven n-ter Ordnung eine algebraische Eigenschaft sei, die sich durch algebraische Gleichungen in den Koordinaten (Koeffizienten) der Kurven ausdrückt. Dem ist aber nicht so. In § 1 bestimmen wir die kleinste algebraische Mannigfaltigkeit von Kurvenpaaren, welche alle projektiv äquivalenten Paare umfaßt. Diese Mannigfaltigkeit ist irreduzibel und ihr allgemeines Element ist ein projektiv äquivalentes Kurvenpaar; aber es gibt auch Kurvenpaare in der Mannigfaltigkeit, die zwar Grenzfälle von projektiv äquivalenten Kurvenpaaren, aber selbst nicht projektiv äquivalent sind. Alle solche „uneigentlich projektiven" Kurvenpaare werden durch Satz 1 gegeben. Z. B. sind alle Kurven vierter Ordnung mit einem Berührungsknoten untereinander uneigentlich projektiv, aber sie sind noch nicht einmal birational ineinander transformierbar.

Aus dieser letzten Bemerkung folgt, daß auch die birationale Äquivalenz von zwei Kurven keine algebraische Eigenschaft dieser Kurven ist. Daraus ergibt sich eine wesentliche Schwierigkeit für die Frage der „Moduln", d. h. der Konstanten, von denen eine Klasse birational äquivalenter Kurven abhängt.

In einem Gespräch, das den Anlaß zu der vorliegenden Untersuchung bildete, formulierte M. Deuring die Frage nach den Moduln so: Gibt es eine algebraische Korrespondenz, welche jeder ebenen Kurve vom Geschlechte p einen Punkt einer $(3p - 3 + \varrho_p)$-dimensionalen $(\varrho_0 = 3,\ \varrho_1 = 1,\ \varrho_p = 0$ für $p > 1)$ „Modulmannigfaltigkeit" zuordnet, derart, daß zwei Kurven genau dann der gleiche Punkt zugeordnet wird, wenn sie birational äquivalent sind? Diese Frage muß jetzt verneint werden, denn wenn es eine Korrespondenz der verlangten Art gäbe, und wenn sie auch nur stetig (nicht einmal algebraisch) wäre, so würden zwei Kurven, die sich als Grenzfälle von birational äquivalenten Kurven darstellen lassen, die gleiche Moduln haben und daher selber birational äquivalent sein müssen.

Wir werden aber in § 3 zeigen, daß die Frage nach den Moduln bejaht werden kann, falls man sich auf Kurven von genügend hohem Grad

mit nur gewöhnlichen Knotenpunkten beschränkt. Für diese „regulären Kurven" gibt es eine rationale Abbildung von der obigen Art auf eine Modulmannigfaltigkeit von der Dimension $3p-3+\varrho_p$.

Zu diesem Ergebnis führt ein etwas mühsamer Weg, bei dem die Sätze des § 1 über projektive Äquivalenz wesentlich gebraucht werden. In § 2 wird zunächst in Anlehnung an Severi[1]) bewiesen, daß die Kurven mit einer gegebenen Anzahl von Knotenpunkten sich auf endlich viele irreduzible Mannigfaltigkeiten von der Dimension $3n+p-1$ verteilen, und daß die zu einer gegebenen Kurve birational äquivalenten Kurven einer irreduziblen Mannigfaltigkeit von der Dimension $3n-2p+2$ angehören. In § 3 wird die kleinste algebraische Mannigfaltigkeit untersucht, welche alle birational äquivalenten Kurvenpaare umfaßt, und es wird gezeigt, daß die *regulären Kurvenpaare* dieser Mannigfaltigkeit auch wirklich birational äquivalent sind. Zieht man dann noch die Sätze aus ZAG IX[2]) über algebraische Systeme von algebraischen Mannigfaltigkeiten heran, so folgt schließlich (§ 4), daß die Gesamtheit der regulären Kurven vom Geschlechte p mit einem algebraischen System von algebraischen Mannigfaltigkeiten, deren jede nur birational äquivalente Kurven enthält, einfach überdeckt werden kann, und daß diese Mannigfaltigkeiten sich auf Punkte einer Bildmannigfaltigkeit von der Dimension $3p-3+\varrho_p$ eineindeutig abbilden lassen.

§ 1.

Projektive Äquivalenz von ebenen Kurven.

Die ebenen Kurven n-ter Ordnung Γ bilden einen projektiven Raum S_r, $r=\frac{1}{2}n(n+3)$. Die Paare (Γ, Δ) von ebenen Kurven n-ter Ordnung bilden einen zweifach projektiven Raum $S_{r,r}$. Ist Γ eine allgemeine Kurve (mit unbestimmten Koeffizienten) und Δ die allgemeinste projektiv transformierte Kurve von Γ, so hängt das Paar (Γ, Δ) von $r+8$ wesentlichen Parametern ab. Das Paar (Γ, Δ) ist also das allgemeine Element einer irreduziblen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der Dimension $r+8$. Zu $\mathfrak{M}$ gehören alle Paare von projektiv äquivalenten Kurven, da sie alle durch Parameterspezialisierung aus dem allgemeinen Paar (Γ, Δ) hervorgehen. Zu $\mathfrak{M}$ gehören aber, wie wir sehen werden, noch andere Kurvenpaare, die wir *uneigentlich projektive Kurvenpaare* nennen. Wir wollen diese alle bestimmen.

Hilfssatz. *Jeder Punkt einer irreduziblen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ kann mit einem allgemeinen Punkt ξ der Mannigfaltigkeit durch eine irreduzible, auf $\mathfrak{M}$ verlaufende Kurve verbunden werden.*

---

[1]) F. Severi-E. Löffler, Vorlesungen über algebraische Geometrie, Leipzig 1921, Anhang F.

[2]) W.-L. Chow und B. L. van der Waerden, Math. Annalen **113** (1936), S. 692—704.

Beweis. Wir können $\mathfrak{M}$ als q-dimensionale Mannigfaltigkeit im affinen Raum A_n annehmen. Nach einer Koordinatentransformation können wir annehmen, daß $\xi_{q+1}, \ldots, \xi_n$ ganze algebraische Funktionen von $\xi_1, \ldots, \xi_q$ sind. Sind dann $z, u_{q+1}, \ldots, u_n$ Unbestimmte, so ist

$$N(z - u_{q+1}\xi_{q+1} - \ldots - u_n\xi_n) = F(z, u_{q+1}, \ldots, u_n, \xi_{q+1}, \ldots, \xi_n)$$

ein Polynom in z, dessen Faktorzerlegung nicht nur für allgemeine $\xi_1, \ldots, \xi_q$ sondern auch für alle speziellen Werte dieser Größen die zugehörigen Punkte von $\mathfrak{M}$ liefert[3]). Ist nun $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ irgend ein Punkt der Mannigfaltigkeit und setzt man für $j = 1, \ldots, q$

$$\xi_j = \eta_j + v_j\lambda,$$

wobei v_j und λ neue Unbestimmte sind, so werden in der Faktorzerlegung

$$F(z, u_{q+1}, \ldots, u_n, \xi_{q+1}, \ldots, \xi_n) = \prod_\nu (z - u_{q+1}\xi_{q+1}^{(\nu)} - \ldots - u_n\xi_n^{(\nu)})$$

alle ξ_j algebraische Funktionen von λ.

Mindestens ein Faktor von F nimmt den Wert $z - u_{q+1}\eta_{q+1} - \ldots - u_n\eta_n$ für $\lambda = 0$ an, also durchläuft mindestens ein Punkt $\xi^{(\nu)}$ bei variablem λ eine algebraische Kurve, die den Punkt η enthält. Für $\lambda = 1$ aber ist $\xi^{(\nu)}$ ein allgemeiner Punkt der Mannigfaltigkeit, da die v_j unabhängige Unbestimmte sind. Dasselbe gilt übrigens für jeden von 0 verschiedenen konstanten Wert von λ, sowie auch für unbestimmte λ. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Die Koordinaten eines Punktes einer algebraischen Kurve lassen sich in der Umgebung einer jeden Stelle in Potenzreihen nach einer Ortsuniformisierenden entwickeln. Aus dem Hilfssatz folgt also, daß es zu jedem Punkte η einer algebraischen Mannigfaltigkeit einen allgemeinen Punkt ξ derselben Mannigfaltigkeit gibt, dessen Koordinaten Potenzreihen in einer Veränderlichen t sind, die für $t = 0$ in die Koordinaten von η übergehen.

Dieses Ergebnis wenden wir nun zur Bestimmung der Kurvenpaare unserer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ an. Es seien also $\Gamma(t)$ und $\Omega(t)$ zwei Kurven, deren Koordinaten Potenzreihen in t sind, und die durch eine projektive Transformation $T(t)$ ineinander übergehen. Für $t = 0$ mögen $\Gamma(t)$ und $\Omega(t)$ in zwei Kurven Γ und Ω übergehen, die wir untersuchen wollen.

Die Matrixelemente der projektiven Transformation $T(t)$, die $\Gamma(t)$ in $\Omega(t)$ überführt, sind natürlich algebraische Funktionen von t und können daher (eventuell nach Wahl einer neuen Ortsuniformisierenden t) auch als Potenzreihen in t angenommen werden. Wir bezeichnen die Matrix ebenfalls mit $T(t)$. Bekanntlich läßt sich eine solche Matrix durch Multi-

---

[3]) B. L. van der Waerden, ZAG III, Math. Annalen 108 (1933), S. 696.

plikation von vorn und hinten mit zwei Matrizes, die für $t = 0$ regulär bleiben, auf Diagonalform bringen[4])

$$Q^{-1} T(t) P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei können α_0, α_1, α_2 sogar als Potenzen von t angenommen werden:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= t^{-\varrho}, \\ \alpha_1 &= t^{-\sigma}, \\ \alpha_2 &= t^{-\tau}. \end{aligned}$$

Statt der Kurven $\Gamma(t)$ und $\Omega(t)$ können wir ebensogut die Kurven $P^{-1}\Gamma(t)$ und $Q^{-1}\Omega(t)$ betrachten, welche zu $\Gamma(t)$ und $\Omega(t)$ auch für $t = 0$ projektiv äquivalent sind. Diese neuen Kurven $P^{-1}\Gamma(t)$ und $Q^{-1}\Omega(t)$ gehen durch die Transformation $Q^{-1} T(t) P$ oder

$$\begin{aligned} x_0' &= t^{-\varrho} x_0, \\ x_1' &= t^{-\sigma} x_1, \\ x_2' &= t^{-\tau} x_2 \end{aligned}$$

auseinander hervor. Die definierenden Formen dieser Kurven seien

$$\begin{aligned} f_t &= \Sigma a_{ikl} x_0^i x_1^k x_2^l, \\ h_t &= \Sigma a_{ikl} x_0^i x_1^k x_2^l t^{\varrho i + \sigma k + \tau l} \end{aligned}$$

Der Übergang $t \to 0$ wird so gemacht, daß aus f_t und h_t die niedrigste wirklich vorkommende Potenz von t als Faktor abgespalten und dann (im anderen Faktor) $t = 0$ gesetzt wird. Es bleiben also nur die niedrigsten Potenzen übrig. Die so entstandenen Formen seien f_0 und h_0; sie definieren (bis auf zwei eigentliche projektive Transformationen P und Q) die gesuchten Kurven Γ und Ω.

Das Anfangsglied in a_{ikl} sei $\alpha_{ikl} t^{b_{ikl}}$. Wir können voraussetzen, indem wir nötigenfalls f_t durch $t^{-a} f_t$ ersetzen, daß alle $b_{ikl} \geqq 0$, und daß einige $b_{ikl} = 0$ sind. Für die Kurve Γ sind dann nur die Glieder mit $b_{ikl} = 0$ von Interesse. Weiter sei ω so gewählt, daß

$$\text{alle } b_{ikl} + \varrho i + \sigma k + \tau l \geqq \omega, \quad \text{einige} = \omega$$

sind. Für die Kurve Ω sind nur die Glieder mit

$$b_{ikl} + \varrho i + \sigma k + \tau l = \omega$$

von Interesse.

---

[4]) Vgl. etwa B. L. v. d. Waerden, Moderne Algebra II, § 106.

Wir haben also drei Arten von interessanten Koeffizienten b_{ikl}:

1. die mit $b_{ikl} = 0$, $b_{ikl} + \varrho i + \sigma k + \tau l - \omega > 0$,
2. die mit $b_{ikl} = 0$, $b_{ikl} + \varrho i + \sigma k + \tau l - \omega = 0$,
3. die mit $b_{ikl} > 0$, $b_{ikl} + \varrho i + \sigma k + \tau l - \omega = 0$.

Für die Glieder unter 1. gilt

$$\varrho i + \sigma k + \tau l - \omega > 0, \tag{1}$$

für die unter 2.

$$\varrho i + \sigma k + \tau l - \omega = 0, \tag{2}$$

für die unter 3.

$$\varrho i + \sigma k + \tau l - \omega < 0. \tag{3}$$

Wir lassen nun die Glieder mit höheren Exponenten von t, die auf f_0 und h_0 keinen Einfluß haben, aus f_t und h_t einfach fort. Verstehen wir unter $\sum\limits_{(1)}$, $\sum\limits_{(2)}$, $\sum\limits_{(3)}$ Summen über alle i, k, l, welche die Bedingungen (1) bzw. (2) bzw. (3) erfüllen, so bleiben folgende Formen übrig:

$$\tag{4} \left\{ \begin{aligned} f_t &= \sum_{(1)} \alpha_{ikl} x_0^i x_1^k x_2^l + \sum_{(2)} \alpha_{ikl} x_0^i x_1^k x_2^l + \sum_{(3)} \alpha_{ikl} t^{-\varrho i - \sigma k - \tau l + \omega} x_0^i x_1^k x_2^l \\ h_t &= \Big\{ \sum_{(1)} \alpha_{ikl} t^{\varrho i + \sigma k + \tau l - \omega} x_0^i x_1^k x_2^l + \sum_{(2)} \alpha_{ikl} x_0^i x_1^k x_2^l \\ &\qquad + \sum_{(3)} \alpha_{ikl} x_0^i x_1^k x_2^l \Big\} t^{\omega}, \end{aligned} \right.$$

$$\tag{5} \left\{ \begin{aligned} f_0 &= \sum_{(1)} \alpha_{ikl} x_0^i x_1^k x_2^l + \sum_{(2)} \alpha_{ikl} x_0^i x_1^k x_2^l \\ g_0 &= \sum_{(2)} \alpha_{ikl} x_0^i x_1^k x_2^l + \sum_{(3)} \alpha_{ikl} x_0^i x_1^k x_2^l. \end{aligned} \right.$$

Die Formel (5) gibt in expliziter Form alle uneigentlich-projektiven Formenpaare f_0, h_0. Die Koeffizienten α_{ikl} sind beliebige Konstanten. Die Formel (4) setzt gleichzeitig in Evidenz, daß f_0 und h_0 tatsächlich Grenzelemente von projektiv äquivalenten Formen sind, daß sie also uneigentlich projektiv sind. Wir haben also

Satz 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei ebene Kurven uneigentlich-projektiv sind, ist, daß ihre definierenden Formen f_0 und h_0 in bezug auf zwei geeignet gewählte Koordinatensysteme die Gestalt* (5) *annehmen, wobei die ganzen Zahlen ϱ, σ, τ, ω, welche die Klasseneinteilung* (1), (2), (3) *definieren, willkürlich gewählt werden können.*

Deutet man i, k, l als baryzentrische Koordinaten (oder, was auf das gleiche hinauskommt, i und k als schiefwinklige Koordinaten) in einer Ebene, so entspricht jedem $x_0^i x_1^k x_2^l$ mit $i + k + l = n$ ein Gitterpunkt im Inneren oder auf dem Rande des Fundamentaldreieckes (vgl. Fig. 1). Die Gitterpunkte (2) liegen auf einer Geraden G, die Gitterpunkte (1)

und (3) liegen auf den beiden Seiten dieser Geraden. Hat man die Lage der Geraden G, so kann man die Formen f_0 und h_0 nach (5) anschreiben.

Will man sich auf Paare von irreduziblen Kurven beschränken, so muß man die Gerade G durch eine Ecke des Fundamentaldreiecks legen; denn sonst liegen immer zwei Ecken auf der einen Seite von G und eine der Formen f_0 oder h_0 spaltet einen Faktor x_0 oder x_1 oder x_2 ab.

Beispiel 1. Kurven 3. Ordnung. Die möglichen Lagen der Geraden G, die zu Paaren von irreduziblen Kurven führen, sind in Fig. 1 mit I, II, III angegeben. Wir nehmen etwa an, daß die Gitterpunkte links von G die Bedingung (1), die rechts von G die Bedingung (3) erfüllen. Dann definiert

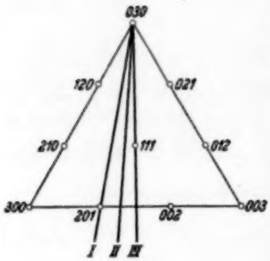


Fig. 1.

im Fall I f_0 eine Kurve mit einer Spitze im Punkte (0, 0, 1), h_0 eine Kurve mit einem Wendepunkt im Punkte (1, 0, 0);

im Fall II f_0 eine Kurve mit einer Spitze im Punkte (0, 0, 1), h_0 eine Kurve mit einem Doppelpunkt im Punkte (1, 0, 0);

im Fall III f_0 eine Kurve mit einem Doppelpunkt im Punkte (1, 0, 0), h_0 eine Kurve mit einem Doppelpunkt im Punkte (0, 0, 1).

Im Fall III sind die Kurven f_0 und h_0 sogar eigentlich projektiv. Aus der Betrachtung der Fälle I und II folgt: *Eine Kurve 3. Ordnung mit einer Spitze ist zu jeder anderen Kurve 3. Ordnung uneigentlich projektiv.*

Beispiel 2. Kurven 4. Ordnung. Die Gerade G möge die Gleichung $i = l$ haben. Die Bedingung (1) besagt $i > l$, die Bedingung (2) $i = l$, die Bedingung (3) $i < l$. Nach (5) ist also

$$f_0 = \sum_{i \geqq l} \alpha_{ikl}\, x_0^i x_1^k x_2^l,$$

$$h_0 = \sum_{i \leqq l} \alpha_{ikl}\, x_0^i x_1^k x_2^l$$

oder voll ausgeschrieben

$$\begin{aligned} f_0 = {} & \alpha x_0^4 + \beta x_0^3 x_1 + \gamma x_0^3 x_2 + \delta x_0^2 x_1^2 + \varepsilon x_0^2 x_1 x_2 + \zeta x_0 x_1^3 \\ & + \eta x_0^2 x_2^2 + \vartheta x_0 x_1^2 x_2 + \iota x_1^4, \\ h_0 = {} & \eta x_0^2 x_2^2 + \vartheta x_0 x_1^2 x_2 + \iota x_1^4 + \varkappa x_0 x_1 x_2^2 + \lambda x_0 x_2^3 \\ & + \mu x_1^3 x_2 + \nu x_1^2 x_2^2 + o x_1 x_2^3 + \pi x_2^4. \end{aligned}$$

Nehmen wir $\vartheta^2 - 4 \iota \eta \neq 0$ an, so hat f_0 einen Berührungsknoten (Doppelpunkt mit zwei sich zweipunktig berührenden Zweigen) in (0, 0, 1)

und h_0 einen Berührungsknoten in (1, 0, 0). Sonst sind beide Kurven völlig beliebig. Wir schließen:

Zwei Kurven 4. Ordnung mit Berührungsknoten sind immer uneigentlich projektiv.

Wir bemerken noch, daß zwei solche Kurven nicht immer projektiv, ja nicht einmal birational äquivalent sein müssen. Aus dem Doppelpunkt kann man nämlich, falls keine weiteren Doppelpunkte vorhanden sind, außer der Doppelpunktstangente vier verschiedene Tangenten an die Kurve ziehen. Deren Doppelverhältnis ist eine birationale Invariante der Kurve und kann natürlich für verschiedene Kurven verschieden ausfallen.

Es sei Γ eine irreduzible Kurve mit nur gewöhnlichen Knotenpunkten, d. h. Doppelpunkten mit getrennten Tangenten. Wir wollen untersuchen, welche Kurven zu ihr uneigentlich projektiv sind.

Diejenige Seite der Geraden G, auf der die Ungleichung (1) gilt, nennen wir die linke Seite. Auf der linken Seite von G oder auf G müssen mindestens zwei Ecken des Fundamentaldreiecks liegen, da sonst f_0 reduzibel sein würde. Es seien etwa die Ecken $(n, 0, 0)$ und $(0, n, 0)$. Liegt die dritte Ecke auf G, so liegen rechts von G keine Gitterpunkte und auf G höchstens die einer Seite des Dreiecks Δ; also ist dann

$$h_0 = \alpha_0 x_1^n + \alpha_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + \alpha_n x_2^n,$$

d. h. die Kurve Ω zerfällt in lauter Geraden durch einen Punkt.

Wir nehmen nun an, die dritte Ecke $(0, 0, n)$ liege rechts von G. G schneide die beiden durch diese Ecken gehenden Seiten in den Punkten $(i_1, 0, l_1)$ und $(0, k_2, l_2)$ mit $i_1 + l_1 = k_2 + l_2 = n$.

Die Gleichung von G lautet dann

$$\frac{i}{i_1} + \frac{k}{k_2} = 1.$$

Links von G gilt $>$ statt $=$, rechts von G $<$. Für die Glieder von f_0 gilt also $\geqq$ und für die von h_0 gilt $\leqq$. Wir können $i_1 \leqq k_2$ annehmen. Dann ist $i_1 \leqq 2$, denn sonst würden in f_0 die Glieder mit x_2^n, x_2^{n-1} und x_2^{n-2} fehlen und Γ hätte einen dreifachen Punkt. Wir unter scheiden nun drei Fälle:

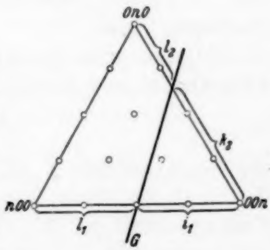


Fig. 2.

Fall 1. $i_1 = 2$, $k_2 > 2$. Dann fehlen in f_0 die Glieder mit x_2^n und x_2^{n-1}, sowie die mit x_2^{n-2} mit Ausnahme von $x_0^2 x_2^{n-2}$. Also hat Γ eine Spitze oder eine höhere Singularität in $(0, 0, 1)$, entgegen der Voraussetzung.

Fall 2. $i_1 = 2$, $k_2 = 2$. Dann kommen in h_0 nur die Glieder mit x_2^{n-2}, x_2^{n-1} und x_2^n vor; also besteht Ω aus einer $(n-2)$-fachen Geraden und einem Kegelschnitt.

Fall 3. $i_2 < 2$. In h_0 fehlen alle durch x_0^2 teilbaren Glieder. Die Kurve Ω hat also einen $(n-1)$-fachen oder n-fachen Punkt in (1, 0, 0). Sie besteht daher aus Geraden durch diesen Punkt O und (oder) einer rationalen Kurve, welche von jeder Geraden durch O außer in O nur in einem Punkte geschnitten wird. Diese letzte Beschreibung paßt auch auf den Fall 2. Wir haben also

Satz 2. *Ist eine irreduzible Kurve Γ, die keine Singularitäten außer Knotenpunkten hat, zu einer Kurve Ω uneigentlich projektiv, so besteht Ω ausschließlich aus Geraden durch einen festen Punkt O und (oder) einer rationalen Kurve, die von jeder Geraden durch O außer in O nur in einem Punkte geschnitten wird.*

§ 2.

Die regulären Kurven vom Geschlechte p und ihre birationalen Abbildungen.

Die Brill-Noethersche geometrische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen wird in diesem Paragraphen als bekannt vorausgesetzt. Für eine moderne, strenge Begründung dieser Theorie siehe etwa die Dissertation von W.-L. Chow in diesem Bande der Math. Annalen (S. 655—682).

Wir nennen eine Kurve *regulär*, wenn sie keine anderen Singularitäten als gewöhnliche Knotenpunkte hat.

Satz 3. *Die regulären Kurven vom Grade n und vom Geschlechte p verteilen sich auf einige irreduzible Mannigfaltigkeiten I_ν von der Dimension $3n+p-1$, deren allgemeine Elemente tatsächlich regulär und vom Geschlechte p sind.*

Beweis. Die Anzahl d der Knotenpunkte einer regulären Kurve n-ten Grades vom Geschlechte p ist

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p.$$

Wir bezeichnen mit Σ immer ein System von d verschiedenen Punkten $Q_1, \ldots, Q_d$ der Ebene, und mit Γ eine Kurve $f = 0$, welche in $Q_1, \ldots, Q_d$ Knotenpunkte hat. Die Gesamtheit aller Paare (Σ, Γ) wird durch die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} f(Q_k) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots, d) \tag{6}$$

und durch einige Ungleichungen gegeben, die ausdrücken, daß $Q_j \neq Q_k$ und daß Q_k nur ein gewöhnlicher Knotenpunkt von f ist. Wir lassen

die Ungleichungen weg und betrachten die durch die Gleichungen (6) definierte algebraische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$, verabreden dabei aber gleichzeitig, daß diejenigen irreduziblen Teile von $\mathfrak{K}$, welche gar keine regulären, d. h. die Ungleichungen erfüllenden Paare (Σ, Γ) enthalten, außer Betracht zu lassen sind. Wir wollen nun beweisen, daß alle übrig bleibenden irreduziblen Teile der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ genau die Dimension $N - d$ haben, wobei d die Anzahl der vorgeschriebenen Knotenpunkte Q_k und

$$N = \frac{n(n+3)}{2}$$

ist. Mit anderen Worten, wir beweisen, daß die durch (6) definierte Mannigfaltigkeit in jedem regulären Punkte (Σ, Γ) die Dimension $N - d$ hat. Darüber hinaus zeigt sich, daß die regulären Punkte von $\mathfrak{M}$ auch *einfache* Punkte von $\mathfrak{M}$ sind.

Die Elemente (Σ, Γ) gehören einem $(2d + N)$-dimensionalen $(d + 1)$-fach projektiven Raum an. Wenn es sich aber nur um die Umgebung einer einzelnen Stelle (Σ, Γ) handelt, so kann man inhomogene Koordinaten einführen und zum affinen $(2d + N)$-dimensionalen Raum übergehen. Wenn wir nun zeigen, daß die Tangentialhyperebenen der $3d$ Hyperflächen (6) an jeder regulären Stelle (Σ, Γ) linear-unabhängig sind, so folgt daraus, daß ihr Durchschnitt an dieser Stelle keine höhere Dimension als $(2d + N) - 3d = N - d = 3n + p - 1$ haben kann. Daß die Dimension auch nicht niedriger sein kann, folgt aus einem allgemeinen Satz über Durchschnitte von Mannigfaltigkeiten mit Hyperflächen[6]).

In inhomogenen Koordinaten lauten die Gleichungen (6)

$$(7)\qquad \begin{cases} f(x_k, y_k) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_k} f(x_k, y_k) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial y_k} f(x_k, y_k) = 0. \end{cases}$$

Ist $f + df$ eine Nachbarform von f und sind $(x_k + dx_k,\ y_k + dy_k)$ Nachbarpunkte zu (x_k, y_k), so daß (df, dx_k, dy_k) eine Tangentialrichtung an die Hyperflächen (7) bildet, so folgt aus (7) durch Differentiation

$$(8)\qquad \begin{cases} df(x_k, y_k) + \dfrac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + \dfrac{\partial f}{\partial y_k} dy_k = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_k} df(x_k, y_k) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} dx_k + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial y_k} dx_k = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial y_k} df(x_k, y_k) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial y_k} dx_k + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_k^2} dy_k = 0. \end{cases}$$

Wir haben zu zeigen, daß diese linearen Gleichungen für die dx_k, dy_k und die Koeffizienten der Form df untereinander linear-unabhängig sind.

[6]) B. L. v. d. Waerden, ZAG I, § 2, Math. Annalen 108, S. 120.

Im Fall eines gewöhnlichen Knotenpunktes ist $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$, also kann man aus den letzten beiden Gleichungen (8) die Differentiale $d x_k$ und $d y_k$ berechnen. Die erste Gleichung (8) ergibt wegen (7), wenn $d f = g$ gesetzt wird,

$$(9) \qquad g(x_k, y_k) = 0,$$

d. h., die Kurve $g = 0$ geht durch den Punkt Q_k hindurch. Wir haben noch zu zeigen, daß die linearen Gleichungen (9) für die Koeffizienten der Form g linear unabhängig sind.

Dieser Nachweis wird wie bei Severi[1]) durch eine einfache Abzählung geführt. Die Bedingungen (9) drücken aus, daß die Kurve n-ter Ordnung g zu der Kurve n-ter Ordnung f adjungiert ist. Die lineare Schar dieser adjungierten Kurven schneidet aus f eine Vollschar von Punktgruppen von der Ordnung $n^2 - 2d = n^2 - (n-1)(n-2) + 2p = 3n + 2p - 2$ aus, welche keine Spezialschar ist und daher nach dem Riemann-Rochschen Satz die Dimension $3n + p - 2$ hat. Die Dimension der Schar der Kurven g ist, da die Kurve f selbst auch noch zu dieser Schar gehört, $3n + p - 1$, d. h. es gibt $3n + p$ linear-unabhängige Formen g, welche die Adjungiertheitsbedingungen (9) erfüllen. Da es insgesamt $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ linear-unabhängige Formen n-ten Grades gibt, so gibt es unter den linearen Gleichungen (9) genau

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3n - p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p = d$$

linear-unabhängige, was zu beweisen war[6]).

Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ der Paare (Σ, Γ) besteht also aus lauter Bestandteilen der Dimension $N - d$. Es sei $\mathfrak{K}_\nu$ ein solcher Bestandteil. Jeder Kurve Γ entsprechen nur endlich viele Punktsysteme Σ, also bilden die Kurven Γ, die zu den Paaren (Σ, Γ) von $\mathfrak{K}_\nu$ gehören, eine irreduzible Mannigfaltigkeit I_ν von der Dimension $N - d = 3n + p - 1$. Die allgemeine Kurve von I_ν kann außer den d Doppelpunkten nicht noch weitere Singularitäten haben, denn sonst wäre die Dimension des Systems höchstens $N - d - 1$. Also hat die allgemeine Kurve von I_ν wirklich das Geschlecht

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$$

und ist regulär.

Damit ist Satz 3 in allen Teilen bewiesen.

---

[6]) Dieser Beweis gilt bei sinngemäßer Anwendung des Riemann-Rochschen Satzes auch für reduzible Kurven. Man kann aber auch, wie Severi es tut, mittels des Noetherschen Fundamentalsatzes den Fall der reduziblen Kurven auf den der irreduziblen zurückführen.

Genau wie bei Severi[1]) beweist man weiter mit Hilfe vollständig zerfallender Kurven, daß es für $d \leqq \frac{1}{2}n(n-1)$ tatsächlich reguläre Kurven vom Geschlecht $p = \binom{n-1}{2} - d$ gibt, und daß es für $d \leqq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ sogar irreduzible reguläre Kurven vom Geschlecht p gibt, daß also unsere Mannigfaltigkeiten nicht leer sind.

Severi hat weiter bewiesen, daß die irreduziblen Kurven n-ten Grades mit d Knotenpunkte für $d \leqq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ eine einzige irreduzible Mannigfaltigkeit bilden, d. h. also, daß es nicht mehrere Systeme I_ν, sondern nur ein System I_1 gibt. Da wir dieses Ergebnis hier aber nicht brauchen, so werden wir weiterhin von den Systemen I_ν reden.

Satz 4. *Die zu einer gegebenen irreduziblen Kurve Γ des Geschlechtes p und der Ordnung $n > 2p-2$ birational äquivalenten Kurven der gleichen Ordnung gehören einer irreduziblen Mannigfaltigkeit von der Dimension $3n - 2p + 2 - \varrho$ an, deren allgemeines Element tatsächlich irreduzibel und zu Γ birational äquivalent ist. Dabei ist $\varrho = 0$ für $p > 1$, $\varrho = 1$ für $p = 1$ und $\varrho = 3$ für $p = 0$ (es gibt ∞^ϱ birationale Transformationen von Γ in sich).*

Beweis. Jede birationale Abbildung wird durch eine Schar g_n^2 vermittelt. Diese ist in einer Vollschar g_n^r enthalten, welche durch eine einzelne Punktgruppe $P_1, \ldots, P_n$ bestimmt wird und durch adjungierte Kurven ausgeschnitten wird. Die Schar ist wegen $n > 2p-2$ nicht spezial, also ist $r = n - p$, und $P_1, \ldots, P_n$ können alle verschieden und außerhalb der vielfachen Punkte von Γ gewählt werden. Durch $P_1, \ldots, P_n$ kann man immer eine adjungierte Kurve von der Ordnung $n-1$ legen, denn die Schar der adjungierten Kurven von der Ordnung $n-1$ hat nach bekannten Rechnungen die Dimension $p + 2n - 2 \geqq n$. Welche adjungierte Kurve man wählt, ist für die Vollschar g_n^r vollkommen gleichgültig, da diese allein durch die Punktgruppe $P_1, \ldots, P_n$ bestimmt wird. Man kann also von vornherein aus der Schar der adjungierten Kurven der Ordnung $n-1$ eine Teilschar der Dimension n auswählen, von welcher durch $P_1, \ldots, P_n$ nur eine einzige Kurve geht. Diese adjungierte Kurve $g = 0$ schneidet die Kurve außer in $P_1, \ldots, P_n$ und außer in den Doppelpunkten $Q_1, \ldots, Q_d$ noch in Punkten $R_1, \ldots, R_s$. Drei willkürliche adjungierte Kurven $g = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ durch $R_1, \ldots, R_s$ schneiden aus der Kurve Γ drei Punktgruppen der Schar g_n^2 aus. Die gesuchte birationale Abbildung wird dann durch

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} y_0 = g_0(x), \\ y_1 = g_1(x), \\ y_2 = g_2(x) \end{cases}$$

gegeben.

Die Punktgruppen $P_1, \ldots, P_n$ auf Γ bilden eine irreduzible n-dimensionale Mannigfaltigkeit: alle sind relationstreue Spezialisierungen einer allgemeinen Punktgruppe. Durch $P_1, \ldots, P_n$ ist die Form g rational bestimmt. Die Koordinaten von $R_1, \ldots, R_s$ sind algebraische Funktionen, ihre symmetrischen Funktionen rationale Funktionen der Koeffizienten von g und von der Gleichung $f = 0$ von Γ. g_0, g_1, g_2 sind Lösungen von linearen Gleichungen: sie müssen zu Γ adjungiert sein und durch $R_1, \ldots, R_s$ gehen. Sie gehen also durch relationstreue Spezialisierung aus der allgemeinen Lösung dieses Gleichungssystems hervor. Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination mit unbestimmten Koeffizienten von gewissen speziellen Lösungen, in denen gewisse Koordinaten $= 0$ und andere $= 1$ sind. Diese speziellen Lösungen hängen symmetrisch von den Koordinaten von $R_1, \ldots, R_s$ und daher rational von den Koeffizienten von g ab. Die Anzahl der unbestimmten Parameter in der allgemeinen Lösung ist $r + 1 = n - p + 1$, wobei $r = n - p$ die Dimension der Vollschar g_n^r ist. In den drei Lösungen g_0, g_1, g_2 stecken also $3(n - p + 1)$ Parameter, von denen ein willkürlicher Proportionalitätsfaktor, der für (10) nichts ausmacht, abzuziehen ist. Zählt man noch die n Parameter hinzu, von der die Punktgruppe $P_1, \ldots, P_n$ abhängt, so erhält man $4n - 3p + 2$ Parameter. Für allgemeine Parameter ist die Schar g_n^2 einfach und frei von festen Punkten, also die Abbildung (10) birational. Die Bildkurve hat den Grad n und ihre Gleichung $h = 0$ ist durch die Bedingung

$$\gamma h(g_0(x), g_1(x), g_2(x)) = q(x) f(x) \tag{11}$$

eindeutig und rational bestimmt. Eine Mehrdeutigkeit in der Bestimmung der Kurve h, die nach (11) alle Punkte der Bildkurve enthalten muß, könnte nämlich nur dann eintreten, wenn die Bildkurve einen Grad $< n$ hätte. Man erhält ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten von h, indem man aus (11) die Koeffizienten von $q(x)$ und den Faktor γ, die alle linear homogen vorkommen, eliminiert.

Das Gebilde, das aus n Punkten $P_1, \ldots, P_n$, einer Abbildung (10) und einer Bildkurve Ω besteht, hängt also von $4n - 3p + 2$ wesentlichen Parametern derart ab, daß man für unbestimmte Werte der Parameter ein „allgemeines Gebilde" erhält, aus welchem alle speziellen birationalen Abbildungen durch relationstreue Spezialisierung entstehen. Die Gebilde dieser Art bilden also eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit von der Dimension $4n - 3p + 2$.

Daher bilden auch die Bildkurven Ω eine irreduzible Mannigfaltigkeit. Ihre Dimension wird nach dem Prinzip der Konstantenzählung gefunden, indem man von der Zahl $4n - 3p + 2$ die Zahl der Freiheitsgrade sub-

trahiert, die für die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ und für die Abbildung (10) noch zur Verfügung stehen, wenn die Bildkurve Ω *vorgegeben* ist.

Die Kurve Γ hat bekanntlich, wenn $\varrho = 0$ für $p > 1$, $\varrho = 1$ für $p = 1$ und $\varrho = 3$ für $p = 0$ gesetzt wird, ∞^ϱ birationale Transformationen in sich. Bei gegebenen birational äquivalenten Kurven Γ, Ω gibt es also ∞^ϱ birationale Abbildungen von Γ auf Ω. Bei einer gegebenen Abbildung kann die Punktgruppe $(P_1, \ldots, P_n)$ noch willkürlich innerhalb einer Vollschar von der Dimension $n - p$ gewählt werden. Die gesuchte Anzahl der Freiheitsgrade ist also $n - p + \varrho$. Für die Dimension der Mannigfaltigkeit der Kurven Ω erhält man somit

$$(4n - 3p + 2) - (n - p + \varrho) = 3n - 2p + 2 - \varrho.$$

Damit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß die algebraische Abhängigkeit der Bildkurve Ω von den angegebenen Parametern auch dann noch bestehen bleibt, wenn man außerdem noch die Koordinaten der Kurve Γ veränderlich macht. Man beschränkt sich dabei am besten auf reguläre Kurven und läßt die Kurve Γ und das System ihrer Doppelpunkte eines der im Beweis von Satz 3 erwähnten irreduziblen Systeme $\mathfrak{K}_\nu$ durchlaufen. Die Berechnung der Formen g, g_1, g_2, g_3, h verläuft dann reibungslos nach dem obigen Schema, und man findet *eine irreduzible Mannigfaltigkeit von Kurvenpaaren* (Γ, Ω), *deren allgemeines Element ein birational äquivalentes Kurvenpaar ist, und die alle birational äquivalenten Kurvenpaare umfaßt, bei denen* Γ *regulär ist und dem System* I_ν *angehört.*

Bis hierher sind wir im wesentlichen Severi gefolgt. Aus den Sätzen 3 und 4 würde nach dem Prinzip der Konstantenzählung ohne weiteres folgen, daß die Klassen birational äquivalenter Kurven von $3p - 3 + \varrho$ wesentlichen Konstanten abhängen, wenn man eine algebraische Korrespondenz hätte, welche diese Klassen eineindeutig auf Punkte einer Bildmannigfaltigkeit abbilden würde. In der Herstellung dieser Korrespondenz liegt aber erst die eigentliche Schwierigkeit, die wir in § 3 zu lösen haben.

§ 3.

Grenzfälle birational äquivalenter Kurvenpaare.

Wir untersuchen die Grenzfälle birationaler Äquivalenz in derselben Weise, wie wir in § 1 die Grenzfälle algebraischer Äquivalenz untersucht haben. Dabei sprechen wir von einem „Grenzübergang" $t \to 0$, wobei in Wirklichkeit ein rein algebraischer Prozeß gemeint ist: Man setzt in einem System von Potenzreihen, welche algebraische Funktionen dar-

stellen, $t = 0$. Handelt es sich dabei um homogene Koordinaten eines Punktes (oder einer Kurve, einer Ebene usw.), so sind die fraglichen Potenzreihen vorher mit einer passenden Potenz zu multiplizieren, damit für $t = 0$ keine Koordinaten unendlich und nicht alle Null werden können. In diesem Sinne hat jeder von t abhängige Punkt, dessen Koordinaten Potenzreihen in t sind, einen Grenzpunkt für $t \to 0$.

Es seien $\Gamma(t)$ und $\Omega(t)$ zwei birational äquivalente, von t abhängige Kurven vom Grade n. Die rationale Abbildung von $\Gamma(t)$ auf $\Omega(t)$ sei durch (10) gegeben. Die Formen g_0, g_1, g_2 können wieder vom Grade $n - 1$ gewählt werden.

Die Formen g_0, g_1, g_2 sind für allgemeines t linear unabhängig, brauchen es aber für $t = 0$ nicht zu bleiben. Die lineare Schar $\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ hat jedoch für $t \to 0$ eine bestimmte Grenzlage. Um das einzusehen, bilde man die Kurven $(n-1)$-ter Ordnung auf die Punkte eines projektiven Raumes S_N ab; einer linearen Schar $\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ entspricht dann eine Ebene $\varepsilon(t)$ in S_N, die durch ihre Plückerschen Koordinaten gegeben wird. Für $t = 0$ hat diese Ebene eine bestimmte Grenzlage $\varepsilon(0)$. Es ist leicht möglich, in der Ebene $\varepsilon(t)$ drei Punkte auszuwählen, deren Koordinaten Potenzreihen in t sind, und welche für $t = 0$ drei linear unabhängige Punkte von $\varepsilon(0)$ ergeben. (Es genügt z. B., $\varepsilon(t)$ mit drei passend gewählten Räumen S_{N-2} in S_N zum Schnitt zu bringen.) Diesen drei Punkten entsprechen nun wieder Formen $g_0^*(x, t)$, $g_1^*(x, t)$, $g_2^*(x, t)$, welche sowohl für allgemeine t als auch für $t = 0$ linear unabhängig sind und von denen g_0, g_1, g_2 drei Linearkombinationen sind.

Wir nehmen nun Γ als *irreduzible* Kurve an. Die Abbildung

$$(12)\qquad \begin{aligned} y_0^* &= g_0^*(x, t),\\ y_1^* &= g_1^*(x, t),\\ y_2^* &= g_2^*(x, t) \end{aligned}$$

bildet $\Gamma(t)$ auf eine Kurve $\Delta(t)$ ab, die zu $\Omega(t)$ projektiv äquivalent ist. Durch Einschaltung dieser Kurve $\Delta(t)$ haben wir das Problem der Bestimmung der Kurvenpaare Γ, Ω in zwei Teilprobleme gespalten; Γ, Δ bilden einen Grenzfall eines birational äquivalenten Kurvenpaares $\Gamma(t)$, $\Delta(t)$, wobei die Abbildungsfunktionen g_ν^* noch für $t = 0$ linear unabhängig bleiben, während Δ, Ω einen Grenzfall eines projektiv äquivalenten Kurvenpaares, also ein uneigentlich projektives Kurvenpaar im Sinne von § 1 bilden.

Die Abbildung (12) ergibt für $t = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit der $g_\nu^*(0)$ jedenfalls eine rationale Abbildung der Kurve Γ auf eine Kurve Δ^*, welche keine Gerade ist. Die Kurve Δ^* kann natürlich einen

niedrigeren Grad als n haben und die Abbildung braucht nicht birational zu sein. Es gilt aber folgendes: Eine beliebige Kurve $\Sigma \lambda_\nu g_\nu^*(x, t)$ schneidet die Kurve $\Gamma(t)$ außer in gewissen festen Punkten in n Punkten $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$, welche durch die Abbildung (12) in die n Schnittpunkte der Kurve $\Delta(t)$ mit der Geraden $\Sigma \lambda_\nu y_\nu^* = 0$ übergeführt werden. Für $t \to 0$ streben $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ gegen gewisse Grenzpunkte $\xi_0^{(1)}, \ldots, \xi_0^{(n)}$. Die Tatsache, daß die Bildpunkte $g(\xi^{(1)}), \ldots, g(\xi^{(n)})$ auf $\Delta(t)$ und auf $\Sigma \lambda_\nu y_\nu^* = 0$ liegen, bleibt natürlich für $t = 0$ bestehen, soweit diese Bildpunkte nicht unbestimmt werden. Also ist Δ^* als Bestandteil in Δ enthalten. Ist nun die Abbildung für $t = 0$ nicht birational, so ist die durch $\Sigma \lambda_\nu g_\nu^*(x, 0)$ aus Γ ausgeschnittene Schar nicht mehr einfach, also ergibt eine gewisse Anzahl von Schnittpunkten, etwa $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(\mu)}$, denselben Bildpunkt $g^*(\xi)$. Das heißt, für $t \to 0$ rücken die Punkte $g^*(\xi^{(1)}), \ldots, g^*(\xi^{(\mu)})$, Schnittpunkte von Δ mit $\Sigma \lambda_\nu y_\nu^* = 0$, in einen Punkt zusammen. Dieser Punkt muß dann ein μ-facher Schnittpunkt sein, und da die Gerade $\Sigma \lambda_\nu y_\nu^* = 0$ ganz beliebig ist, so ist der Bestandteil notwendigerweise μ-mal in Δ enthalten. *Die Kurve Δ enthält also als Bestandteil entweder eine zu Γ birational-äquivalente Kurve Δ^* oder eine mehrfach gezählte Kurve Δ^*, die keine Gerade ist.*

Nun setzen wir voraus, daß Γ und Ω beide irreduzibel sind, daß Γ nicht rational ist und daß Ω keine anderen Singularitäten als Knotenpunkte hat. Dann enthält auf Grund des letzten Satzes Δ entweder einen nicht rationalen oder einen mehrfach gezählten nicht linearen Bestandteil. Demnach treffen für Δ die Behauptungen von Satz 2 nicht zu, also kann Δ zu Ω nicht uneigentlich projektiv sein. Daher sind Δ und Ω eigentlich projektiv, d. h. Δ ist irreduzibel und vom Grade n. Dann ist aber Γ zu Δ, also auch zu Ω birational äquivalent.

Damit ist bewiesen:

Satz 5. *Wenn zwei Kurven n-ten Grades Γ und Δ beide irreduzibel sind und wenn Γ nicht rational und Ω regulär ist (d. h. nur gewöhnliche Knotenpunkte hat), und wenn das Paar (Γ, Ω) einen Grenzfall eines birational äquivalenten Kurvenpaares bildet, so sind Γ und Ω selber birational äquivalent.*

Betrachten wir jetzt die in § 2 zuletzt konstruierte irreduzible Mannigfaltigkeit von Kurvenpaaren, deren allgemeines Element (Γ, Ω) birational äquivalent ist. Aus Satz 5 folgt, daß die speziellen Kurvenpaare (Γ, Ω) dieser Mannigfaltigkeit, soweit Γ regulär ist und Γ, Ω beide irreduzibel sind, ebenfalls birational äquivalent sind. Wir haben also

Satz 6. *Die Paare (Γ, Ω) von irreduziblen birational äquivalenten Kurven n-ten Grades vom Geschlechte $p > 1$, bei denen mindestens eine Kurve*

regulär ist, verteilen sich auf endlich viele irreduzible Mannigfaltigkeiten, derart, daß auch umgekehrt jedes Paar (Γ, Ω) *einer solchen Mannigfaltigkeit birational äquivalent ist, sofern nur die Kurven* Γ *und* Ω *beide irreduzibel und von positivem Geschlecht sind, und mindestens eine von ihnen regulär ist.*

Die Mannigfaltigkeit dieser Paare (Γ, Ω) heißt im folgenden die „Korrespondenz $\mathfrak{B}$“, ihre irreduziblen Bestandteile, bei denen Γ und Ω zu I_ν gehören, heißen $\mathfrak{B}_\nu$.

§ 4.

Die Modulmannigfaltigkeit.

Wir beschränken uns auf reguläre irreduzible Kurven vom Geschlechte p eines Systems I_ν (§ 2). Die Korrespondenz $\mathfrak{B}_\nu$ ordnet jeder solchen Kurve Γ eine $(3n - 2p + 2 - \varrho)$-dimensionale irreduzible Mannigfaltigkeit von Kurven Ω zu, die (wieder unter Beschränkung auf reguläre irreduzible Kurven) zu Γ birational äquivalent sind. Diese Mannigfaltigkeit bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_\Gamma$ und nehmen dabei Γ zunächst als allgemeines Element von I_ν an. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}_\Gamma$ kann nach ZAG IX[2]) durch einen Punkt P_Γ eines Raumes S_h dargestellt werden. Durchläuft Γ die Mannigfaltigkeit I_ν, so durchläuft $\mathfrak{P}_\Gamma$ nach ZAG IX, Satz 5, ein irreduzibles algebraisches System von Mannigfaltigkeiten, d. h. der Bildpunkt P_Γ durchläuft eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_\nu$. Nach Satz 4 (s. o. § 2) ist einem speziellen Punkt Γ ebenfalls eine genau $(3n - 2p + 2 - \varrho)$-dimensionale irreduzible Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}_\Gamma$ zugeordnet. Zählt man diese mit der richtigen Vielfachheit, so gehört sie (nach Satz 4 aus ZAG IX) ebenfalls dem algebraischen System von Mannigfaltigkeiten an, d. h. ihr Bildpunkt P_Γ gehört zu $\mathfrak{M}_\nu$. Wir erhalten so eine irreduzible Korrespondenz zwischen den Kurven Γ und den Bildpunkten P_Γ, welche jeder Kurve einen Bildpunkt P_Γ zuordnet, während allen zu Γ birational äquivalenten Kurven, soweit sie wieder regulär sind, derselbe Bildpunkt entspricht. Wir nennen $\mathfrak{M}_\nu$ die *Modulmannigfaltigkeit* des irreduziblen Kurvensystems I_ν. Wenden wir auf die eben erwähnte Korrespondenz das Prinzip der Konstantenzählung an, so folgt, da I_ν die Dimension $3n + p - 1$ hat, für die Dimension von $\mathfrak{M}_\nu$ der Wert

$$(3n + p - 1) - (3n - 2p + 2 - \varrho) = 3p - 3 + \varrho.$$

Damit haben wir den Hauptsatz dieser Arbeit bewiesen:

Satz 7. *Es gibt eine algebraische Korrespondenz, welche jeder regulären Kurve* Γ *vom Geschlechte* $p \geqq 1$ *des irreduziblen Kurvensystems* I_ν *einen Punkt* P_Γ *einer* $(3p - 3 + \varrho)$*-dimensionalen irreduziblen Modul-*

mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1$ *eindeutig zuordnet, derart, daß zwei reguläre Kurven dann und nur dann birational äquivalent sind, wenn ihnen derselbe Punkt von* $\mathfrak{M}_1$ *zugeordnet wird. Dabei ist* $\varrho = 1$ *für* $p = 1$ *und* $\varrho = 0$ *für* $p > 1$.

In Wirklichkeit gibt es, wie wir in § 2 schon bemerkten, nur *ein* irreduzibles Kurvensystem I_1 und daher auch nur *eine* irreduzible Modulmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1$. Die obige schwächere Formulierung wurde nur gewählt in dem Bestreben, in dieser Arbeit nur solche Sätze aufzustellen, deren vollständiger Beweis aus der Arbeit selbst entnommen werden kann.

Da die Korrespondenz in einer Richtung eindeutig ist, so ist sie rational. Die Moduln einer allgemeinen Kurve des irreduziblen Systems I_1 sind also rationale Funktionen der Koeffizienten der Gleichung dieser Kurve.

(Eingegangen am 19. 3. 1937.)

Über eine Kovariante bei Cremona-Transformationen.

Von

Ott-Heinrich Keller in Berlin-Charlottenburg.

Um unsere Absicht deutlich zu machen, wollen wir uns an die Bildung der Hesseschen Kurve erinnern. Die Wendepunkte einer Kurve sind geometrische Invarianten gegenüber projektiven Transformationen. Wir kennen die Bereicherung, die die Kurventheorie durch die Einführung der Hesseschen Determinante erfahren hat, trotzdem sie geometrisch zunächst weiter nichts liefert als eben die Wendepunkte. Einmal ist dadurch der geometrische Sachverhalt, daß es eine dreipunktig schneidende Gerade gibt, in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise ins Algebraische übertragen und der algebraischen Behandlung zugänglich gemacht; aus der geometrischen Invariante ist eine algebraische Kovariante geworden. Außerdem haben wir die Möglichkeit gewonnen, die Gesamtheit aller Wendepunkte gleichzeitig zu betrachten: Es sind bis auf die Singularitäten die Nullstellen der Hesseschen Kovariante auf der Grundkurve.

Diese Algebraisierung hätten wir auch erreicht, wenn wir die Hessesche Determinante als Funktion des durch die Grundkurve definierten algebraischen Funktionenkörpers einer Veränderlichen angesehen hätten. Sprechen wir aber von der Hesseschen *Kurve*, so verlassen wir die Grundkurve und ihren Funktionenkörper und treten hinaus in die Ebene. Wir haben dann die Algebraisierung nicht einmal mit einer Verflüchtigung des anschaulich Gegebenen ins Abstrakte bezahlen müssen, sondern im Gegenteil: Statt einer Kurve, auf der einzelne Punkte mit einer doch schon etwas verwickelten Eigenschaft liegen, sehen wir eine Ebene, in der zwei Kurven sich in den fraglichen Punkten schneiden.

Eine ähnliche kovariante Bildung gegenüber Cremona-Transformationen liegt noch nicht vor — wenn man nicht die Adjungierten hierher rechnen will. Es sei die Aufgabe dieser Arbeit, eine solche der Betrachtung zugänglich zu machen.

Wir gehen aus von der einfachsten geometrischen Invarianten einer algebraischen Kurve gegenüber Cremona-Transformationen, den *Weierstraß-Punkten*. Man begegnet ihnen, wenn man von dem folgenden Weierstraßschen Lückensatz herkommt: Auf einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht p fehlen unter den Ordnungen der Funktionen, die nur in einem gegebenen Punkt P unendlich werden, genau p Zahlen, die Lücken. Bei

allgemeiner Wahl von P sind es die Zahlen $1, 2, \ldots, p$; sind es andere Zahlen, so heißt P ein Weierstraß-Punkt.

Mit einem Weierstraß-Punkt haben wir also eine geometrische Invariante: den Punkt auf der Kurve, und eine Reihe von arithmetischen Invarianten: die Lückenzahlen. Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, für die Weierstraß-Punkte dasselbe zu leisten, was durch Hesse für die Wendepunkte geleistet wurde; wir wollen eine für die Weierstraß-Punkte kennzeichnende algebraische Kovariante suchen, eine in der Ebene definierte Kurve, die die Grundkurve in den Weierstraß-Punkten schneidet, und aus deren algebraischem Verhalten in den Schnittpunkten wir die Lückenzahlen ablesen können. Ich schlage für sie den Namen *Weierstraß-Kurve* vor.

Wir werden dann zu zeigen haben, daß die Weierstraß-Kurven kovariant sind gegenüber Cremona-Transformationen. Dabei haben wir uns allerdings zweierlei vor Augen zu halten: setzen wir in die Gleichung einer Kurve den analytischen Ausdruck einer Cremona-Transformation ein, so erhalten wir die Gleichung der Bildkurve, multipliziert mit Potenzen der Gleichungen der Fundamentalkurven. Bei der Transformation einer einzelnen Kurve können wir verabreden, diese Faktoren zu streichen. Bei einer kovarianten Bildung steht uns diese Verabredung nicht frei, und wir müssen damit rechnen, daß nach der Transformation tatsächlich eine Potenz der Fundamentalkurven als Faktor stehen bleibt. Diese Erscheinung ist uns schon bei den Adjungierten bekannt.

Zweitens enthält aber auch die Grundkurve möglicherweise nach der Transformation zunächst selbst noch einen solchen Faktor; setzen wir sie in die kovariante Bildung ein, so ist gar nicht gesagt, daß sich die Fundamentalkurven dann als Faktor herausziehen lassen, sondern sie können in sehr viel verwickelterer Weise darin stehen. Damit sie nun den gesteckten Rahmen nicht sprengen, müssen wir ihn von vornherein weit genug stecken und für die Fundamentalkurven möglicher Cremona-Transformationen Platz lassen. Wir werden uns also nicht wundern dürfen, wenn wir nicht eine kovariante Kurve, sondern eine ganze, nicht einmal lineare Mannigfaltigkeit von Kurven bekommen, die nur als Gesamtheit kovariant ist; wir müssen gestatten, daß in die allgemeine Kurve unserer Mannigfaltigkeit noch eine Reihe von *willkürlichen Polynomen* eingeht, von denen wir nicht einmal den Grad beschränken können. (Man könnte sich dabei auf Produkte unikursaler Polynome beschränken, da nur solche als Fundamentalkurven von Cremona-Transformationen in Betracht kommen; wir wollen es nicht tun.)

Wir haben uns dann die Schnittpunkte von Weierstraß-Kurve und Grundkurve näher anzusehen. Eine Reihe von Schnittpunkten sind durch die willkürlichen Polynome bedingt und mit ihnen veränderlich, weitere

fallen in die Singularitäten der Grundkurve. Alle übrigen Schnittpunkte sind Weierstraß-Punkte. Damit haben wir die in den Weierstraß-Punkten liegenden geometrischen Invarianten umgedeutet.

Um nun auch die arithmetischen Invarianten, die Lücken, zu deuten, müssen wir die Singularitäten der Weierstraßkurve in den Weierstraß-Punkten betrachten. Wir werden ein Verfahren angeben, sie aus der Lückenverteilung zu berechnen. Es zeigt sich, daß von den kleinen Lückenzahlen bis $p+1$ nur Anzahl und Summe für die Singularität von Wichtigkeit sind, während von den großen Lückenzahlen von $p+2$ an jede einzeln am Bau der Singularität teilnimmt. Dementsprechend können wir umgekehrt aus der Singularität die Lücken von $p+2$ an, sowie Anzahl und Summe der kleineren Lücken ablesen. Trotzdem liefert uns die Singularität in manchen Fällen die ganze Lückenverteilung, wenn wir noch den trivialen Satz dazu nehmen, daß die Summe zweier Nicht-Lücken wieder eine Nicht-Lücke ist.

Wie wir schon oben angedeutet haben, verschiebt sich durch die Einführung der Weierstraß-Kurven der Blickpunkt von den einzelnen Weierstraß-Punkten hinweg auf das algebraische Gebilde, das durch ihre Gesamtheit dargestellt wird. Es ergeben sich naturgemäß Fragen etwa dieser Art: Können auf einer Kurve Weierstraß-Punkte mit verschiedenen Lückenverteilungen zusammen auftreten? Das ist sicher der Fall. Kann man aber die Lückenverteilungen verschiedener Weierstraß-Punkte derselben Kurve willkürlich vorschreiben? Diese Frage ist zu verneinen. Ist z. B. ein Weierstraß-Punkt hyperelliptisch, so sind sie es alle. Oder: Auf einer Kurve vom Geschlecht 4 können Weierstraß-Punkte mit den Lückenverteilungen 12.45 und 12.4..7 nicht gleichzeitig vorkommen. Allgemeinere Ergebnisse liegen noch nicht vor, und ich hoffe, später einmal darauf zurückzukommen. Wir gewönnen damit eine invariante Einteilung der algebraischen Kurven in Klassen.

Sehr viel schwieriger scheint mir die Behandlung der Frage zu sein, ob in der Gesamtheit der Weierstraß-Punkte noch kontinuierliche Invarianten stecken oder gar in solcher Anzahl, daß sich durch diese und die arithmetischen Invarianten die vollständige Klasseneinteilung der algebraischen Kurven gewinnen läßt, derart, daß zwei Kurven derselben Klasse dann auch birational äquivalent sind.

§ 1.

Aufstellung der Gleichung.

P sei ein Weierstraß-Punkt. Die Lücken fallen nicht mit den Zahlen $1, 2, \ldots, p$ zusammen, und es gibt eine Zahl zwischen 1 und p, die nicht Lücke ist, die also die Ordnung einer Funktion darstellt, die nur in P

unendlich wird. Um hieraus eine Gleichung für die Weierstraß-Punkte zu gewinnen, nehmen wir in bekannter Weise den Riemann-Rochschen Satz zu Hilfe: Die Anzahl q der linear unabhängigen Funktionen, die höchstens in einer Reihe von gegebenen Punkten höchstens mit gegebenen Vielfachheiten unendlich werden, ist gleich der Anzahl r der linear unabhängigen adjungierten Funktionen φ, die mindestens in jener Reihe gegebener Punkte mindestens mit den gegebenen Vielfachheiten verschwinden, vermehrt um die algebraische Anzahl Q der Punkte, vermindert um das Geschlecht p

$$q = Q + r - p.$$

In unserem Fall ist $Q = p$, $q \geqq 1$, also $r \geqq 1$; in einem Weierstraß-Punkt muß demnach mindestens eine adjungierte Funktion mindestens von der p-ten Ordnung verschwinden. Dafür können wir eine Bedingung aufstellen: Ist t eine Ortsuniformisierende, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ das System der adjungierten Funktionen, so ist

$$(1) \qquad w \equiv \begin{vmatrix} \varphi_1 & \frac{d\varphi_1}{dt} & \cdots & \frac{d^{p-1}\varphi_1}{dt^{p-1}} \\ \varphi_2 & \frac{d\varphi_2}{dt} & \cdots & \frac{d^{p-1}\varphi_2}{dt^{p-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_p & \frac{d\varphi_p}{dt} & \cdots & \frac{d^{p-1}\varphi_p}{dt^{p-1}} \end{vmatrix} = 0$$

die Bedingung dafür, daß P ein Weierstraß-Punkt ist. Diese Determinante ist eine Funktion der Riemannschen Fläche; außerhalb, in der (x, y)-Ebene ist sie gar nicht definiert.

Jetzt tun wir den Schritt in die Ebene hinaus: wir betrachten nicht mehr die Riemannsche Fläche als solche, sondern wir denken sie uns in eine komplexe (x, y)-Ebene eingebettet, $f(x, y) = 0$ als Gleichung einer Kurve in dieser Ebene. Aus den adjungierten Funktionen φ werden dann Kurven $\varphi = 0$, aus dem p-fachen Verschwinden von φ wird eine p-fache Berührung von $\varphi = 0$ und $f = 0$; und hierfür wollen wir jetzt eine Bedingung aufstellen.

Der Bequemlichkeit halber nehmen wir an, P liege im Nullpunkt und $f = 0$ gehe einfach durch P hindurch. Nun sind für das Berühren die Glieder von φ entscheidend, die in x und y zusammen einen kleineren Grad haben als p. Wir wollen ihre Summe mit $A(\varphi)$, die Summe der übrigen Glieder mit $R(\varphi)$ bezeichnen. Hat dann $A(\varphi) = 0$ mit $f = 0$ einen p-fachen Schnittpunkt, so hat auch $\varphi = A(\varphi) + R(\varphi) = 0$ mit $f = 0$ einen p-fachen Schnittpunkt. Denn die Kurven, die $f = 0$ in P

schneiden, bilden ein Ideal i, dem auch $R(\varphi)$ angehört. Wir müssen jetzt nur noch die Bedingung dafür ansetzen, daß $A(\varphi)$ dem Ideal i angehört.

Die Gesamtheit der Polynome bis zum $(p-1)$-ten Grad aus i bilden eine lineare Schar; wir wollen ihre Dimension bestimmen. Es gibt im ganzen $\frac{p(p+1)}{2}$ voneinander linear unabhängige Polynome bis zum Grade $p-1$. Das Ideal i legt nun dieser Schar p voneinander linear unabhängige Bedingungen auf, und es bleiben $\frac{p(p-1)}{2}$ voneinander linear unabhängige Polynome aus i übrig, die den Grad $p-1$ nicht überschreiten.

Wir wollen nun versuchen, uns eine Basis dieses Ideals zu verschaffen. Es seien mir $\frac{p(p-1)}{2}$ willkürliche Polynome, $a_1, a_2, \ldots a_{\frac{p(p-1)}{2}}$ gegeben. Die Polynome $(p-1)$-ten Grades

$$A(a_1\cdot f), A(a_2\cdot f) \ldots A\left(a_{\frac{p(p-1)}{2}}\cdot f\right) \tag{2}$$

gehören dem Ideal i an. Um ihre Unabhängigkeit zu untersuchen, wollen wir für einen Augenblick die Summe derjenigen Glieder von a, deren Grad in x und y nicht $p-2$ übersteigt, mit $B(a)$ bezeichnen. Ich behaupte nun, die Polynome (2) sind dann und nur dann voneinander unabhängig, wenn die Polynome $B(a_1)$, $B(a_2), \ldots, B\left(a_{\frac{p(p-1)}{2}}\right)$ es sind, wenn also die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & \frac{\partial a_1}{\partial x} & \frac{\partial a_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{p-2} a_1}{\partial y^{p-2}} \\ a_2 & \frac{\partial a_2}{\partial x} & \frac{\partial a_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{p-2} a_2}{\partial y^{p-2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\frac{p(p-1)}{2}} & \frac{\partial a_{\frac{p(p-1)}{2}}}{\partial x} & \frac{\partial a_{\frac{p(p-1)}{2}}}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{p-2} a_{\frac{p(p-1)}{2}}}{\partial y^{p-2}} \end{vmatrix} \text{[1]} \tag{3}$$

nicht verschwindet.

Wir haben also erstens zu beweisen, daß aus einer linearen Beziehung zwischen den Polynomen $B(a)$ eine solche zwischen den Polynomen $A(a, f)$ folgt. $\sum_{1}^{\frac{p(p-1)}{2}} \lambda_\nu B(a_\nu) = 0$ heißt doch $\sum_{1}^{\frac{p(p-1)}{2}} \lambda_\nu a_\nu = P_{p-1}$, wobei P_{p-1} ein Polynom ist, das nur Glieder vom Grad $p-1$ an aufwärts enthält. Daraus folgt aber $\sum_{1}^{\frac{p(p-1)}{2}} \lambda_\nu a_\nu f = P_{p-1}\cdot f$. Nun verschwindet f im Nullpunkt und

[1] Wir wollen im folgenden unter D immer diese Determinante verstehen.

enthält kein absolutes Glied; $P_{p-1} \cdot f$ enthält also nur Glieder vom p-ten Grade an aufwärts; die Glieder geringeren Grades heben sich weg: $\sum_{1}^{\frac{p(p-1)}{2}} \lambda_\nu A(a_\nu f) = 0$, wie behauptet.

Zum Beweis der Umkehrung machen wir den umgekehrten Schluß: $\sum_{1}^{\frac{p(p-1)}{2}} \lambda_\nu A(a_\nu f) = 0$ heißt $\sum_{1}^{\frac{p(p-1)}{2}} \lambda_\nu a_\nu f = P_p$, wo in P_p wieder nur Glieder vom p-ten Grade an aufwärts vorkommen. Da die linke Seite durch f teilbar ist, ist es auch die rechte: $P_p = R_{p-1} \cdot f$. Da f Glieder vom ersten Grad wirklich enthält, können in R_{p-1} keine Glieder von geringerem als dem $(p-1)$-ten Grade vorkommen. Kürzen wir durch f durch, so wird $\sum_{1}^{\frac{p(p-1)}{2}} \lambda_\nu a_\nu = R_{p-1}$ und $\sum_{1}^{\frac{p(p-1)}{2}} \lambda_\nu B(a_\nu) = 0$.

Wir haben jetzt in den Polynomen (2) eine Basis für das Ideal $\mathfrak{i}$ aller Polynome $(p-1)$-ten Grades gefunden, die $f = 0$ im Nullpunkt p-fach berühren, unter der Voraussetzung, daß $D \neq 0$. Am einfachsten und eindeutigsten können wir für die Polynome a eine Basis sämtlicher Polynome $(p-2)$-ten Grades wählen. Es gibt deren $\frac{p(p-1)}{2}$ linear unabhängige, also gerade soviel wie wir brauchen. Wir dürfen uns aber nicht auf diese spezielle Basis festlegen, ohne die Kovarianz gegenüber Cremona-Transformationen zu gefährden.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Bedingungsgleichung dafür aufstellen, daß P ein Weierstraß-Punkt ist: Es muß ein adjungiertes Polynom φ geben, das dem Ideal $\mathfrak{i}$ angehört, für das

$$A(\varphi) \equiv \sum_{1}^{\frac{p(p-1)}{2}} \lambda_\nu A(a_\nu f). \tag{4}$$

Nun kann ich aber doch für die adjungierten Polynome φ ebenfalls eine Basis $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ angeben, und $A(\varphi_1), A(\varphi_2), \ldots, A(\varphi_p)$ bilden dann eine Basis für die Polynome $A(\varphi)$. Gleichung (4) erscheint jetzt in der Gestalt:

$$\sum_{1}^{p} \mu_\varrho A(\varphi_\varrho) \equiv \sum_{1}^{\frac{p(p-1)}{2}} \lambda_\nu A(a_\nu f). \tag{5}$$

Die Polynome $A(\varphi)$ und $A(a \cdot f)$ haben $\frac{p(p+1)}{2}$ Koeffizienten und die Identität (5) läßt sich als ein System von $\frac{p(p+1)}{2}$ homogenen linearen

Gleichungen für die Größen λ und μ auffassen. Es gibt $\frac{p(p-1)}{2}$ Größen λ und p Größen μ, im ganzen $\frac{p(p+1)}{2}$ Unbekannte, gerade so viele als es Gleichungen gibt. Das Gleichungssystem ist nur dann nicht-trivial lösbar, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Nun ist der Koeffizient $\alpha_{\mu\nu}$ eines Potenzproduktes $x^\mu y^\nu$ in einem Polynom $F(x, y)$ $\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu!\,\nu!}\left(\frac{\partial^{\nu+\mu} F}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\right)_{x=y=0}$. Die Fakultäten bilden einen allen Zeilen gemeinsamen für uns unwesentlichen Faktor; wir lassen ihn weg und erhalten für die Determinante unseres Gleichungssystems die Gestalt

$$(6) \qquad W \equiv \begin{vmatrix} \varphi_1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{p-1} \varphi_1}{\partial y^{p-1}} \\ \varphi_2 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{p-1} \varphi_2}{\partial y^{p-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_p & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{p-1} \varphi_p}{\partial y^{p-1}} \\ a_1 f & \frac{\partial (a_1 f)}{\partial x} & \frac{\partial (a_1 f)}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{p-1} (a_1 f)}{\partial y^{p-1}} \\ a_2 f & \frac{\partial (a_2 f)}{\partial x} & \frac{\partial (a_2 f)}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{p-1} (a_2 f)}{\partial y^{p-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\frac{p(p-1)}{2}} f & \frac{\partial (a_{\frac{p(p-1)}{2}} f)}{\partial x} & \frac{\partial (a_{\frac{p(p-1)}{2}} f)}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{p-1} (a_{\frac{p(p-1)}{2}} f)}{\partial y^{p-1}} \end{vmatrix},$$

unter den Ableitungen den Wert am Nullpunkt verstanden. $W = 0$ *ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß P ein Weierstraß-Punkt ist.* Geht $f = 0$ einfach durch den Nullpunkt, und verschwindet dort die Determinante D nicht, so ist $W = 0$ auch eine hinreichende Bedingung.

§ 2.

Ein Hilfssatz.

Wir werden in folgendem die einzelnen Kolonnen dieser Determinante kennzeichnen müssen: die Kolonne $\left\{\begin{matrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \\ a_1 f \\ \vdots \\ a_{\frac{p(p-1)}{2}} f \end{matrix}\right\}$ sei mit K bezeichnet und

unter $\dfrac{\partial^{\nu+\mu} K}{\partial x^\nu\, \partial y^\mu}$ wollen wir die Kolonne $\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial^{\nu+\mu}\varphi_1}{\partial x^\nu\,\partial y^\mu} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{\nu+\mu} a_{\frac{p(p-1)}{2}} f}{\partial x^\nu\,\partial y^\mu} \end{matrix}\right\}$ verstehen.

Wir werden des öfteren ein Verfahren anzuwenden haben, das wir, um es immer zur Hand zu haben, die *vollständige Zerlegung* einer Determinante D_0 nennen wollen:

Eine Kolonne K_0 bestehe aus Produkten, deren einer Faktor für alle Elemente von K_0 derselbe ist: $K_0 = \left\{\begin{matrix} c_r d_1 \\ c\ d_2 \\ \vdots \\ c\ d_r \end{matrix}\right\}$, die Kolonne $\left\{\begin{matrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{matrix}\right\}$ wollen wir mit k bezeichnen. Die Kolonnen meiner Determinante D_0 seien Ableitungen von K_0.

Wir differenzieren nun aus. Dadurch werden aus den Elementen Polynome. Wir zerlegen die Determinante in eine Summe von solchen Determinanten, deren Kolonnen Produkte einer Ableitung von c und einer Ableitung von k sind. Wir können dann die Ableitungen von c als Faktoren vor die Determinanten ziehen. Diese Determinanten bestehen dann nur noch aus Ableitungen von k allein. Wir wollen sie *Teildeterminanten* von D_0 nennen. Wir haben damit D_0 als Linearform von Teildeterminanten dargestellt; die Koeffizienten sind Ableitungsprodukte von c.

D_0 bestehe nun im besonderen aus allen Ableitungen von K_0 nach x und y bis zur s-ten Stufe, also aus $\frac{s(s+1)}{2}$ Kolonnen. (W ist z. B. nach diesem Gesetz gebaut.) Führen wir die vollständige Zerlegung durch, so besteht jede Teildeterminante aus $\frac{s(s+1)}{2}$ Ableitungen von k höchstens der s-ten Stufe, also aus allen diesen Ableitungen. Es gibt demnach nur eine Teildeterminante, die Linearform schmilzt hier zu einem einzigen Gliede zusammen. Um seinen Koeffizienten zu bestimmen, bemerken wir, daß alle in D_0 für das Produkt $c \cdot k$ bereitgestellten Differentiationen schon für den Faktor k verbraucht sind, c ist überhaupt nicht differenziert und der Koeffizient ist $c^{\frac{s(s+1)}{2}}$. Wir haben also den

Satz. *Besteht eine Determinante aus allen Ableitungen einer Kolonne K_0 bis zur s-ten Stufe, so können wir einen allen Elementen von K_0 gemeinsamen Faktor in der Potenz $\frac{s(s+1)}{2}$ vor die Determinante ziehen.*

§ 3.

Homogene Form der Gleichung.

Für das folgende erweist es sich als wünschenswert, ja als unumgänglich, daß alle Elemente der Kolonne K denselben Grad haben. In (6) ist das nun durch keine Wahl der Polynome a zu erreichen: wir können sie nur alle vom gleichen Grade r wählen und dadurch wenigstens die Gleichheit der Grade der letzten $\frac{p(p-1)}{2}$ Elemente gewährleisten. Um unser Ziel zu erreichen, müssen wir die Definition von W noch etwas abändern: wir multiplizieren alle Polynome φ mit demselben, im übrigen beliebigen Polynom b vom $(r+3)$-ten Grade. Da die Adjungierten einen um 3 kleineren Grad haben als f, sind jetzt $b \cdot \varphi$ und $a \cdot f$ vom gleichen Grade. Die Adjungierten bleiben eine lineare Schar, und wenn b nicht gerade im Nullpunkt verschwindet, hat dort $b \cdot \varphi = 0$ ebensoviele Schnittpunkte mit $f = 0$ wie $\varphi = 0$ selbst. Dieses so veränderte Polynom W verschwindet im Nullpunkt nach wie vor dann und nur dann, wenn er entweder ein Weierstraß-Punkt oder ein vielfacher Punkt von $f = 0$ ist oder dort D oder b verschwinden. Dieses so veränderte W wollen wir unseren weiteren Betrachtungen zugrunde legen.

Bisher hatten wir W als eine Zahl aufgefaßt, indem wir für die Elemente immer nur ihren Wert am Nullpunkt zuließen. Lassen wir diese Beschränkung fallen, so wird aus W ein Polynom, aus $W = 0$ eine Kurve. Es ist leicht einzusehen, daß jeder Schnittpunkt von $W = 0$ und $f = 0$ in der euklidischen (x, y)-Ebene ein Weierstraß-Punkt oder ein singulärer Punkt von $f = 0$ oder ein Schnittpunkt von $D = 0$ oder $b = 0$ mit $f = 0$ ist. Ich brauche bloß das Koordinatensystem parallel zu verschieben, dann sind die Ableitungen der Kolonne K nach den alten und den neuen Veränderlichen einander gleich, und das Polynom W erweist sich gegenüber dieser Transformation als kovariant. Aus einer Bedingung, die ich für jeden Punkt einzeln anzusetzen hatte, ist jetzt eine in der ganzen euklidischen Ebene erklärte und für die Frage nach den Weierstraß-Punkten entscheidende Kurvenklasse geworden. Wir wollen sie die *Weierstraß-Kurven* nennen.

Um auch die Verhältnisse auf der unendlich fernen Geraden übersehen zu können, müssen wir homogene Koordinaten x, y, z einführen.

Unter W wollen wir die bisher erklärte inhomogene Form unserer Determinante verstehen, und wir wollen mit $\overline{W}$ das Polynom bezeichnen, das entsteht, wenn wir W homogen schreiben, mit $\hat{W}$ das Polynom, das wir bekommen, wenn wir K homogen schreiben und in W einsetzen, mit $\overline{\hat{W}}$ das Polynom, das wir aus $\hat{W}$ erhalten, wenn wir jede Kolonne so oft

nach z differenzieren, bis sie die Stufe $p-1$ erreicht hat. $\tilde{W}$ ist erst völlig homogen. Unser Ziel ist, $\overline{W}$ mit $\tilde{W}$ zu vergleichen.

Man überzeugt sich leicht, daß sich $\overline{W}$ und $\hat{W}$ nur um einen Faktor z^{σ} unterscheiden. Unter Ausnutzung der für homogene Polynome n-ten Grades gültigen Eulerschen Identität $n \cdot g = x \cdot g_x + y \cdot g_y + z \cdot g_z$ können wir durch geeignete Kolonnenaddition die Form $\hat{W}$ bis auf einen Faktor $\text{const} \cdot z^{\tau}$ in $\tilde{W}$ umformen. (An dieser Stelle wird es von Wichtigkeit, daß alle Polynome $a \cdot f$ und $b \cdot \varphi$ denselben Grad haben.) Die Kurven $\overline{W} = 0$ und $\tilde{W} = 0$ stimmen im Endlichen völlig überein.

$\tilde{W}$ kann natürlich für besondere Kurven $f = 0$ die unendlich ferne Gerade als Faktor enthalten, und dieser Faktor könnte in den Formen W und $\overline{W}$ gar nicht in Erscheinung treten; daher immer die unbestimmte Aussage: „bis auf einen Faktor $\text{const} \cdot z^{\varrho}$".

$\tilde{W}$ enthält in seinen Kolonnen alle überhaupt möglichen Ableitungen der $(p-1)$-ten Stufe und ist völlig symmetrisch in x, y, z. Da im Endlichen $W = 0$ mit $\tilde{W} = 0$ übereinstimmt, ist die Bedingung dafür, daß ein Punkt Weierstraß-Punkt sei, $\tilde{W} = 0$, gleichgültig, ob der Punkt im Endlichen liegt oder auf der unendlich fernen Geraden; denn diese ist in $\tilde{W}$ in keiner Weise vor den anderen Koordinatenachsen ausgezeichnet. Wir werden also $\tilde{W} = 0$ als die eigentliche Gleichung der Weierstraß-Kurven anzusehen haben.

So müssen wir z. B. von $\tilde{W}$ ausgehen, wenn wir nach dem Grad der Weierstraß-Kurven fragen. Sind die Elemente von K vom n-ten Grade, so sind die $(p-1)$-ten Ableitungen vom Grade $n-p+1$. Jedes Glied von $\tilde{W}$ ist ein Produkt von $\frac{p(p+1)}{2}$ solchen Ableitungen, also vom Grad

$$\frac{p(p+1)}{2}(n-p+1) = n\frac{p(p+1)}{2} - \frac{(p+1)p(p-1)}{2}. \tag{7}$$

Im übrigen wollen wir aber unseren Betrachtungen die inhomogene Form W zugrunde legen. Sie ist handlicher.

§ 4.

Kovarianz gegenüber projektiven Transformationen.

Jetzt, wo wir die Gleichung der Weierstraß-Kurve für die ganze projektive Ebene aufgestellt haben, ist unsere nächste Aufgabe, die Kovarianz der Weierstraß-Kurven gegenüber projektiven Transformationen und Cremona-Transformationen nachzuweisen. Denn ohne diesen Nachweis hätte jene Bildung noch keinen eigentlichen geometrischen Sinn.

Es sei uns durch

$$x = a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta,$$
$$y = a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta,$$
$$z = a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta$$

eine projektive Transformation gegeben. Um die Kovarianz der Weierstraß-Kurven ihr gegenüber nachzuweisen, setzen wir sie in der homogenen Form W an.. Wir müssen die $(p-1)$-ten Ableitungen von K nach x, y, z durch die Ableitungen von K nach ξ, η, ζ ausdrücken. Es sind Linearformen mit konstanten Koeffizienten, und zwar haben nur die $(p-1)$-ten Ableitungen einen von Null verschiedenen Koeffizienten. Diese Linearformen setzen wir in die Determinante ein. Die Koeffizienten sind dann für alle Elemente einer Kolonne dieselben, ebenso die Indizes der Polynome $b\,\varphi_\varrho$ und $a_\varrho f$ für alle Elemente einer Zeile. Die Determinante zerfällt also in ein Produkt zweier Determinanten. Der eine Faktor ist $\widetilde{W}$, geschrieben in den neuen Koordinaten; der andere Faktor ist konstant und von Null verschieden, weil $\widetilde{W}$ weder im alten noch im neuen Koordinatensystem identisch verschwinden kann. $\widetilde{W}$ ist gegenüber projektiven Transformationen kovariant.

§ 5.

Kovarianz gegenüber Cremona-Transformationen.

Bei einer Cremona-Transformation gehen Weierstraß-Punkte in Weierstraß-Punkte über. Wenn die Weierstraß-Kurven wirklich eine natürliche Bildung sind, dürfen sie ihren Charakter nicht verlieren, wenn wir die Figur einer Cremona-Transformation unterziehen. Dem Beweise legen wir die inhomogene Form W der Determinante zugrunde.

Die Cremona-Transformation können wir nach dem Noetherschen Satz in ein Produkt von quadratischen Transformationen mit je drei verschiedenen Fundamentalpunkten zerlegen, und wir brauchen nur solche quadratische Transformationen zu betrachten. Da wir weiter schon die Kovarianz gegenüber projektiven Transformationen bewiesen haben, können wir uns auf die Betrachtung von Transformationen beschränken, deren Fundamentalpunkte in den Ecken des Koordinatendreiecks liegen, also auf die Transformation

$$x = \frac{1}{\xi} \qquad y = \frac{1}{\eta}. \tag{8}$$

Setzen wir dies in W oder K ein, so erhalten wir gebrochene rationale Funktionen von ξ und η, die wir mit W^+ und K^+ bezeichnen wollen. Die Hauptnenner von K^+ und von W^+ sind $\xi^n \cdot \eta^n$ und $\xi^m \cdot \eta^m$, wo n der

Grad der Elemente von K und, nach (7), $m = n\frac{(p+1)}{2}p - \frac{(p+1)p(p-1)}{2}$ der Grad von W ist. Multiplizieren wir K^+ mit $\xi^n \cdot \eta^n$ und W^+ mit $\xi^m \cdot \eta^m$, so erhalten wir die Polynome

$$(9) \qquad K^* = K^+ \cdot \xi^n \eta^n,$$

$$(10) \qquad W^* = W^+ \cdot \xi^m \eta^m.$$

K^* enthält als Elemente die Transformierten von $a_\nu f$ und $b\varphi_\nu$. W^* ist die Kurve, die durch die Cremona-Transformation (8) aus $W = 0$ hervorgeht.

Wir können uns W^+ noch einmal dadurch herstellen, daß wir in W die Kolonne K durch K^+ ersetzen. Die Ableitungen $\frac{\partial^s K}{\partial x^r \partial y^{s-r}}$ rechnen sich um in

$$(11) \qquad \binom{s}{r}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^r \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^{s-r} \frac{\partial^s K^+}{\partial \xi^r \partial \eta^{s-r}} + R,$$

wo R eine Linearform von Ableitungen niedrigerer Stufe als s von K^+ nach ξ und η bedeutet. Alle Elemente der q-ten Zeile sind Linearformen von Ableitungen des q-ten Elementes von K, und alle Elemente einer Kolonne sind mit denselben Koeffizienten zusammengesetzt. W^+ läßt sich also in ein Produkt

$$(12) \qquad W^+ = \overset{+}{W} \cdot C$$

zweier Determinanten zerfällen. Der erste Faktor $\overset{+}{W}$ besteht aus allen Ableitungen von K^+ nach ξ und η bis zur $(p-1)$-ten Stufe; der zweite Faktor C ist die Determinante der Größen (11), aufgefaßt als Linearformen in den $\frac{\partial^\sigma K^+}{\partial \xi^\varrho \partial \eta^{\sigma-\varrho}}$.

Ordnen wir nun in C die Zeilen und Kolonnen nach der Größe von s und σ, in zweiter Linie nach der Größe von r und ϱ, so verschwinden alle Glieder auf derjenigen Seite der Hauptdiagonale, die durch $\sigma > s$ oder $\sigma = s$ und $\varrho > r$ gegeben ist, und C ist gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonale:

$$C = c \cdot \prod_{s=1}^{p-1} \prod_{r=0}^{s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^r \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^{s-r}, \quad \text{wo } c = \prod_{r<s} \binom{s}{r}.$$

Aus (8) folgt $\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$,

$$C = c \prod_{s=1}^{p-1} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^{\sum\limits_0^s r} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)^{\sum\limits_0^s s-r} = c \cdot \prod_{s=1}^{p-1} \left(\frac{1}{x^2 y^2}\right)^{\frac{s(s+1)}{2}}$$

$$= c\left(\frac{1}{x^2 y^2}\right)^{\frac{(p+1)p(p-1)}{6}}.$$

Da wir die Beziehungen, auf die wir hinaus wollen, in den Koordinaten ξ und η darstellen müssen, haben wir auch C in diesen Koordinaten zu schreiben:

$$C = c(\xi\,\eta)^{\frac{(p+1)\,p\,(p-1)}{3}} \tag{13}$$

$$W^{+} = \dot{W}\cdot c\cdot(\xi\,\eta)^{\frac{(p+1)\,p\,(p-1)}{3}}$$

Jetzt müssen wir $\dot{W}$ mit $\check{W}$, der Weierstraß-Kurve der transformierten Grundkurve, in Beziehung setzen. In $\dot{W}$ stehen noch nicht die transformierten Polynome K^*, sondern gebrochene Funktionen K^+. Sie unterscheiden sich von K^+ um den Faktor $\xi^n\,\eta^n$. Nach dem Satz des § 2 können wir diesen in der Potenz $\frac{p\,(p+1)}{2}$ vor die Determinante ziehen. Die aus den Ableitungen von K^* nach ξ und η gebildete Determinante ist aber $\check{W}$, und es wird nach dem eben gesagten:

$$\check{W} = (\xi\cdot\eta)^{\frac{n\cdot p\,(p+1)}{2}}\,\dot{W}. \tag{14}$$

Halten wir nun die Gleichungen

$$W^{*} = W^{+}(\xi\,\eta)^{\frac{n\,p\,(p+1)}{2} - \frac{(p+1)\,p\,(p-1)}{2}} \tag{10}$$

$$W^{+} = \dot{W}\;(\xi\,\eta)^{\frac{p\,(p+1)\,(p-1)}{3}} \tag{12}$$

$$\check{W} = \dot{W}\;(\xi\,\eta)^{\frac{n\,p\,(p+1)}{2}} \tag{14}$$

zusammen, so erhalten wir das Ergebnis:

$$\check{W} = W^{*}\,(\xi\,\eta)^{\frac{p\,(p+1)\,(p-1)}{6}},$$

wobei, wie gesagt, $W^* = 0$ die Transformierte der Weierstraß-Kurve von $f = 0$, $\check{W} = 0$ die Weierstraß-Kurve der Transformierten $f^* = 0$ bedeutet.

Das sind vorläufig noch inhomogene Formen. Unsere Aufgabe ist erst dann gelöst, wenn wir die Verhältnisse in homogenen Koordinaten ξ, η, ζ dargestellt haben. Durch die inhomogenen Formen sind aber die homogenen vollständig bis auf eine Potenz von ζ bestimmt, und da die Fundamentalgeraden ξ, η, ζ der quadratischen Transformation symmetrisch auftreten müssen, haben wir den Faktor $\zeta^{\frac{(p+1)\,p\,(p-1)}{6}}$ hinzuzufügen. *Wir erhalten also die Weierstraß-Kurve $\check{W} = 0$ der Transformierten $f^* = 0$, indem wir $W = 0$ transformieren und mit $(\xi\,\eta\,\zeta)^{\frac{(p+1)\,p\,(p-1)}{6}}$ multiplizieren.*

Haben wir nun mehrere quadratische Transformationen hintereinander auszuführen, so transformieren sich die Fundamentalgeraden der ersten Transformation bei der nächsten mit, und neue Fundamentalgeraden treten

hinzu. Die Gesamtheit aller dieser Kurven ist das Fundamentalsystem der zusammengesetzten Cremona-Transformation. *Die Weierstraß-Kurven der Transformierten finden wir demnach* auch bei allgemeinen Cremona-Transformationen, *indem wir die Weierstraß-Kurven der ursprünglichen Kurve transformieren und mit der* $\frac{(p+1)p(p-1)}{6}$*-ten Potenz des Fundamentalsystems multiplizieren.*

Es ist noch dreierlei zu bemerken:

1. Wir hatten den Grad der Polynome a unbestimmt gelassen, obwohl wir ihn auf $p-2$ hätten festlegen können. Hier zeigt sich, warum: Durch die Cremona-Transformationen werden die Polynome a ebenfalls transformiert und ihr Grad wird verändert.

2. W^*, $(a\cdot f)^*$, $(b\cdot\varphi)^*$ brauchen nicht notwendig die Transformierten von W, $(a\cdot f)$, $(b\cdot\varphi)$ im üblichen Sinne zu sein, sondern können noch Potenzen von Fundamentalkurven als Faktor enthalten, z. B. wenn f in einem Fundamentalpunkt verschwindet.

3. Die Transformation führt die allgemeinen Polynome a und b in spezielle über, nämlich in solche, die mit einer gewissen Vielfachheit durch die Fundamentalpunkte gehen. So kann man sich die Möglichkeit erklären, daß die Weierstraß-Kurve W^* plötzlich eine Potenz der Fundamentalkurven als Faktor enthält: wir sind durch unser Verfahren auf spezielle Weierstraß-Kurven gestoßen. Die allgemeine Weierstraß-Kurve der Transformierten geht durch Transformation aus Weierstraß-Kurven mit speziellen Annahmen über die a und b hervor, und diese ermöglichen es, nach der Transformation die Potenzen der Fundamentalkurven wegzuheben.

§ 6.

Die überzähligen Schnittpunkte von $W = 0$ und $f = 0$.

Jetzt, wo wir die Kurve und ihre Kovarianzeigenschaften haben, können wir daran gehen, ihre Schnittpunkte mit $f = 0$ zu untersuchen. Wie wir schon gesehen haben, gibt es vier Arten von Schnittpunkten von $W = 0$ und $f = 0$: erstens und zweitens die Schnittpunkte von $D = 0$ und $b = 0$ mit $f = 0$; drittens die singulären Punkte von $f = 0$ und viertens die Weierstraß-Punkte. Ehe wir diese letzte für uns allein wichtige Art von Schnittpunkten untersuchen, müssen wir uns über die drei anderen Arten Klarheit verschaffen.

Zunächst behandeln wir die beiden ersten Arten; wir arbeiten hierbei am zweckmäßigsten im Ring der Polynome in f, a, b, φ und den Ableitungen dieser Größen und kümmern uns — nachdem wir die Ableitungen gebildet haben — nicht mehr darum, daß jene Größen selbst noch Polynome in x und y sind. Wir wollen uns jetzt davon überzeugen, daß W, aufgefaßt als Polynom dieses Ringes, dem Ideal $(f, D\cdot b^p)$ angehört. W läßt sich eindeutig in der Form

(15) $$W = A\cdot f + \overline{w}\cdot D\cdot b^p$$

darstellen, wobei in $\overline{w}$ nur noch f, φ und deren Ableitungen, aber nicht mehr a und b oder deren Ableitungen vorkommen.

Wir fassen für einen Augenblick die algebraische Funktion $y(x)$ ins Auge, die durch $f(x, y) = 0$ definiert ist, und verstehen unter $y', y'', \ldots$ die Ableitungen dieser Funktion. Wenn wir f wiederholt total nach x differenzieren, erhalten wir eine Darstellung von $\frac{d^r f}{d x^r}$ als Linearform L_r in den partiellen Ableitungen von f nach x und y, mit Produkten der Größen $y', y'', \ldots$ als Koeffizienten. Diese Koeffizienten stellen wir als rationale Funktionen von partiellen Ableitungen von f nach x und y dar. Wir multiplizieren in W jede Kolonne mit dem Koeffizienten, den die entsprechende Ableitung in L_r hat und addieren sie zu $\frac{\partial^r K}{\partial x^r}$. Damit haben sich die Kolonnen $\frac{\partial^r K}{d x^r}$ in $\frac{d^r K}{d x^r}$ verwandelt.

Die Elemente $\frac{d^r (a f)}{d x^r}$ differenzieren wir aus:

$$\frac{d^r (a f)}{d x^r} = \sum_{0}^{r} \binom{r}{\varrho} \frac{d^{r-\varrho} a}{d x^{r-\varrho}} \frac{d^\varrho f}{d x^\varrho}.$$

Die Größen $\frac{d^\varrho f}{d x^\varrho}$, $\varrho = 1, 2, \ldots, r$, haben wir dabei als Abkürzungen für die Linearformen L_ϱ anzusehen, und diese verschwinden identisch, wenn wir für $y', y'', \ldots$ ihre Ausdrücke in den partiellen Ableitungen von f einsetzen. Es bleibt nur $\frac{d^r a f}{d x^r} = f \cdot \frac{d^r a}{d x^r}$.

Wir entwickeln W nach dem Laplaceschen Satz in eine Summe von Produkten je einer Determinante der Matrix

$$M_1 = \begin{pmatrix} b\varphi_1 & \frac{d(b\varphi_1)}{dx} & \ldots & \frac{d^{p-1}(b\varphi_1)}{dx^{p-1}} & \frac{\partial(b\varphi_1)}{\partial y} & \frac{\partial^2(b\varphi_1)}{\partial x\,\partial y} & \ldots & \frac{\partial^{p-1}(b\varphi_1)}{\partial y^{p-1}} \\ b\varphi_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b\varphi_p & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial^{p-1}(b\varphi_p)}{\partial y^{p-1}} \end{pmatrix}$$

und der komplementären Determinante der Matrix

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_1 f & f\frac{d a_1}{d x} & \ldots & f\frac{d^{p-1} a_1}{d x^{p-1}} & \frac{\partial(a_1 f)}{\partial y} & \frac{\partial^2(a_1 f)}{\partial x\,\partial y} & \ldots & \frac{\partial^{p-1}(a_1 f)}{\partial y^{p-1}} \\ a_2 f & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\frac{p(p-1)}{2}} f & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial^{p-1} a_{\frac{p(p-1)}{2}} f}{\partial y^{p-1}} \end{pmatrix}$$

Wenn wir nach den Gliedern von W suchen, die von f frei sind, so ist für uns von allen Determinanten der Matrix M_2 einzig diejenige Determinante

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial (a_1 f)}{\partial y} & \frac{\partial^2 (a_1 f)}{\partial x \, \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{p-1} (a_1 f)}{\partial y^{p-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial (a_{\frac{p(p-1)}{2}} f)}{\partial y} & \frac{\partial^2 (a_{\frac{p(p-1)}{2}} f)}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{p-1} (a_{\frac{p(p-1)}{2}} f)}{\partial y^{p-1}} \end{vmatrix}$$

von Belang, die aus allen Ableitungen von $H = \begin{vmatrix} \frac{\partial (a_1 f)}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial (a_{\frac{p(p-1)}{2}} f)}{\partial y} \end{vmatrix}$ bis zur $(p-2)$-ten Stufe besteht.

Bezeichnen wir die zu D_2 komplementäre Determinante von M_1 mit D_1, so ist

$$W = D_1 \cdot D_2 + \bar{A} \cdot f. \tag{15a}$$

Wir zerlegen D_2 vollständig. Es sind dabei nur die Teildeterminanten $\bar{D}$ von Belang, in denen in jeder Kolonne f mindestens einmal differenziert ist, a_r also höchstens $(p-2)$-mal; in $\bar{D}$ stehen $\frac{p(p-1)}{2}$ Ableitungen der $(p-2)$-ten Stufe von den a, also alle möglichen, und es ist $\bar{D} = D$. Rechnet man alle Differentiationen, die in D_2 und D vorkommen, zusammen, so hat D_2 noch $\frac{p(p-1)}{2}$ Differentiationen nach y voraus. Diese müssen auf die $\frac{p(p-1)}{2}$ Faktoren f der $\frac{p(p-1)}{2}$ Kolonnen gerecht verteilt werden, und jedes f ist genau einmal nach y differenziert. Das einzige von f freie Glied in D_2 ist demnach $D \cdot f_y^{\frac{p(p-1)}{2}}$:

$$D_2 = \tilde{A} \cdot f + D f_y^{\frac{p(p-1)}{2}}. \tag{15b}$$

Die zu D_2 komplementäre Determinante von M_1 ist

$$D_1 = \begin{vmatrix} b\,\varphi_1 & \frac{d (b\,\varphi_1)}{d x} & \cdots & \frac{d^{p-1} (b\,\varphi_1)}{d x^{p-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b\,\varphi_p & \frac{d (b\varphi_p)}{d x} & \cdots & \frac{d^{p-1} (b\varphi_p)}{d x^{p-1}} \end{vmatrix}$$

Nach dem Hilfsatz des § 2 können wir b in der p-ten Potenz vor die Determinante ziehen; dann wird:

$$(15\text{c}) \qquad D_1 = b^p \begin{vmatrix} \varphi_1 & \frac{d\varphi_1}{dx} & \dots & \frac{d\varphi_1^{p-1}}{dx^{p-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_p & \frac{d\varphi_p}{dx} & \dots & \frac{d^{p-1}\varphi_p}{dx^{p-1}} \end{vmatrix} = b^p \cdot w.$$

In w haben wir die Determinante (1) wiedergefunden. (15a, b, c) ergeben zusammen

$$(15\text{d}) \qquad W = A \cdot f + f_y^{\frac{p(p-1)}{2}} \, w D b^p.$$

Hier, in der (x, y)-Ebene können wir $w = 0$ als die Bedingung dafür deuten, daß $(p-1)$ aufeinanderfolgende Differentialquotienten der durch $\varphi(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ definierten Funktionen übereinstimmen, daß sich also $\varphi = 0$ und $f = 0$ p-punktig berühren.

Überlegen wir uns einmal, wie w gebildet ist. Wir haben Kolonnen von W mit Potenzprodukten von Ableitungen von y nach x multipliziert und zu anderen Kolonnen addiert. Diese Ableitungen, dargestellt als rationale Funktionen der partiellen Ableitungen von f, enthalten noch eine Potenz von f_y im Nenner. Wir müssen daher damit rechnen, daß auch w noch eine Potenz von f_y im Nenner enthält, und zwar $f_y^{\frac{p(p-1)}{2}}$. Denn da D und b sicher f_y nicht als Faktor enthalten, muß $f_y^{\frac{p(p-1)}{2}} \cdot w$ ein Polynom $\overline{w}$ sein. $\overline{w}$ darf aber nicht durch f_y teilbar sein, da $W = 0$ im allgemeinen nicht durch die Schnittpunkte von $f = 0$ und $f_y = 0$ geht. Es ist:

$$w = \overline{w} \cdot \frac{1}{f_y^{\frac{p(p-1)}{2}}}$$

und

$$(15) \qquad W = A \cdot f + \overline{w} D b^p$$

Hier ist der Faktor $\overline{w}$ zu beachten: er ist durch f eindeutig gegeben und enthält keine willkürlichen Polynome mehr; $\overline{w} = 0$ schneidet $f = 0$ nur noch in den singulären Punkten und in den Weierstraß-Punkten, scheint also auf den ersten Blick für unsere Zwecke viel geeigneter als W. Das ist aber leider nicht der Fall, denn einmal ist $\overline{w}$ nicht kovariant gegenüber Cremona-Transformationen, ja nicht einmal gegenüber projektiven Transformationen; und zweitens stellt sich, wie wir später sehen werden, die Lückenverteilung in einem Weierstraß-Punkt wohl in den Singularitäten von $W = 0$, aber nicht in denen von $\overline{w} = 0$ dar.

Wir haben jetzt einen genauen Einblick in die Schnittpunkte der ersten und zweiten Art gewonnen: $W = 0$ und $f = 0$ schneiden sich mit derselben Vielfachheit wie $D = 0$ und $f = 0$ oder mit der p-fachen Vielfachheit des Schnittes von $b = 0$ und $f = 0$.

§ 7.

Die vielfachen Punkte von $f = 0$.

Die dritte Art Schnittpunkte von $W = 0$ und $f = 0$, die wir zu untersuchen haben, sind die singulären Punkte von $f = 0$. Wir wollen uns hier darauf beschränken, die algebraische Vielfachheit des Schnittes von $W = 0$ und $f = 0$ zu bestimmen; es wird sich herausstellen, daß $W = 0$ und $f = 0$ in jedem k-fachen Punkt von $f = 0$ sich $\frac{k(k-1)}{2} \cdot p(p+1)$-fach schneiden.

P sei ein singulärer Punkt von $f = 0$; er sei aus mehreren vielfachen Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_\varrho$ mit den Vielfachheiten $k_1, k_2, \ldots, k_\varrho$ zusammengesetzt. Es mögen durch P die Zweige $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\sigma$ von $f = 0$ von den Graden $r_1, r_2, \ldots, r_\sigma$ hindurchgehen. Wir legen den Nullpunkt des Koordinatensystems nach P und achten darauf, daß die Achse $x = 0$ Tangente keines der Zweige $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\sigma$ wird.

Nach (15 d) ist

$$W = A \cdot f + f_y^{\frac{p(p-1)}{2}} \, w D b^p$$

$$\text{mit } w = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \frac{d\varphi_1}{dx} & \cdots & \frac{d^{p-1}\varphi_1}{dx^{p-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_p & \frac{d\varphi_p}{dx} & \cdots & \frac{d^{p-1}\varphi_p}{dx^{p-1}} \end{vmatrix}$$

Die totalen Ableitungen haben dabei die im § 6 eingeführte symbolische Bedeutung für gewisse Linearformen. Die beiden Faktoren, die für uns von Wichtigkeit sind, sind $f_y^{\frac{p(p-1)}{2}}$ und w.

$f_y = 0$ ist die Polare des Punktes $x = z = 0$ und schneidet nach unseren Voraussetzungen $W = 0$ nicht öfter als die allgemeine Polare, $\sum_1^\varrho {}^h k_h(k_h - 1) + \sum_1^\sigma {}^i (r_i - 1)$-mal. Der Faktor $f_y^{\frac{p(p-1)}{2}}$ liefert demnach

$$\text{(16)} \qquad \Big[\sum_1^\varrho {}^h k_h(k_h - 1) + \sum_1^\sigma {}^i (r_i - 1)\Big] \frac{p(p-1)}{2}$$

Schnittpunkte. Nun wollen wir die Schnittvielfachheit von $w = 0$ und $f = 0$ bestimmen. Wir errechnen dazu die Schnittvielfachheiten von $w = 0$ mit den einzelnen Zweigen von $f = 0$ und addieren sie. Dazu gehen wir von der (x, y)-Ebene zurück auf die durch $f(x, y) = 0$ gegebene

Riemannsche x-Fläche. Aus den Kurven $w = 0$ und $\varphi = 0$ werden wieder Funktionen der Fläche, also von x allein. Aus den Schnittvielfachheiten werden Ordnungen des Verschwindens. Die totalen Ableitungen der Adjungierten, die in w stehen, erhalten ihre übliche Bedeutung.

In der Umgebung des Nullpunktes läßt sich die durch $f(x, y) = 0$ definierte Funktion $y(x)$ längs des Zweiges Z_i in eine nach Potenzen von $\xi_i = \sqrt[r_i]{x}$ fortschreitende Reihe entwickeln. Wir führen ξ_i auch in φ und w als Veränderliche ein; dann wird:

$$w = c_1\, \xi_i^{-(r_i - 1)\frac{p(p-1)}{2}} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \frac{d\varphi_1}{d\xi_i} & \cdots & \frac{d^{p-1}\varphi_1}{d\xi_i^{p-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_p & \frac{d\varphi_p}{d\xi_i} & \cdots & \frac{d^{p-1}\varphi_p}{d\xi_i^{p-1}} \end{vmatrix}$$

$$= c_1\, \xi_i^{-(r_i - 1)\frac{p(p-1)}{2}} \cdot w^*.$$

Ist nun $\frac{d^s \varphi}{d\xi_i^s}$ die erste nicht verschwindende Ableitung der allgemeinen Adjungierten, so ist die erste nicht notwendig verschwindende Ableitung von w^*:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^s\varphi_1}{d\xi_i^s} & \cdots & \frac{d^{s+p-1}\varphi_1}{d\xi_i^{s+p-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^s\varphi_p}{d\xi_i^s} & \cdots & \frac{d^{s+p-1}\varphi_p}{d\xi_i^{s+p-1}} \end{vmatrix} = c_2 \frac{d^{p\cdot s} w^*}{d\xi_i^{p\cdot s}}.$$

Wenn wir annehmen, es falle kein Weierstraß-Punkt in den Nullpunkt, so verschwindet diese Determinante tatsächlich nicht. w^* verschwindet also von der Ordnung $p \cdot s$. s ist hierbei die Ordnung des Verschwindens der adjungierten Funktion, oder, wenn wir jetzt wieder in die (x, y)-Ebene hinausgehen, die Schnittvielfachheit der adjungierten Kurven mit Z_i. Geht Z_i durch den Punkt P_h etwa k_{hi}-fach, so ist: $s = \sum_1^{\varrho} {}_h\, k_{hi}(k_h - 1)$. w^* verschwindet demnach $p \cdot \sum_1^{\varrho} {}_h\, k_{hi}(k_h - 1)$-fach, und w verschwindet $\left[p \cdot \sum_1^{\varrho} {}_h\, k_{hi}(k_h - 1) - (r_i - 1)\frac{p(p-1)}{2}\right]$-fach, da ja noch der Faktor $\xi_i^{-(r_i - 1)\cdot\frac{p(p-1)}{2}}$ hinzutritt.

Die Gesamtschnittvielfachheit von $w = 0$ und $f = 0$ ist die Summe aller dieser Ordnungen des Verschwindens von w auf den einzelnen Zweigen:

$$(17) \qquad p \cdot \sum_1^{\varrho} {}^h \sum_1^{\sigma} {}^i k_{hi}(k_h - 1) - \sum_1^{\sigma} {}^i (r_i - 1) \frac{p(p-1)}{2}$$

$$= p \cdot \sum_1^{\varrho} {}^h k_h(k_h - 1) - \sum_1^{\sigma} {}^i (r_i - 1) \frac{p(p-1)}{2},$$

da ja $\sum_1^{\sigma} {}^i k_{hi} = k_h$ sein muß.

(16) und (17) liefert

$$p(p+1) \cdot \sum_1^{\varrho} {}^h \frac{k_h \cdot (k_h - 1)}{2}$$

als Schnittvielfachheit von $W = 0$ und $f = 0$.

Wenn man sich die Singularität von $W = 0$ in einem singulären Punkt von $f = 0$ ansieht, wird man sich vielleicht wundern, wie verwickelt sie ist. $W = 0$ berührt die Zweige von $f = 0$ noch mehrfach, geht also durch einfache Punkte von $f = 0$, die nicht Weierstraß-Punkte sind. Diese Punkte sind allerdings uneigentlich, gehen aber durch geeignete Cremona-Transformationen in eigentliche einfache Punkte über, in denen sich nach wie vor $W = 0$ und $f = 0$ schneiden. Die Erklärung dieser sonderbaren Erscheinung ist darin zu suchen, daß D nach der Transformation in diesen Punkten verschwindet.

Wir kennen den Grad von W, D, b und f, können also die Gesamtzahl der Schnittpunkte von $W = 0$ und $f = 0$ sowie die davon auf die Schnittpunkte von $f = 0$ mit $D = 0$ oder $b = 0$ und die auf die singulären Punkte von $f = 0$ entfallenden Anzahlen berechnen. Es bleiben $(p+1)p(p-1)$ Schnittpunkte übrig, die dann Weierstraß-Punkte sein müssen. Dies ist die bekannte Höchstanzahl der Weierstraß-Punkte.

II. Teil.

§ 8.

Lücken und Adjungierte.

Wir wollen nun versuchen, uns einen Einblick in die Singularität zu verschaffen, die die Weierstraß-Kurve in einem Weierstraß-Punkt der Grundkurve hat.

Der Einfachheit halber legen wir den Weierstraß-Punkt in den Nullpunkt und nehmen an, er sei ein einfacher Punkt von $f = 0$, und $f = 0$ berühre dort die x-Achse so oft, daß wir dort alle vorkommenden Ableitungen von f nach x gleich 0 setzen dürfen. Es genügt anzunehmen, die Berührung sei $2p$-fach. Wir können dies immer durch eine Cremona-Transformation erreichen. Außerdem verlangen wir, daß D und b im

Nullpunkt nicht verschwinden. Wir haben dann die Ergebnisse in einer gegenüber Cremona-Transformationen invarianten Form darzustellen, in der diese speziellen Annahmen keine Rolle mehr spielen.

Die adjungierten Polynome φ bilden ein lineares System der Dimension p. In die Determinante W haben wir eine Basis von ihnen einzusetzen. Wie wir diese Basis auswählen, haben wir noch offen gelassen. Wir wählen nun für φ_1 ein Polynom aus, von dem möglichst wenige, mit φ_1 selbst etwa $\lambda_1 - 1$ aufeinanderfolgende Ableitungen nach x im Nullpunkt verschwinden. Es sei also im Nullpunkt

$$\varphi_1 = 0 \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial^{\lambda_1 - 2} \varphi_1}{\partial x^{\lambda_1 - 2}} = 0 \quad \frac{\partial^{\lambda_1 - 1} \varphi_1}{\partial x^{\lambda_1 - 1}} \neq 0.$$

Man kann übrigens leicht zeigen, daß λ_1 immer Eins ist.

Das System aller adjungierten Polynome, die mit ihren $\lambda_1 - 1$ ersten Ableitungen nach x im Nullpunkt verschwinden, ist von $(p-1)$-ter Dimension, denn durch Hinzunahme von φ_1 erhält man das volle System. Aus diesen Polynomen wählen wir wieder eines aus, von dem möglichst wenige, etwa $\lambda_2 - 1$ aufeinanderfolgende Ableitungen nach x im Nullpunkt verschwinden, und nennen es φ_2. Wenn wir so fortfahren, können wir uns eine Basis der Adjungierten verschaffen, von denen jede folgende im Nullpunkt mehr verschwindende Ableitungen aufweist als die vorhergehende; und zwar sei jedes Mal $\frac{\partial^{\lambda_\varrho - 1} \varphi_\varrho}{\partial x^{\lambda_\varrho - 1}}$ die erste im Nullpunkt von Null verschiedene Ableitung von φ_ϱ nach x.

Die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sind nun die Lücken, die zu dem Weierstraß-Punkt gehören. Denn der Riemann-Rochsche Satz sagt: Die Dimension $N(n)$ des Systems von rationalen Funktionen der Fläche, die im Nullpunkt Pole höchstens der n-ten Ordnung haben und sonst überall auf der Fläche regulär sind, ist gleich der Dimension $P(n)$ des Systems der Adjungierten, die im Nullpunkt mindestens von der n-ten Ordnung verschwinden, vermehrt um die Ordnung n, vermindert um p:

$$N(n) = P(n) + n - p. \tag{18}$$

Ist n eine Lücke, so gibt es keine Funktion, die genau die n-te Ordnung hat, alle $N(n)$ Funktionen sind von geringerer Ordnung und $N(n) = N(n-1)$. Dann folgt aus (18): $P(n) = P(n-1) - 1$. Es gibt also eine Adjungierte, die $f = 0$ wohl $(n-1)$-fach, aber nicht n-fach berührt; es verschwinden von ihr im Nullpunkt wohl alle Ableitungen nach x bis zur $(n-2)$-ten, nicht aber die $(n-1)$-te. n ist also eine jener Zahlen λ_ϱ; da nun die Anzahlen der Lücken und der Zahlen λ_ϱ übereinstimmen, nämlich beide gleich p sind, muß auch jede Zahl λ_ϱ eine Lücke sein.

§ 9.

Die beweglichen Marken.

Ist die Lückenverteilung eine andere als $1, 2, \ldots, p$, so verschwindet W im Nullpunkt. Bei zerstreuteren Lückenverteilungen wird auch das algebraische Verhalten von $W = 0$ im Nullpunkt verwickelter sein. Das wollen wir jetzt untersuchen.

Von allen Polynomen sind uns dabei nur die Werte im Nullpunkt von Wichtigkeit. Es sei mir zu sagen gestattet, ein Polynom verschwinde, wenn es im Nullpunkt verschwindet.

Wir werden aus den Sätzen des § 8 folgern können, daß gewisse Ableitungen von W verschwinden, also ein Ideal angeben, dem W angehört. Bei speziellen Annahmen über die Grundkurve und über die Polynome a und b kann es sehr wohl vorkommen, daß W eine höhere Singularität hat, als die hier angegebene. Die Erörterungen darüber wollen wir auf später verschieben.

Die Differentiationen der Determinante W wollen wir ausführen, indem wir die Kolonnen differenzieren. Eine Ableitung von W besteht dann aus einer Summe von Determinanten, deren jede aus Ableitungen der Kolonne K gebildet ist. Jede dieser Determinanten wollen wir nun in folgender Weise darstellen:

Wir nehmen dazu das Gitter der ganzzahligen Punkte einer $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$*-Ebene zu Hilfe und verschaffen uns* $\frac{p(p+1)}{2}$ *bewegliche Marken, die wir auf die Gitterpunkte legen können. Jeder Determinante, die in einer Ableitung von* W *vorkommt, ordnen wir nun eine Markenverteilung zu*; *und zwar sei der Gitterpunkt* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ *belegt, wenn in der Determinante die Kolonne* $\frac{\partial^{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}} K}{\partial x^{\mathfrak{x}}\, \partial y^{\mathfrak{y}}}$ *vorkommt.* Da nicht zwei gleiche Kolonnen vorkommen können, ist jeder Gitterpunkt höchstens mit einer Marke belegt.

Die $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Achse mögen die übliche Lage haben, so daß wir von rechts und links im Sinne positiver und negativer $\mathfrak{x}$-Richtung, von oben und unten im Sinne positiver und negativer $\mathfrak{y}$-Richtung reden dürfen.

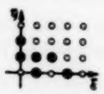


Fig. 1. Markenverteilung zu $|K_x\, K_y\, K_{xy}\, K_{yy}\, K_{xxx}\, K_{xxy}|$.

Fig. 2. Nicht sinnvolle Markenverteilung.

1. Auf diese Weise kommen wir gewiß nicht zu allen denkbaren Markenverteilungen. So können wir etwa im Falle $p = 2$ niemals die Markenverteilung der Fig. 2 erwarten, da doch in W und damit in allen Ableitungen eine Kolonne nach y differenziert war. Wir wollen eine Markenverteilung *sinnvoll* nennen, wenn wir sie einer Determinante zuordnen können, die in einer Ableitung von W vorkommt.

Eine sinnvolle Markenverteilung kennen wir: die undifferenzierte Determinante W entspricht einer Verteilung, bei der alle Punkte des Dreiecks $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \leqq p - 1$, $\mathfrak{x} \geqq 0$, $\mathfrak{y} \geqq 0$ und nur diese belegt sind. Wir wollen sie die *Grundverteilung* nennen.

Fig. 3. Grundverteilung für $p = 3$.

Der Differentiation einer Kolonne entspricht nun eine Verschiebung der entsprechenden Marke um einen nicht-negativen Betrag in der $\mathfrak{x}$-Richtung und um einen nicht-negativen Betrag in der $\mathfrak{y}$-Richtung. — Solche Verschiebungen wollen wir *nicht-negativ* nennen. — Jede sinnvolle Markenverteilung ist durch nicht-negative Verschiebungen aus der Grundverteilung hervorgegangen. Es läßt sich jedem belegten Gitterpunkt $(\mathfrak{x}^1, \mathfrak{y}^1)$ eineindeutig ein belegter Gitterpunkt $(\mathfrak{x}^0, \mathfrak{y}^0)$ der Grundverteilung so zuordnen, daß $\mathfrak{x}^1 \geqq \mathfrak{x}^0$, $\mathfrak{y}^1 \geqq \mathfrak{y}^0$. Diese Zuordnung sei durch Pfeile angedeutet.

Diese Zuordnung läßt sich im gegebenen Fall auf sehr viele verschiedene Weisen vornehmen.

Satz 1. *Wir können jede Zuordnung so umschalten, daß ein Gitterpunkt, der in beiden Markenverteilungen belegt ist, sich selbst zugeordnet ist.*

Fig. 4.

Denn es sei etwa:

$$(\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{y}_1) \to (\mathfrak{x}_2\, \mathfrak{y}_2),$$
$$(\mathfrak{x}_2\, \mathfrak{y}_2) \to (\mathfrak{x}_3\, \mathfrak{y}_3).$$

Ersetzen wir diese Zuordnung durch:

$$(\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{y}_1) \to (\mathfrak{x}_3\, \mathfrak{y}_3),$$
$$(\mathfrak{x}_2\, \mathfrak{y}_2) \to (\mathfrak{x}_2\, \mathfrak{y}_2),$$

so sind die dadurch dargestellten Verschiebungen nach wie vor nicht-negativ. Wir haben also eine Zuordnung der geforderten Eigenschaft vor uns.

Wir wollen uns im folgenden auf solche Zuordnungen beschränken, bei denen keine solche Umschaltung mehr nötig ist.

Sind in zwei sinnvollen Markenverteilungen V_1 und V_2 die Summen der $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Koordinaten je einander gleich, so sind die entsprechenden Determinanten Summanden einer und derselben Ableitung von W. Wir wollen V_1 und V_2 einander *gleichwertig* nennen.

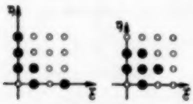


Fig. 5. Gleichwertige Markenverteilungen zu $\dfrac{\partial^4 W}{\partial x\, \partial y^3}$.

2. Wenn wir nun eine sinnvolle Markenverteilung vor uns haben, dann ist für uns die Frage von Wichtigkeit, ob die ihr entsprechende Determinante auf Grund der Sätze des § 8 verschwindet oder nicht. Der § 8 sagte nur etwas aus über diejenigen Kolonnen, in denen

ausschließlich nach x differenziert wurde, deren entsprechende Marken also auf der $\mathfrak{x}$-Achse liegen. Es möge sich um die Gitterpunkte $(\mathfrak{x}_1, 0), (\mathfrak{x}_2, 0), \ldots, (\mathfrak{x}_\varrho, 0)$ handeln; sie seien der Größe nach geordnet. Ist nun irgendein $\mathfrak{x}_\nu + 1$ kleiner als die ν-te Lückenzahl λ_ν, so gibt es ν Kolonnen, in denen nur nach x differenziert wurde und zwar seltener als $(\lambda_\nu - 1)$-mal. Alle diese Ableitungen verschwinden für $\varphi_\nu, \varphi_{\nu+1}, \ldots, \varphi_p, a_1 f, \ldots, a_{\frac{p(p-1)}{2}} f$; es stehen also in jenen Kolonnen überall Nullen außer in den ersten $\nu - 1$ Zeilen, und die Determinante verschwindet. Ist dagegen immer $\mathfrak{x}_\nu \geqq \lambda_\nu - 1$, so können wir jedenfalls auf Grund der Ergebnisse des § 8 nicht behaupten, daß die Determinante verschwindet.

Wir wollen im folgenden eine sinnvolle Markenverteilung *eigentlich* oder *uneigentlich* nennen, je nachdem ob immer $\mathfrak{x}_\nu \geqq \lambda_\nu - 1$ ist oder nicht.

3. Nun liegt uns daran, möglichst niedrige, gerade nicht mehr verschwindende Ableitungen von W zu finden; es hat also zum mindesten keinen Sinn, Ableitungen zu betrachten, die nicht verschwinden, wenn man einige Differentiationen rückgängig macht. Wir wollen deshalb eine eigentliche Markenverteilung V und alle ihr gleichwertigen *wesentlich* nennen, wenn es unmöglich ist, V selbst oder eine gleichwertige Verteilung durch positive Verschiebungen aus einer anderen, ebenfalls noch eigentlichen Markenverteilung zu gewinnen.

Satz 2. *In einer wesentlichen Markenverteilung sind alle Gitterpunkte des Dreiecks* $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \leqq p - 1$, $\mathfrak{x} \geqq 0$, $\mathfrak{y} \geqq 1$ *belegt.* Dieses Dreieck wollen wir mit A bezeichnen.

Angenommen, ein Punkt $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1)$ von A sei in V nicht belegt. In der Grundverteilung ist er belegt; es sei ihm in V der Punkt $(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2)$ zugeordnet. Machen wir die positive Verschiebung von $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1)$ nach $(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2)$ rückgängig, so bleibt die Markenverteilung eigentlich, V kann also nicht wesentlich sein.

Satz 3. *Sind in einer wesentlichen Markenverteilung* ϱ *Punkte der* $\mathfrak{x}$-*Achse belegt, so sind dies die Punkte*

$$(\lambda_1 - 1, 0), (\lambda_2 - 1, 0), \ldots, (\lambda_\varrho - 1, 0). \tag{19}$$

In einer Markenverteilung V seien, der Größe nach geordnet, die Punkte $(\mathfrak{x}_1, 0), (\mathfrak{x}_2, 0), \ldots, (\mathfrak{x}_\varrho, 0)$ der $\mathfrak{x}$-Achse belegt. Angenommen, diese Reihe stimme nicht mit der Reihe (19) überein. $\mathfrak{x}_\nu$ sei der erste belegte Gitterpunkt, der von $\lambda_\nu - 1$ verschieden ist. Da es sich um eine eigentliche Markenverteilung handelt, ist $\mathfrak{x}_\nu > \lambda_\nu - 1$.

Um zum Widerspruch zu gelangen, haben wir drei Fälle zu unterscheiden, die verschiedene Methoden erfordern.

1. $(\mathfrak{x}_\nu, 0)$ ist nicht sich selbst zugeordnet. Verschieben wir dann die Marke, die in V darauf liegt, um 1 nach links, so bleibt die Verteilung sinnvoll und eigentlich, V kann also nicht wesentlich sein.

2. $(\mathfrak{x}_\nu, 0)$ ist sich selbst zugeordnet, und es gibt ein Paar zugeordneter Gitterpunkte

$$(\bar{\mathfrak{x}}, 0) \to (\tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{y}}),$$

für die

$$\bar{\mathfrak{x}} < \mathfrak{x}_\nu \leqq \tilde{\mathfrak{x}}.$$

Dann können wir die Zuordnung umschalten

$$(\bar{\mathfrak{x}}, 0) \to (\mathfrak{x}_\nu, 0),$$
$$(\mathfrak{x}_\nu, 0) \to (\tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{y}}).$$

Damit haben wir diesen Fall auf den ersten zurückgeführt.

3. $(\mathfrak{x}_\nu, 0)$ ist sich selbst zugeordnet, und alle Gitterpunkte, die den Punkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, ..., $(\mathfrak{x}_\nu - 1, 0)$ zugeordnet sind, haben eine kleinere $\mathfrak{x}$-Koordinate als $\mathfrak{x}_\nu$. Dann sind der Punkt P $(\mathfrak{x}_\nu, p - \mathfrak{x}_\nu)$ und alle Punkte unbelegt, die auf der Geraden $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_\nu$ über P liegen. $Q(\tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{y}})$ sei nun der Punkt, der dem Punkt $(\lambda_\nu - 1, 0)$ der Grundverteilung zugeordnet ist. Es ist nach Voraussetzung $\lambda_\nu - 1 \leqq \tilde{\mathfrak{x}} < \mathfrak{x}_\nu$, $\tilde{\mathfrak{y}} > p - \mathfrak{x}_\nu$; wir setzen $\mathfrak{x}_\nu - \tilde{\mathfrak{x}} = c$ und verschieben die Marke, die auf Q liegt, um c waagerecht nach rechts auf den Punkt $R(\mathfrak{x}_\nu, \tilde{\mathfrak{y}})$ und dafür die, die auf $(\mathfrak{x}_\nu, 0)$ liegt, um c nach links in den Punkt $(\tilde{\mathfrak{x}}, 0)$. Beides ist möglich ohne daß zwei Marken auf denselben Gitterpunkt fallen könnten. An den Summen der $\mathfrak{x}$- und der $\mathfrak{y}$-Koordinaten haben wir nichts geändert, und wir sind zu einer gleichwertigen Markenverteilung V' gekommen.

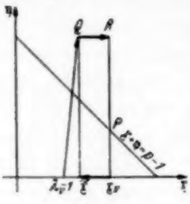


Fig. 6.

$$(\lambda_\nu - 1, 0) \to (\tilde{\mathfrak{x}}, 0),$$
$$(\mathfrak{x}_\nu, 0) \to (\mathfrak{x}_\nu, \tilde{\mathfrak{y}})$$

ist eine sinnvolle Zuordnung, und da $\mathfrak{x}_\nu - c \geqq \lambda_\nu - 1$, ist auch V' eigentlich. R ist von P verschieden. Verschieben wir die Marke von R nach P, so bleibt die Markenverteilung eigentlich. Da die Verschiebung von P nach R positiv ist, können V' und damit auch V nicht wesentlich sein. Damit ist der Satz bewiesen.

Ist ν eine Nicht-Lücke, so kann in keiner wesentlichen Markenverteilung auf $(\nu - 1, 0)$ eine Marke fallen. Wir wollen die Punkte $(\nu - 1, 0)$ *verboten* nennen. Alle übrigen Gitterpunkte des ersten Quadranten stehen den Marken zur Verfügung; sie mögen *erlaubte* Punkte heißen.

Satz 4. *Alle Punkte $(\lambda_\nu - 1, 0)$ der $\mathfrak{x}$-Achse links von $(p, 0)$ sind in einer wesentlichen Markenverteilung V belegt.*

Wir können den Beweis des Satzes 2 für diesen Satz wörtlich übernehmen; denn ist etwa $(\lambda_\nu - 1, 0)$ unbelegt, so kann nach Satz 3 kein Punkt der Achse rechts von ihm belegt sein. Legt man die Marke, die in der Grundverteilung auf ihm lag, wieder darauf, so bleibt die Markenverteilung eigentlich, und V kann nicht wesentlich sein.

§ 10.

Das Newtonsche Polygon.

Die Singularität von $W = 0$ wollen wir dadurch beschreiben, daß wir feststellen, wie viele Zweige einer bestimmten Art jeweils durch den Nullpunkt gehen. Es ist dies eine Möglichkeit unter vielen, die Singularität einer Kurve zu beschreiben, aber für uns wohl die geeignetste.

Für einen Zweig von $W = 0$ sind uns zwei Zahlen wesentlich: erstens die Zahl q der Schnittpunkte, die ein beliebiger linearer Zweig mit ihm im Nullpunkt hat, und zweitens die Zahl $q + r$ der Schnittpunkte, die die Grundkurve dort mit ihm hat. Wir nehmen an, q und r seien teilerfremd, und betrachten einen Zweig mit den Zahlen $\varrho \cdot q$ und $\varrho \cdot r$ als den Inbegriff von ϱ zusammenfallenden Zweigen. — Die Anzahl der Zweige von $W = 0$, die zu einem bestimmten Zahlenpaar q, r gehören, wollen wir mit $A(q, r)$ bezeichnen. Unser Ziel sei, alle Zahlen $A(q, r)$ zu bestimmen; sie beschreiben das, was von der Singularität für uns wichtig ist, und sind invariant gegenüber einer Cremona-Transformation, deren Fundamentalsystem nicht gerade durch den Nullpunkt geht.

Zur Durchführung zeichnen wir uns in eine (ξ, η)-Ebene eine Art Newtonsches Polygon der Singularität: wir ordnen dem Gitterpunkt (ξ, η) die Ableitung $\frac{\partial^{\xi} W}{\partial x^{\xi - \eta}\, \partial y^{\eta}}$ und die entsprechenden Klassen von gleichwertigen Markenverteilungen zu; die Gesamtanzahl der Differentiationen tragen wir also als Abszisse und die Anzahl der Differentiationen nach y als Ordinate in die (ξ, η)-Ebene ein. Die Punkte, denen eine eigentliche Markenverteilung entspricht, fassen wir zu einer Menge $\mathfrak{M}$ zusammen und betrachten einen gegen den Nullpunkt konvexen Polygonzug der folgenden Art: er beginne in einem Punkt der η-Achse und ende in einem Punkt der Geraden $\xi = \eta$; seine Eckpunkte gehören der Menge $\mathfrak{M}$ an, aber kein Punkt im Innern des von ihm und den Achsen eingeschlossenen Flächenstückes möge $\mathfrak{M}$ angehören. Dieser Polygonzug heiße das *Newtonsche Polygon.*

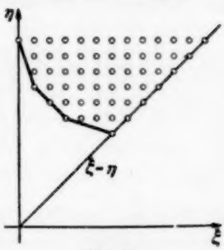


Fig. 7.
Newtonsches Polygon bei der Lückenverteilung 1 2 3 4 5 . . . 9 10 11.

Um nun die Anzahl $A(q, r)$ zu bestimmen, legen wir eine Stützgerade γ der Form $q\xi + r\eta = s$ so an das Newtonsche Polygon, daß kein Punkt von $\mathfrak{M}$ links von γ liegt, wohl aber mindestens ein Punkt von $\mathfrak{M}$ auf γ. Wir behaupten dann:

Geht γ nur durch eine Ecke des Newtonschen Polygons, so ist $A(q, r) = 0$; enthält γ eine Seite des Newtonschen Polygons, auf der einschließlich der Ecken $h + 1$ Gitterpunkte liegen, so ist $A(q, r) = h$.

Zum Beweise setzen wir einen Zweig der verlangten Form durch eine Reihenentwicklung

$$y = \alpha_0 x^{\frac{q+r}{q}} + \alpha_1 x^{\frac{q+r+1}{q}} + \dots$$

mit unbestimmten Koeffizienten an. Setzen wir diese in W ein, so muß W identisch verschwinden; dies liefert uns Gleichungen für die Koeffizienten der Reihenentwicklung. Bei diesem Einsetzen wird aus dem Potenzprodukt $x^{\xi-\eta} y^{\eta}$ die Reihe $\alpha_0^{\eta} x^{\frac{q\xi+r\eta}{q}} + \dots$. Wir fassen jetzt gleiche Potenzen zusammen und bestimmen den Koeffizienten des niedersten Gliedes. Es setzt sich aus den ersten Gliedern der Reihenentwicklungen für diejenigen Potenzprodukte zusammen, für die $q\xi + r\eta$ möglichst klein ist, deren Bilder also auf γ liegen. Der Koeffizient ist ein Polynom in α_0, und in ihm unterscheiden sich der Exponent des höchsten von dem des niedersten Gliedes um $h + 1$. Dieses Polynom, gleich Null gesetzt, ist eine Gleichung für α_0; wir haben also h von 0 verschiedene Werte von α_0 und damit h Zweige mit den Zahlen q und r zu erwarten: $A(q, r) = h$.

Wir wollen nun versuchen, ein bißchen deutlicher zu sehen, in welcher Weise wir die Zweige zu zählen haben, wenn mehrere Werte von α_0 zusammenfallen. Die in $A(q, r)$ aufgezählten Zweige können wir dadurch kennzeichnen, daß sie durch eine bestimmte Reihe von aufeinanderfolgenden Satelliten [2]) des Nullpunktes gehen. Sie unterscheiden sich durch den auf den letzten Satelliten folgenden freien Punkt, durch den sie gehen. Um uns die Verhältnisse besser ansehen zu können, wollen wir die Umgebung dieses letzten Satelliten vermöge einer Cremona-Transformation auf die Punkte einer Geraden $\bar{y} = 0$ abbilden. Genügen die beiden Zahlen a und b der Gleichung $\begin{vmatrix} a & b \\ q & q+r \end{vmatrix} = 1$, so ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$\begin{aligned} x &= \bar{y}^{q} \bar{x}^{a} \\ y &= \bar{y}^{q+r} \bar{x}^{b} \end{aligned}$$

eine Cremona-Transformation, die das verlangte leistet. Transformieren wir ein Potenzprodukt $x^{\xi-\eta} y^{\eta}$, und bezeichnen die neue Exponentensumme mit $\bar{\xi}$ und den Exponenten von $\bar{y}$ mit $\bar{\eta}$, so wird:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= (a+q)\,\xi + (b+r-a)\,\eta \\ \bar{\eta} &= \quad\; q\,\xi + \qquad\quad r\,\eta. \end{aligned}$$

Diese Transformation ist affin, und an der Konstruktion von γ und an der Berechnung und dem Wert von h hat sich nichts geändert. γ hat die Gleichung

---

[2]) Über den Begriff des Satelliten vgl. Enriques-Chisini, Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, 2. Bd.

$\bar{\eta} = s$. Aus den Zweigen mit den Zahlen q und r sind jetzt die Zweige von $W = 0$ geworden, die $\bar{y} = 0$ in einem vom Nullpunkt und dem unendlich fernen Punkt verschiedenen Punkte schneiden. Die oben ausgeführte Berechnung liefert $\bar{h}$ von 0 und ∞ verschiedene Schnittpunkte von $W = 0$ mit $\bar{y} = 0$.

Schneidet ein Zweig von $W = 0$ $\bar{y} = 0$ in ϱ zusammenfallenden Punkten, so haben wir in der (x, y)-Ebene einen Zweig mit den Zahlen ϱq und ϱr vor uns. Hier haben wir die Rechtfertigung dafür, daß wir einen solchen Zweig ϱ-fach unter die Zweige mit den Zahlen q und r zählen durften.

Es kann natürlich auch vorkommen, daß $W = 0$ auf $\bar{y} = 0$ einen mehrfachen Punkt hat, obwohl dort f nicht verschwindet, ja sogar, daß Lage und Art eines solchen Punktes unabhängig von den willkürlichen Polynomen ist. Durch die Angabe der Zahlen $A(q, r)$ ist also die Singularität von $W = 0$ nur teilweise beschrieben.

Diese Betrachtungen sind jedoch für die Lückenverteilung der Weierstraß-Punkte nicht von Wichtigkeit. Wir werden uns überdies später davon überzeugen, daß wir unter bestimmten Voraussetzungen über die Grundkurve durch geeignete Wahl der willkürlichen Polynome erreichen können, daß $W = 0$ mit $\bar{y} = 0$ außer dem Nullpunkt und dem unendlich fernen Punkt lauter getrennte Schnittpunkte hat, daß wir also diese verwickelteren Singularitäten vermeiden können. Wir wollen uns im folgenden mit der Bestimmung der Zahlen $A(q, r)$ begnügen.

§ 11.

Die Lücken von 1 bis $p + 1$.

1. Wir wollen zunächst nach der Anzahl $A(1, 0)$ der linearen Zweige von $W = 0$ fragen, die durch den Weierstraß-Punkt hindurchgehen, ohne dort $f = 0$ zu berühren. Wir haben an das Newtonsche Polygon eine Stützgerade der Form $\xi = \text{const}$ zu legen, also die Ableitungen niedrigster Stufe ins Auge zu fassen. In den zugehörigen Markenverteilungen muß die Gesamtsumme der Koordinaten möglichst klein sein; dies ist der Fall, wenn alle Marken, die in dem Dreieck $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \leqq p - 1$, $\mathfrak{x} \geqq 0$, $\mathfrak{y} \geqq 0$ keinen Platz finden, auf die Gerade $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = p$ zu liegen kommen. Wo sie auf dieser Geraden liegen, ist für die Gesamtsumme der Koordinaten gleichgültig.

Uns gehen hier die beiden äußersten Lagen an, in denen die Summe der $\mathfrak{x}$-Koordinaten am kleinsten und am größten ist. Die Differenz dieser beiden Summen ist $A(1, 0)$.

Die Berechnung dieser beiden Summen wollen wir uns noch durch folgende Bemerkung vereinfachen: da beide Markenverteilungen wesentlich sind, sind in ihnen nach Satz 2 des § 9 alle Gitterpunkte des Dreiecks $\varDelta$ belegt, und ihre Koordinaten fallen bei der Differenzberechnung heraus. Wir wollen sie deshalb gleich von vornherein weglassen und nur die Marken auf der Geraden $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = p$ und auf der $\mathfrak{x}$-Achse betrachten.

Jene beiden äußersten Lagen sind:

1. Die Markenverteilung V_1, für die die Summe der $\mathfrak{x}$-Koordinaten möglichst klein ist. In diesem Fall sind die in Frage kommenden Zuordnungen zur Grundverteilung:

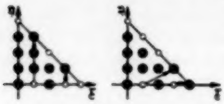


Fig. 8.
($p=4$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=5$.)

$$(\lambda_\nu-1,0)\to(\lambda_\nu-1,0)\qquad \nu=1,2,\ldots$$
$$(\mathfrak{x},0)\to(\mathfrak{x},p-\mathfrak{x})\qquad \mathfrak{x}\neq\lambda_\nu-1.$$

Die Summe der $\mathfrak{x}$-Koordinaten ist hier $\frac{p(p-1)}{2}$.

2. Die Markenverteilung V_2, für die die Summe der $\mathfrak{x}$-Koordinaten möglichst groß ist.

Hier sind zunächst die Punkte

$$(\lambda_1-1,0)\,(\lambda_2-1,0)\ldots(\lambda_\alpha-1,0)$$

auf der $\mathfrak{x}$-Achse belegt, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\alpha$ die Lückenzahlen von 1 bis $p+1$ einschließlich sind. Für die Lücken von 1 bis p ist dies der Inhalt des Satzes 4, § 9. Ist $p+1$ eine Lücke, so ist $(p, 0)$ in V_2 belegt, da dieser Punkt auf der Geraden $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}=p$ die größte $\mathfrak{x}$-Koordinate bei nichtnegativer $\mathfrak{y}$-Koordinate hat. Die Summe der $\mathfrak{x}$-Koordinaten aller dieser Marken ist:

$$\sum_1^\alpha{}_\nu(\lambda_\nu-1)=\sum_1^\alpha{}_\nu\lambda_\nu-\alpha. \tag{20}$$

Die übrigen $p-\alpha$ Marken, die in der Grundverteilung auf der $\mathfrak{x}$-Achse lagen, belegen jetzt die Punkte

$$(p-1,1),\ (p-2,2),\ldots,(\alpha,p-\alpha) \tag{21}$$

auf der Geraden $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}=p$. Die Summe ihrer $\mathfrak{x}$-Koordinaten ist:

$$\frac{p(p-1)}{2}-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}. \tag{22}$$

Addieren wir (20) und (22) und ziehen davon $\frac{p(p-1)}{2}$ ab, so wird:

$$A(1,0)=\sum_1^\alpha{}_\nu\lambda_\nu-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}.$$

2. Aus diesen Überlegungen läßt sich auch leicht die Gesamtvielfachheit von $W=0$ im Nullpunkt ablesen. Wir brauchen dazu nur die Gesamtsumme der Koordinaten einer der beiden Markenverteilungen, etwa von V_2, zu bestimmen und davon die Gesamtsumme der Koordinaten der Grundverteilung abzuziehen. Die Marken des Dreiecks Δ wollen wir dabei wieder aus dem Spiele lassen.

Die Differenz $A(1,0)$ der Summen der $\mathfrak{x}$-Koordinaten der übrigen Marken haben wir eben berechnet. Die Summe der $\mathfrak{y}$-Koordinaten von V_2

läßt sich aus (21) leicht zu $\frac{(p-\varkappa)(p-\varkappa+1)}{2}$ berechnen; die Summe der $\mathfrak{y}$-Koordinaten der Grundverteilung ist 0. Die Vielfachheit von $W = 0$ im Nullpunkt ist demnach:

$$A(1, 0) + \frac{(p-\varkappa)(p-\varkappa+1)}{2},$$

und die Gesamtheit der Zweige von $W = 0$, die $f = 0$ berühren oder nicht linear sind, hat die Vielfachheit

$$\frac{(p-\alpha)(p-\varkappa+1)}{2}.$$

Ist nun die Singularität bekannt und die Lückenverteilung gesucht, dann kann ich hieraus α berechnen. $\sum_{1}^{\alpha} \lambda_r$ ergibt sich dann aus $A(1,0)$.

Wir haben die Möglichkeit gefunden, aus der Lückenverteilung von 1 *bis* $p+1$ *die Anzahl der linearen Zweige zu bestimmen, die* $f = 0$ *nicht berühren. Aber, wie wir sahen, geht in diese Formel nur Anzahl und Summe dieser Lücken ein. Umgekehrt können wir aus der Singularität der Weierstraß-Kurve auch nur Anzahl und Summe der Lücken von* 1 *bis* $p+1$ *bestimmen. Wie dort die Lückenverteilung im einzelnen aussieht, bleibt für die erste Frage unwesentlich, bei der umgekehrten unbestimmt.*

§ 12.

Die Lücken oberhalb von $p+1$.

Wir wollen jetzt die übrigen Zahlen $A(q, r)$ aus der Lückenverteilung bestimmen. Um einfachere Bilder vor Augen zu haben, führen wir in der $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Ebene neue Koordinaten ein, die mit den alten durch die Beziehungen

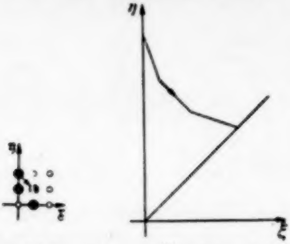
$$\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}} - \bar{\mathfrak{y}} + p$$
$$\mathfrak{y} = \bar{\mathfrak{y}}$$

verknüpft sein mögen. Das Dreieck $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \leqq p - 1$, $\mathfrak{x} \geqq 0$, $\mathfrak{y} \geqq 0$ kommt dann auf die linke Seite der $\bar{\mathfrak{y}}$-Achse. Welche Gitterpunkte dieses Dreiecks belegt sind, steht nach den Sätzen des § 9 fest; wir wollen es nicht weiter betrachten und uns jetzt nur noch mit den Marken befassen, die im übrigen Teil des ersten Quadranten der $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Ebene, also in dem Gebiet $\bar{\mathfrak{x}} \geqq 0$, $\bar{\mathfrak{y}} \geqq 0$, $\bar{\mathfrak{y}} - \bar{\mathfrak{x}} \leqq p$ liegen. Ihre Anzahl sei β.

Nachträglich wollen wir die Striche über den Koordinaten wieder weglassen.

Wir wollen zunächst nach den Beziehungen suchen, die sich zwischen den Figuren der (ξ, η)-Ebene und den Markenverteilungen der $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Ebene herstellen lassen. Verschieben wir eine Marke von einem Gitter-

punkt $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1)$ nach einem Gitterpunkt $(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2)$, fügen wir also zu der Summe der $\mathfrak{x}$-Koordinaten und zu der Summe der $\mathfrak{y}$-Koordinaten die Beträge $\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1$ hinzu, so sind wir in der (ξ, η)-Ebene von dem Punkt (ξ, η) auf den Punkt $(\xi + \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1,\ \eta + \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1)$ übergegangen. *Die Verschiebungen der Marken in der $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Ebene und die entsprechenden Übergänge in der (ξ, η)-Ebene sind also parallel.*



Verschiebung der Marke. Übergang im Newtonschen Polygon.

Fig. 9.

Die Gerade γ mit der Gleichung $q\,\xi + r\,\eta = \sigma$ enthalte eine Seite des Newtonschen Polygons; π sei ein Punkt dieser Seite. Wir legen eine π zugeordnete Markenverteilung zugrunde und legen in die $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Ebene eine solche Gerade g mit der Gleichung $q\,\mathfrak{x} + r\,\mathfrak{y} = s$ parallel zu γ, daß auf g noch Marken liegen, aber rechts von g keine mehr. Dann können wir uns davon überzeugen, daß alle erlaubten Punkte links von g belegt sind. Denn andernfalls wäre die Verschiebung von einem Punkt auf g nach einem Punkte links von g möglich; ihr entspräche ein Übergang von π nach einem Punkt links von γ. Aber die ganze Menge $\mathfrak{M}$ liegt rechts von γ, und wir haben einen Widerspruch. *Zu einem Punkt π einer Seite γ des Newtonschen Polygons gibt es also in jeder zu ihm gehörigen Anordnung der Marken eine zu γ parallele Gerade g mit der Gleichung $q\,\mathfrak{x} + r\,\mathfrak{y} = s$ von der Art, daß links von ihr alle erlaubten Punkte belegt sind, rechts von ihr aber keiner. Von den Gitterpunkten auf g selbst ist mindestens einer belegt.*

Fig. 10.

Wir wollen jetzt das absolute Glied s in der Gleichung für g zu bestimmen suchen. Es bezeichne $\nu(z)$ die Anzahl der Nicht-Lücken unterhalb der Zahl z. g schneidet die $\mathfrak{x}$-Achse im Punkte $\left(\frac{s}{q}, 0\right)$. Links von g gibt es auf der $\mathfrak{x}$-Achse ebensoviele verbotene Punkte, als es Nicht-Lücken zwischen p und $\frac{s}{q} + p + 1$ gibt (die Grenzen ausgeschlossen), also

$$\nu\left(\frac{s}{q} + p + 1\right) - \nu(p + 1).$$

Nach den Sätzen des § 9 sind die Marken, mit denen wir uns noch befassen, denjenigen Punkten $(\mathfrak{x}, 0)$ der Grundverteilung zugeordnet, für die $\mathfrak{x} < p$ und $\mathfrak{x} + 1$ eine Nicht-Lücke ist. Ihre Anzahl ist $\beta = \nu(p + 1)$.

Wir wollen mit $d(q, r; s)$ die Anzahl der Gitterpunkte des Dreiecks $q\mathfrak{x} + r\mathfrak{y} < s$, $\mathfrak{x} \geqq 0$, $\mathfrak{y} \geqq 0$ bezeichnen. (Ein besonderer Fall dieser Begriffsbildung ist die Dreieckszahl $d(1, 1; s) = \frac{s(s+1)}{2}$). Die Punkte dieses Dreiecks sind alle belegt oder verboten, und mindestens eine Marke liegt auf keinem von diesen Punkten. Das ergibt die Ungleichung:

$$d(q, r; s) < \left[\nu\left(\frac{s}{q} + p + 1\right) - \nu(p+1)\right] + \nu(p+1) = \nu\left(\frac{s}{q} + p + 1\right). \tag{23a}$$

Andererseits darf kein Punkt rechts von g belegt sein; alle Marken müssen links von g oder auf g Platz finden:

$$d(q, r; s+1) \geqq \nu\left(\frac{s+1}{q} + p + 1\right). \tag{23b}$$

Wir wollen die Funktion $d(q, r; s)$ wenigstens für die Werte $s = kqr$ ausrechnen (k ganzzahlig). Die Gerade g mit der Gleichung

$$q\mathfrak{x} + r\mathfrak{y} = k \cdot q \cdot r$$

schneidet die Achsen in den Punkten $(kr, 0)$ und $(0, kq)$ und ist Diagonale des Rechtecks mit den Ecken $(0, 0)$, $(kr, 0)$, $(0, kq)$, (kr, kq). In diesem Rechteck liegen $(kr+1)(kq+1)$ Gitterpunkte, davon $k+1$ auf g. Rechts und links der Diagonalen liegen gleichviele, also

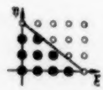


Fig. 11.
($q = 4$, $r = 3$, $k = 1$
$d(4, 3; 12) = 9$.)

$$d(q, r, kqr) = \frac{(kq+1)(kr+1) - (k+1)}{2}$$

Gitterpunkte.

$d(q, r; s)$ und $\nu\left(\frac{s}{q} + p + 1\right)$ sind beständig nicht abnehmende Funktionen von s. Aber auch

$$t(s) = d(q, r; s) - \nu\left(\frac{s}{q} + p + 1\right) \tag{24}$$

nimmt beständig nicht ab. Denn wenn ν beim Übergang von s auf $s+1$ um eine Einheit wächst (stärker kann ν nicht wachsen), so ist mit dem Auftreten einer neuen Nicht-Lücke ein neuer (verbotener) Gitterpunkt in das Gebiet links von g getreten, und d ist ebenfalls um 1 gewachsen. Nun ist $t(0)$ negativ, denn $d(q, r; 0) = 0$ und $\nu(0 + p + 1) > 0$. $t(pqr)$ ist positiv, denn $d(q, r; pqr) = \frac{(pq+1)(pr+1) - (r+1)}{2}$ und $\nu(pr + p + 1) = pr$, da es unterhalb von $pr + p + 1 (> 2p)$ genau p Lücken und daher pr Nicht-Lücken gibt; für $p \geqq 2$ ist

$$d(q, r; pqr) > \nu(pr + p + 1) \quad \text{und} \quad t(pqr) > 0.$$

Es gibt einen und nur einen Wert von s, für den $t(s)$ noch negativ ist, $t(s+1)$ nicht mehr. Dieser Wert von s erfüllt unsere Gleichung (23a). Auf g selbst sind $-t(s)$ erlaubte Gitterpunkte belegt, $t(s+1)$ nicht.

Wir haben damit ein Verfahren gefunden, s und t durch endlich viele Versuche zu bestimmen, wenn die Lückenverteilung und q und r gegeben sind.

Man könnte den Zusammenhang auch formelmäßig darstellen unter recht häufigem Gebrauch der Funktion $[x]$. Jedoch wird dadurch nichts an Deutlichkeit gewonnen.

s ist demnach allein durch die Lückenverteilung und die Richtungsgrößen gegeben. Die Gerade g ist in allen Anordnungen der Marken, die zu den Punkten von γ gehören, dieselbe, und diese Anordnungen unterscheiden sich nur durch die Verteilungen der Marken auf g.

Ist π eine Ecke des Newtonschen Polygons, so liegt π auf zwei Seiten γ_1 und γ_2, und zwar möge γ_1 von links, γ_2 von rechts an π herangehen. Ihnen entsprechen in jeder zu π gehörigen Markenverteilung zwei Geraden g_1 und g_2 mit den angegebenen Eigenschaften, aber mit verschiedenen Richtungen. Sie mögen sich in einem Punkt P schneiden.

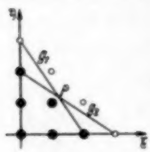


Fig. 12.

Dann sind auf g_2 alle erlaubten Gitterpunkte links von P belegt, die Punkte rechts von P nicht, denn diese Punkte liegen dann auch links und rechts von g_1. Ebenso sind auf g_1 die Punkte links von P unbelegt, die Punkte rechts von P belegt. P selbst kann belegt sein, braucht es aber nicht; P braucht sogar nicht einmal ein Gitterpunkt zu sein. Die Anordnung der Marken ist in diesem Fall eindeutig. Zu π gehört eine einzige Determinante, die durch die beschriebene Anordnung der Marken gekennzeichnet ist; sie stellt für sich die Ableitung von W dar, die dem Punkt π entspricht.

Es sei jetzt γ eine Seite des Newtonschen Polygons, π_1 ihr linker, π_2 ihr rechter Endpunkt, g die entsprechende Gerade der $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Ebene. Nach dem eben gesagten liegen auf g die Marken in der π_1 zugeordneten Anordnung so weit links wie möglich, in der π_2 zugeordneten Anordnung so weit rechts wie möglich.

Wie wir gesehen haben, liegen

$$-t(s) = \nu\left(\frac{s}{q} + p + 1\right) - d(q, r; s)$$

Marken auf g, und auf g sind

$$t(s+1) = d(q, r; s+1) - \nu\left(\frac{s+1}{q} + p + 1\right)$$

erlaubte Punkte unbelegt. Beim Übergang von π_1 nach π_2 habe ich die ganze Gruppe von $-t(s)$ Marken von ganz links nach ganz rechts, also

um $t(s+1)$ Plätze weiterzuschieben. Diese Verschiebung kann ich mir in $-t(s)\cdot t(s+1)$ Verschiebungen der einzelnen Marken von einem Gitterpunkt zum nächsten aufgelöst denken. Einer solchen Verschiebung entspricht der Übergang von einem Gitterpunkt der Geraden γ zum nächsten. *Die Seite des Newtonschen Polygons, die auf γ liegt, geht demnach durch* $-t(s)\cdot t(s+1)+1$ *Gitterpunkte, und die Anzahl* $A(q, r)$ *der Zweige mit den charakteristischen Zahlen q und r ist:*

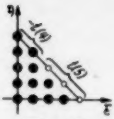


Fig. 13.

$(A(1, 1) = 6.)$

$$A(q, r) = -t(s)\cdot t(s+1).$$

Wir müssen uns nun die Frage vorlegen, welche Werte von q und r überhaupt in Betracht kommen, und von welchen Werten wir von vornherein sagen können, daß $A(q, r)$ verschwindet. Denn wir müssen doch nach endlich vielen Schritten die Singularität beschrieben haben.

$A(q, r)$ kann nur dann einen von Null verschiedenen Wert haben, wenn auf der Geraden g mindestens zwei Gitterpunkte liegen. Der kleinste Wert von s, für den das der Fall ist, ist $s = q\cdot r$; es liegt dann auf jeder Koordinatenachse ein Gitterpunkt von g, aber keiner dazwischen. Es ist $d(q, r; qr) = \frac{(q+1)(r+1)-2}{2}$, und dies muß kleiner sein als $\nu(r+p+1)$. Nun sind unter den Zahlen von 1 bis $2p$ gerade p Lücken und p Nicht-Lücken. Ist $r \leqq p$, so ist $\nu(r+p+1) \leqq p$; ist $r \geqq p$, so ist $\nu(r+p+1) = r$. In dem einen Fall ist:

$$\frac{(q+1)(r+1)-2}{2} < p; \quad (q+1)(r+1) \leqq 2p+1.$$

Der andere Fall führt auf die Ungleichung:

$$\frac{(q+1)(r+1)-2}{2} < r,$$

die für $q \geqq 1$ nicht richtig ist. Es ist also $r \leqq p$ und

$$(q+1)(r+1) \leqq 2p+1. \tag{25}$$

Da q und r ganze positive Zahlen sind, kann es für sie nur endlich viele Werte geben, die die Ungleichung (25) erfüllen.

Wir können aus der Lückenverteilung die Zahlen $A(q, r)$ bestimmen. Es fragt sich, ob sich auch umgekehrt die Lückenverteilung aus den Zahlen $A(q, r)$ ablesen läßt. Sie können nun sicher nicht willkürlich gegeben werden; schon einfache Beispiele zeigen, daß es Werte dieser Zahlen gibt, denen keine Lückenverteilung entspricht. Unsere Frage kann nur so lauten: kann man aus einem in Frage kommenden Wertsystem der Zahlen $A(q, r)$ eindeutig auf die Lückenverteilung schließen, oder gibt es verschiedene Lückenverteilungen, die zu denselben Zahlen führen? Wir werden uns von der Eindeutigkeit dieser Beziehung überzeugen.

Wir wollen einmal das ganze Newtonsche Polygon in Richtung wachsender ξ-Werte durchlaufen. Wenn ξ seinen kleinsten Wert hat, sind wir mit den Differentiationen nach beiden Veränderlichen zusammen so sparsam umgegangen wie möglich; alle überhaupt differenzierten Kolonnen sind in die p-te Stufe erhoben worden; die beweglichen Marken liegen alle auf der $\mathfrak{y}$-Achse.

Am anderen Ende des Newtonschen Polygons hat η seinen kleinsten Wert, nämlich 0. η ist die Summe der $\mathfrak{y}$-Koordinaten aller Marken; da keine von ihnen negativ sein kann, müssen sie alle verschwinden, und alle beweglichen Marken liegen auf der $\mathfrak{x}$-Achse. Ihre Abszissen sind die Lückenzahlen, vermindert um $p+1$, und sind sicher kleiner als $p-2$.

Und nun habe ich nacheinander erst steilere und dann flachere Geraden g zu betrachten und auf ihnen die beweglichen Marken zu verschieben. Geht die Gerade g durch einen Gitterpunkt der $\mathfrak{x}$-Achse, so ist es für die Anzahl $A(q, r)$ sehr wesentlich, ob dieser Gitterpunkt erlaubt oder verboten ist; denn $-t(s)$ ist in beiden Fällen gleich, $t(s+1)$ aber nicht. Wir brauchen bloß noch zu beweisen, daß die Gerade g bei ihrer Bewegung durch jeden Punkt P der $\mathfrak{x}$-Achse einmal hindurchgeht, dessen Abszisse kleiner ist als $p-2$. Ist aber P ein erlaubter Gitterpunkt, so muß einmal im Verlauf des Verfahrens eine Marke auf ihn hinaufgeschoben werden, denn am Ende des Verfahrens ist P belegt. In diesem Augenblick geht die Gerade g durch P hindurch, da die Marken nur längs g verschoben werden können. Hat g die Gleichung $q_1\,\mathfrak{x} + r_1\,\mathfrak{y} = s$, so erhalten wir verschiedene Werte für $A(q_1, r_1)$, je nachdem ob P erlaubt ist oder nicht. Ändere ich die Lückenverteilung oberhalb von $p+1$, so ändert mindestens eine der Zahlen $A(q, r)$ ihren Wert.

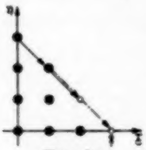


Fig. 14.

Es erscheint noch wissenswert, wie oft der Weierstraß-Punkt unter die Schnittpunkte von $W=0$ und $f=0$ gerechnet werden muß. Um dies zu beantworten, müssen wir uns diejenige wesentliche Markenverteilung ansehen, bei der alle P-Marken, die in der Grundverteilung auf der $\mathfrak{x}$-Achse lagen, noch immer auf der $\mathfrak{x}$-Achse, und zwar nach Satz 3, § 9 in den Punkten

$$(\lambda_1 - 1, 0),\ (\lambda_2 - 1, 0), \ldots, (\lambda_p - 1, 0)$$

liegen. Die Summe der $\mathfrak{x}$-Koordinaten ist in ihr um $\left(\sum_1^p \lambda_\nu - \frac{p(p+1)}{2}\right)$ größer als in der Grundverteilung. Dies ist die gesuchte Schnittvielfachheit[3]). Es ist die Summe der Lücken, vermindert um die Summe der

[3]) Vgl. dazu H. Geppert, Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 70.

Lücken eines Punktes, der nicht Weierstraß-Punkt ist. Diese Zahl können wir wohl als Rang[4]) des Weierstraß-Punktes bezeichnen. Die Summe der Rangzahlen aller Weierstraß-Punkte ist dann $(p+1)p(p-1)$, die in § 7 errechnete Anzahl derjenigen Schnittpunkte von $W=0$ und $f=0$, die weder vielfache Punkte von $f=0$ noch Schnittpunkte von $W=0$ mit $D=0$ oder $b=0$ sind.

§ 13.

Ausartungen.

Wir haben uns in den letzten Paragraphen auf den allgemeinen Fall beschränkt, daß Ableitungen von φ und f, in denen mindestens einmal nach y differenziert wurde, sowie Determinanten aus solchen Größen im Nullpunkt weder verschwinden, noch solche Werte annehmen, daß die Koeffizienten der ersten Glieder in den Reihenentwicklungen der einzelnen Zweige Anlaß zu zusätzlichen Singularitäten geben. In speziellen Fällen brauchen diese Annahmen durchaus nicht richtig zu sein; die Singularität von $W=0$ kann in solchen Fällen eine andere sein als die wir ausgerechnet haben. Wir haben nur ein Ideal angegeben, dem W angehört, ohne behaupten zu können, daß W als Basiselement dieses Ideals zu brauchen sei.

So ist z. B. der Fall sehr gefährlich, daß eine Adjungierte im Weierstraß-Punkt einen p-fachen Punkt hat. Dieser Fall ist jedoch die Ausnahme. Damit er eintrete, muß f noch eine Reihe von Bedingungen erfüllen. Sind diese nicht erfüllt, ist kein Weierstraß-Punkt von $f=0$ für eine adjungierte Kurve p-fach oder von noch höherer Vielfachheit, so können wir beweisen, daß die Kurve $W=0$ bei geeigneter Wahl der Polynome a und b wirklich nur die geforderte Singularität und keine höhere hat.

Wir wollen uns zunächst davon überzeugen, daß die Ableitungen von W, die den Ecken des Newtonschen Polygons entsprechen, nicht bei beliebiger Wahl der Polynome a und b verschwinden können. Eine solche Ableitung besteht aus einer einzigen Determinante D_1. Die Kolonnen von D_1 wollen wir so ordnen, daß zuerst die Kolonnen kommen, in denen nur nach x differenziert wurde, und diese wollen wir nach der Anzahl dieser Differentiationen ordnen. Nun ist D_1 einer wesentlichen Markenverteilung zugeordnet und beginnt daher nach Satz 3, § 9 mit den Kolonnen

$$\frac{\partial^{\lambda_1-1}K}{\partial x^{\lambda_1-1}},\ \frac{\partial^{\lambda_2-1}K}{\partial x^{\lambda_2-1}},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\lambda_\varrho-1}K}{\partial x^{\lambda_\varrho-1}}.$$

[4]) Sonst Vielfachheit. Hier haben wir das Wort schon in anderem Sinne gebraucht.

In der ν-ten von ihnen steht in der Hauptdiagonale $\frac{\partial^{\lambda_\nu - 1}(b\,\varphi_\nu)}{\partial x^{\lambda_\nu - 1}}$; darunter stehen lauter Nullen. Wir können also von D die Faktoren

$$\frac{\partial^{\lambda_1 - 1}(b\,\varphi_1)}{\partial x^{\lambda_1 - 1}} \cdot \frac{\partial^{\lambda_2 - 1}(b\,\varphi_2)}{\partial x^{\lambda_2 - 1}} \cdots \frac{\partial^{\lambda_\varrho - 1}(b\,\varphi_\varrho)}{\partial x^{\lambda_\varrho - 1}}$$

abspalten. Als Rest bleibt eine Determinante D_2, deren sämtliche Elemente mindestens einmal nach y differenziert sind, und zwar kommen alle Ableitungen bis zur $(p-1)$-ten Stufe vor, für die das der Fall ist.

In D_2 stehen von den Adjungierten nur noch $\varphi_{\varrho+1}, \varphi_{\varrho+2}, \ldots, \varphi_p$; von ihnen verschwinden alle Ableitungen nach x bis zur $(\lambda_\varrho - 1)$-ten. Es ist $\lambda_\varrho \geqq p$. Es ist nun nicht möglich, daß alle $(p-\varrho)$-reihigen Unterdeterminanten von D_2, die nur aus Ableitungen bis zur $(p-1)$-ten Stufe der Adjungierten gebildet sind, im Nullpunkt verschwinden. Denn sonst könnte man sich durch eine geeignete Linearkombination eine Adjungierte verschaffen, deren sämtliche Ableitungen bis zu den $(p-1)$-ten verschwinden, was gegen die Annahme verstößt. Unter diesen Unterdeterminanten suchen wir uns eine, etwa Φ heraus, die nicht verschwindet, die sich aber in jedem Fall in eine verschwindende verwandelt, wenn ich in ihren Kolonnen Differentiationen nach x oder y weglasse. Die komplementäre Unterdeterminante von Φ in D_2 sei D_3. Eine Determinante, die ich aus D_3 durch Differentiation von Kolonnen erhalte, kann in der Darstellung von D_2 keine Rolle spielen; denn entweder kommt sie formal nicht vor, oder ihre komplementäre Unterdeterminante verschwindet.

D_3 zerlegen wir vollständig; es gibt eine Teildeterminante D_4, deren sämtliche Kolonnen mit f_y multipliziert sind. Da wir vorausgesetzt haben, $f=0$ sei im Nullpunkt regulär und berühre die x-Achse, darf f_y dort nicht verschwinden. D_4 verschwindet im Nullpunkt nicht identisch.

Wir schreiben jetzt den Wert unserer Determinanten im Nullpunkt als Polynom in den Koeffizienten der a_ι. Ein beliebiges Glied g des Polynoms D_4 kann nur mit $f_y^{\frac{p(p-1)}{2}} \cdot \Phi$ multipliziert in D_2 vorkommen; denn käme g als Faktor eines Gliedes von D_2 vor, das auch noch höhere Ableitungen als f_y als Faktoren enthielte, so stünde g auch in einer Determinante, die aus D_4 durch Differentiation von Kolonnen entstanden sein könnte, was nicht möglich ist. Jenes Glied kann demnach überhaupt nur in D_3 vorkommen und muß in D_2 mit $f_y^{\frac{p(p-1)}{2}}\ \Phi$ multipliziert sein. In dem Polynom D_2 ist demnach mindestens ein Koeffizient von Null verschieden; D_2 verschwindet nicht identisch, und *durch geeignete Wahl der Polynome a können wir erreichen, daß D_2 und D_1 nicht ver-*

schwinden. Die in § 11 errechneten Zahlen $A(q, r)$ sind dann die wirklichen Anzahlen der Zweige, die von einer beliebigen Geraden q-fach, von $f = 0$ aber $(q + r)$-fach geschnitten werden.

Es könnte nun noch geschehen, daß mehrere Zweige des gleichen Typus sich stärker berühren als notwendig, oder daß sie zu einem noch verwickelteren Zweig verschmelzen. Diese Fälle treten dann ein, wenn die Gleichung $G(\alpha_0) = 0$, die wir für den Koeffizienten α_0 des ersten Gliedes in den Reihenentwicklungen der Zweige eines bestimmten Typus aufstellen können, eine mehrfache Wurzel hat. Wir wollen zeigen, daß wir dies durch geeignete Wahl der Polynome a_ν verhindern können.

Wenn diese Gleichung für jede Wahl der Polynome a_ν eine mehrfache Wurzel hätte, so müßte sie in dem Ring R der Koeffizienten der a_ν zerlegbar sein. Unser Ziel ist, das Gegenteil zu beweisen.

Nach § 10 sind die Koeffizienten von $G(\alpha_0) = 0$ — abgesehen von Binomialkoeffizienten — die Ableitungen von W, die den Gitterpunkten auf der Seite $q\xi + r\eta = \sigma$ des Newtonschen Polygons entsprechen; die Ableitungen V_1 und V_2, die den ersten und letzten Koeffizienten darstellen, entsprechen Ecken des Newtonschen Polygons, und deren Aufbau haben wir uns schon angesehen. Wir können in der oben angegebenen Weise aus V_1 eine Determinante D_4 herausschälen, deren Elemente — wenn ich x und y gleich Null setze — Koeffizienten der a_ν sind. Diese Determinante D_4 kommt in der Darstellung keiner anderen Ableitung von W vor als in V_1, denn durch D_4 sind die Ableitungen von K von der p-ten Stufe an aufwärts gegeben, die in einer solchen Ableitung vorkommen dürfen. Setzen wir alle Koeffizienten der a_ν gleich Null, die nicht in D_4 vorkommen, so verschwinden alle Ableitungen von W bis auf V_1, das jetzt in der Gestalt

$$V_1 = \Phi f_y^{\frac{p(p-1)}{2}} D_4$$

erscheint. Die Gleichung $G(\alpha_0) = 0$ zerfällt hier; aber da D_4 unzerlegbar ist, muß ein Faktor von G D_4 enthalten, also in den Koeffizienten der a_ν homogen vom Grade $\frac{p(p-1)}{2}$ sein, und die anderen Faktoren sind von den a_ν unabhängig.

Wir nehmen jetzt einmal an, G sei im Ring R zerlegbar. Da G homogen in den Koeffizienten der a ist, muß es auch jeder Faktor sein. Ein Faktor muß dabei den Grad $\frac{p(p-1)}{2}$ haben, denn in dem oben durchgerechneten Spezialfall hatte ein Faktor diesen Grad und kann nicht durch Spezialisierung aus einer Größe geringeren Grades entstanden sein. Dann haben aber alle anderen Faktoren in den Koeffizienten der a_ν den Grad Null und sind von den a_ν unabhängig.

In dem eben besprochenen Spezialfall ist nun jeder Faktor eine Potenz der Unbekannten. Andererseits können wir die Polynome a_ν so wählen, daß V_2 nicht verschwindet. Weder G noch einer ihrer Faktoren kann dann eine positive Potenz der Unbekannten als Faktor enthalten. Ein Faktor, der nicht von den Polynomen a_ν abhängt, muß also gleichzeitig eine Potenz der Unbekannten sein und darf andererseits keine positive Potenz der Unbekannten als Faktor enthalten, muß also eine Konstante sein. *Die Gleichung $G(\alpha_0) = 0$ ist im Ring R irreduzibel und hat im allgemeinen keine mehrfache Wurzel.*

§ 14.

Beispiele.

Wir wollen nun noch einige besondere Fälle betrachten, die mir der Erwähnung nicht unwert erscheinen.

1. $f = 0$ sei eine *hyperelliptische* Kurve in Normalform; der Grad ist $p + 2$ und es gibt einen p-fachen Punkt. Wir legen ihn in den Punkt $x = z = 0$. Die Riemannsche Fläche der inhomogenen Funktion $f(x, y) = 0$ ist dann zweiblättrig über die x-Kugel ausgebreitet. Die Adjungierten zerfallen in Geraden durch den vielfachen Punkt; wo eine solche Gerade die Grundkurve berührt, haben wir einen Weierstraß-Punkt, und nur dort. W muß also im wesentlichen eine Potenz der Polaren f_y des p-fachen Punktes sein; wir wollen uns davon überzeugen, daß

$$W \equiv c f_y^{\frac{p(p-1)}{2}} D \cdot b^p \pmod{f}$$

oder daß in (15d) w eine Konstante wird.

Die Adjungierten sind alle möglichen Polynome in x allein bis zum $(p-1)$-ten Grad; wir können $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = x$, $\varphi_3 = x^2, \ldots, \varphi_p = x^{p-1}$ als Basis für sie verwenden. w ist nach (1) die Determinante aus allen totalen Ableitungen der Adjungierten nach x bis zu den $(p-1)$-ten. Früher mußten wir uns noch über den Sinn der totalen Ableitung klar werden; hier ist er ohne weiteres gegeben.

$\dfrac{d^\varrho \varphi_\sigma}{d x^\varrho}$ verschwindet für $\varrho \geqq \sigma$; dies sind aber die Elemente von w oberhalb der Hauptdiagonale. Die Elemente in der Hauptdiagonale sind $\dfrac{d^{\varrho-1} \varphi_\varrho}{d x^{\varrho-1}} = (\varrho - 1)! = \text{const.}$ w als das Produkt dieser Elemente ist ebenfalls konstant, und wir haben $W = A \cdot f + c \cdot f_y^{\frac{p(p-1)}{2}} \cdot D \cdot b^p$.

Hier zeigt sich noch einmal der Vorteil in der Verwendung der Determinantenbildung W gegenüber w; w ist in unserem Fall konstant; daß die Verzweigungspunkte der auf der x-Kugel ausgebreiteten Riemannschen Fläche Weierstraß-Punkte sind, können wir nicht aus dem Verschwinden von w, sondern nur daraus schließen, daß x in diesen Punkten nicht mehr Ortsuniformisierende ist. $W = 0$ und $f = 0$ hingegen schneiden sich in jenen Punkten, und nur dort. — Freilich griffen wir bei der wirklichen Berechnung von W mit Vorteil auf die handlichere Determinante w zurück.

2. Die einfachste nicht-hyperelliptische Kurve ist die Kurve vierter Ordnung vom Geschlecht 3, also ohne Singularitäten. Die Adjungierten sind gerade Linien und die Weierstraß-Punkte sind die Wendepunkte von $f = 0$. W muß also (mod f) bis auf den Faktor $D \cdot b^3$ mit der Hesseschen Determinante übereinstimmen.

Als (inhomogene) Basis der Adjungierten sind die Größen $1, x, y$ zu brauchen. w ist dann:

$$w = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & y'' \end{vmatrix} = y''$$

Dabei haben wir y'' durch die partiellen Ableitungen von f nach x und y auszudrücken:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{f_y^3}\left(-f_{xx}f_y^2 + 2f_{xy}f_xf_y - f_{yy}f_x^2\right) \\ &= \frac{1}{f_y^3}\left(H - f\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}\right), \end{aligned}$$

wenn wir H in der inhomogenen Form $H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & f \end{vmatrix}$ ansetzen.

$W = Af + f_y^3 w D b^3$ läßt sich also umrechnen in $W = A'f + H\ D \cdot b^3$.

3. Wir wollen uns nun noch in einigen Beispielen den Zusammenhang zwischen den Lückenzahlen des Weierstraß-Punktes und der Singularität der Weierstraß-Kurve ansehen. So wollen wir nach der Singularität der Weierstraß-Kurve in einem hyperelliptischen Weierstraß-Punkt vom Geschlecht $p = 8$ fragen. Die Lücken sind: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15$. Die Summe der Lücken zwischen 1 und $p + 1 = 9$ ist 25, ihre Anzahl 5. Für $A(1,0)$ finden wir

$$A(1,0) = \sum_1^{\varkappa} \lambda_i - \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2} = 10.$$

Die hiermit aufgezählten Zweige liefern 10 Schnittpunkte von $W = 0$ und $f = 0$.

Um die übrigen Zahlen $A'(q, r)$ zu bestimmen, haben wir uns die $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Ebene zu zeichnen. In ihr sind die Punkte $(1,0)$, $(3,0)$, $(5,0)$ ver-

boten, weil 10, 12, 14 Nicht-Lücken sind. Wir wollen dies in der Zeichnung durch kleine Kreise um die Punkte kennzeichnen. Die Anzahl der beweglichen Marken ist gleich der Anzahl der Lücken oberhalb 9, also gleich 4. Wir wollen ihre Bewegung verfolgen. Wir haben bei der Verschiebung darauf zu achten, daß links von der Geraden g, längs der wir verschieben, niemals ein unbelegter erlaubter Punkt liegen darf. Als Probe für die Richtigkeit der Rechnung können wir die Bemerkung verwenden, daß die Gesamtanzahl der Schnittpunkte von $W = 0$ und $f = 0$, die wir uns als in den Weierstraß-Punkt zusammengerückt zu denken haben, bei hyperelliptischen Weierstraß-Punkten gleich $\frac{p(p-1)}{2}$ ist. Wir rechnen also bei den Verschiebungen in der $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Ebene gleich die Anzahl $S(q, r)$ der Schnittpunkte von $W = 0$ und $f = 0$ aus, die von den Zweigen mit den charakteristischen Zahlen q und r herrühren.

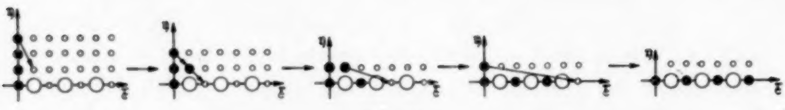


Fig. 15.

Gerade g	$2\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = 3$	$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = 2$	$\mathfrak{x} + 3\mathfrak{y} = 4$	$\mathfrak{x} + 6\mathfrak{y} = 6$
$-t(s)$	1	2	1	1
$t(s+1)$	1	1	1	1
$A(q, r)$	1	2	1	1
$S(q, r) = A(q, r)(q + r)$	3	4	4	7

Wir können also ablesen: $A(2,1) = 1$, $A(1,1) = 2$, $A(1,3) = 1$, $A(1,6) = 1$. Die Gesamtanzahl der Schnittpunkte ist $10+3+4+4+7 = 28 = \frac{p(p-1)}{2}$, wie zu erwarten war.

4. Wir wollen uns die Zahlen $A(q, r)$ vorgeben und daraus die Lückenzahlen zu berechnen suchen. Es sei etwa $p = 8$, $A(1,0) = 5$, $A(2,1) = 1$, $A(1,4) = 1$.

Wir können nach den Ergebnissen des § 10 die Anzahl α der Lücken unterhalb $p + 2$ bestimmen. Denn die Gesamtvielfachheit der Zweige von $W = 0$, die $f = 0$ berühren oder nicht linear sind, ist $\frac{(p-\alpha)(p-\alpha+1)}{2}$. In unserem Falle ist diese Gesamtvielfachheit $2 + 1 = 3$ und $\alpha = 6$. Es bleiben uns noch $p - \alpha = 2$ beweglichen Marken; sie sind in der $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Ebene zunächst in der Weise verteilt, die Fig. 16 zeigt.

Ob dabei der Nullpunkt belegt oder verboten ist, wissen wir nicht. das tut aber auch nichts zur Sache. Da $A(2, 1) = 1$ ist, muß die Ver-

schiebung einer Marke längs einer Geraden $2\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = s$ möglich sein. Für s kommt nur der Wert $s = 1$ in Frage, und der Punkt $\mathfrak{x} = 1, \mathfrak{y} = 0$ darf nicht verboten sein. $(p+1)+1 = 10$ ist also eine Lücke. — $A(1,2)$ und $A(1,3)$ verschwinden; das heißt, längs der Geraden $\mathfrak{x} + 2\mathfrak{y} = 2$ und $\mathfrak{x} + 3\mathfrak{y} = 3$ sind keine Verschiebungen von Marken möglich, die Punkte $(2,0)$ und $(3,0)$ sind verboten und 11 und 12 sind Nicht-Lücken. $A(1,4) = 1$ besagt, daß eine Verschiebung längs der Geraden $\mathfrak{x} + 4\mathfrak{y} = 4$ möglich sein muß und daß 13 eine Lücke ist. Die beiden Lücken oberhalb $p+1$ sind also 10 und 13.

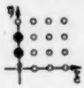


Fig. 16.

Wenn wir nun beachten, daß die Summe zweier Nicht-Lücken stets wieder eine Nicht-Lücke sein muß, so sehen wir, daß nur noch folgende vier Lückenverteilungen in Frage kommen:

1 2 . 4 5 . 7 8 . 10 . . 13

1 2 3 . 5 6 . . 9 10 . . 13

1 2 3 4 5 6 . . . 10 . . 13

und

1 2 3 4 5 . 7 . . 10 . . 13.

Die erste liefert $A(1,0) = 6$ und scheidet deshalb aus. Die zweite liefert $A(1,0) = 5$. Die dritte und vierte liefern $A(1,0) = 0$ und $= 1$. Wir können also in diesem Falle aus den Zahlen $A(q,r)$ die Lückenverteilung eindeutig ablesen.

5. Es sei $p = 5$, $A(1,0) = 2$, $A(1,1) = 1$. Es ist $\frac{(p-\alpha)(p-\alpha+1)}{2} = 1$, also $p - \alpha = 1$; es gibt vier Lücken bis $p + 1 = 6$ und eine oberhalb 6. Um diese zu finden, zeichnen wir die $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Ebene.
Soll $A(1,1) = 1$ sein, so muß der Punkt $(1,0)$ erlaubt und 7 die Lückenzahl sein.


Fig. 17.

Als Lückenverteilungen unterhalb 7 kommen die beiden folgenden in Frage:

1 2 . 4 5 . 7

1 2 3 . . 6 7.

Beide liefern $A(1,0) = 2$. Sie sind durch die Singularität der Weierstraß-Kurve nicht zu unterscheiden.

(Eingegangen am 17. 3. 1937.)

Zur Bestimmung der Kurven algebraischer Flächen.

Von

Ólafur Daníelsson in Reykjavík (Island).

Ich habe in einem früheren Aufsatz (Math. Annalen **113**) gezeigt, wie eine bestimmte Gruppe algebraischer Flächen, die eindeutig auf eine Ebene abgebildet werden können, sich in zwei Untergruppen teilen läßt: die orientierbaren und die nicht orientierbaren Flächen. Die ersteren können vollkommen eindeutig — ohne Fundamentalelemente — auf eine Fläche zweiter Ordnung, und dadurch auf eine Ebene abgebildet werden, so daß die Bildebene zwei durch eine gerade Fundamentallinie verbundene Fundamentalpunkte enthält. Die nicht orientierbaren Flächen können auf eine Ebene, ohne Fundamentalkurven, abgebildet werden. In der Bildebene können sich jedoch isolierte Fundamentalpunkte befinden, von denen vorausgesetzt wird, daß sie zueinander keine solche spezielle Lage haben, daß irgendeine algebraische Kurve notwendigerweise eine gewisse Anzahl Male durch einige von ihnen gehen muß, *weil* sie eine gewisse Anzahl Male durch einige von den übrigen geht. Alle diese Flächen, in beiden Untergruppen, werde ich — um sie mit einem Adjektiv charakterisieren zu können — „wohlgestaltete Flächen" nennen.

Ich beginne mit zwei Sätzen über wohlgestaltete orientierbare Flächen, die eigentlich zur letzten Abhandlung gehört hätten. (Der erste Satz ist mir von Prof. van der Waerden mitgeteilt worden.)

1. *Eine wohlgestaltete, orientierbare Fläche muß gerader Ordnung sein.*

Beweis: Die Fundamentalgerade der Bildebene sei l, ihre Fundamentalpunkte seien A und B. Den ebenen Schnitten der Fläche entsprechen dann in der Bildebene gewisse Kurven der Ordnung t, die Ebenkurven. Die Kurve k_1 der Figur soll eine solche Ebenkurve darstellen. Die Ebenkurven mögen die Fundamentalgerade r-mal in A und s-mal in B schneiden, so daß $r + s = t$. Die Ordnung n der Fläche ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte zweier Ebenkurven (d. h.: der Anzahl der Schnittpunkte, die nicht in A oder B fallen). Man hat dann: $n = t^2 - r^2 - s^2 = 2rs$. Es ist also n eine gerade Zahl.

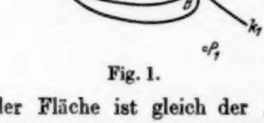


Fig. 1.

2. *Ein beliebiger Punkt einer wohlgestalteten, orientierbaren Fläche kann als Fundamentalpunkt genommen werden.*

Beweis: P sei der Punkt, und P_1 sein Bild in der Bildebene. Ich transformiere nun die Bildebene (s. den vorigen Artikel) in bezug auf das Dreieck $A\,P_1\,B$. Dadurch erhält man eine neue Abbildung der Fläche, die ganz der ersten gleicht. Der Punkt P auf der Fläche jedoch, der früher P_1 entsprach, entspricht jetzt der Geraden l (s. Fig.) und ist so zu einem Fundamentalpunkt geworden.

Es soll jetzt eine wohlgestaltete Fläche der Ordnung n gegeben und eindeutig auf die Ebene π abgebildet sein. Ihre Abbildungszahl, d. h. die Ordnung der Ebenkurven, sei t. Die Ebenkurven gehen r_μ-mal durch den Fundamentalpunkt R_μ. Ich nehme an, daß die Fläche eine vielfache Kurve der Multiplizität f habe, so daß jeder Punkt der vielfachen Kurve durch f, im allgemeinen verschiedene, Punkte in π abgebildet wird. Ihr Bild in π soll von der Ordnung φ sein und ε_μ-mal durch den Fundamentalpunkt R_μ gehen.

Es sei P ein Punkt im Raum, der nicht in einer Berührungsebene der Fläche in einem eventuellen Fundamentalpunkte liegt. Die Ebenen durch P schneiden dann die Fläche in Kurven, deren Bilder in π ein Netz bilden. Die Jacobische Kurve dieses Ebenkurvennetzes muß von der Ordnung $3(t-1)$ sein und $(3r_\mu - 1)$-mal durch den Fundamentalpunkt R_μ gehen. Ich unterscheide nun zwischen den Fundamentalpunkten der gegebenen Fläche, die nicht auf der vielfachen Kurve liegen, und denen, die auf ihr liegen. Von diesen letzteren wird vorausgesetzt, daß jeder von ihnen nur in einem bestimmten Mantel der Fläche fundamental ist. Die Ordnungen der den ersteren Fundamentalpunkten entsprechenden Fundamentalkurven in π nenne ich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, während die Ordnungen der den letzteren entsprechenden Fundamentalkurven $\beta_1, \beta_2, \ldots$ genannt werden. Diese gehören zum Bilde der vielfachen Kurve und ich setze darum $\varphi = \psi + \beta_1 + \beta_2 \ldots$, wobei ψ die Ordnung des Bildes der vielfachen Kurve ist, mit Ausnahme der Fundamentalkurven, die eventuellen Fundamentalpunkten auf ihr entsprechen.

Die oben erwähnte Jacobische Kurve ist geometrischer Ort der Doppelpunkte des Ebenkurvennetzes und muß daher das Bild der Berührungskurve der Fläche mit der umgeschriebenen Kegelfläche sein, deren Scheitelpunkt P ist. Sie muß aber auch die Fundamentalkurven der Bildebene enthalten, jede einmal genommen. Dies ist einleuchtend: Geht eine Ebene durch P zugleich durch einen Fundamentalpunkt der Fläche, so wird sie sich um diese beiden Punkte drehen können, und die entsprechende Ebenkurve wird die dem Fundamentalpunkt entsprechende Fundamentalkurve enthalten, und die Restkurve wird diese in einem Punkt schneiden, der sich bei der Drehung der Ebene einmal der Fundamentalkurve entlang bewegen wird.

Die Polarfläche des Punktes P geht $(f-1)$-mal durch die vielfache Kurve, und das Bild ihrer Schnittkurve mit der gegebenen Fläche wird somit das vollständige Bild (von der Ordnung φ) der vielfachen Kurve $(f-1)$-mal enthalten, und man hat die Gleichung

$$3(t-1)+(f-1)\varphi=(n-1)t+(\Sigma\alpha+\Sigma\beta),$$

wobei, wie früher gesagt, $\varphi=\psi+\Sigma\beta$. Diese Gleichung läßt sich schreiben:

$$\text{(I)} \qquad (n-4)t+3=(f-1)(\psi+\Sigma\beta)-(\Sigma\alpha+\Sigma\beta).$$

Während nun eine Ebenkurve r_μ-mal durch den Fundamentalpunkt R_μ geht, wird, wie schon gesagt, die Jacobische Kurve des Ebenkurvennetzes $(3r_\mu-1)$-mal und das Bild der Schnittkurve der gegebenen Fläche mit der Polarfläche eines Punktes $(n-1)t$-mal hindurchgehen. Wenn das Bild der Berührungskurve der gegebenen Fläche und einer umschriebenen Kegelfläche s_μ-mal durch R_μ geht, und die Fundamentalkurven, die nicht das Bild der vielfachen Kurve außerhalb der Fundamentalpunkte schneiden, a_μ-mal (im Ganzen) und die übrigen Fundamentalkurven b_μ-mal und schließlich das vollständige Bild der vielfachen Kurve ε_μ-mal durch R_μ gehen, so hat man:

$$(f-1)\varepsilon_\mu+s_\mu=(n-1)r_\mu$$

und

$$s_\mu+a_\mu+b_\mu=3r_\mu-1.$$

Durch Subtraktion ergibt sich daraus:

$$(n-4)r_\mu+1=(f-1)\varepsilon_\mu-(a_\mu+b_\mu).$$

Da aber die Fundamentalkurven, die das Bild der vielfachen Kurve außerhalb der Fundamentalpunkte schneiden — und zwar nur einmal, weil der entsprechende Fundamentalpunkt der Fläche nur in einem Mantel fundamental ist — zum Bild der vielfachen Kurve gehören, ist es natürlich $\eta_\mu+b_\mu$ statt ε_μ zu schreiben, wobei η_μ die Anzahl der Male bedeutet, die das unzusammengesetzte Bild der vielfachen Kurve (also mit Ausnahme eventueller Fundamentalkurven, die dazu gehören möchten) durch R_μ geht. Man erhält dann die Gleichung:

$$\text{(II)} \qquad (n-4)r_\mu+1=(f-1)(\eta_\mu+b_\mu)-(a_\mu+b_\mu).$$

Ich reduziere nun die Abbildungszahl auf die im vorigen Artikel angegebene Weise. Ist die Fläche *nicht orientierbar*, ergibt sich aus den Gleichungen (I) und (II):

$$\text{(Ia)} \qquad (n-4)t+3=(f-1)\psi,$$

$$\text{(IIa)} \qquad (n-4)r_\mu+1=(f-1)\eta_\mu,$$

indem $\Sigma\alpha=\Sigma\beta=a_\mu=b_\mu=0$ $(\mu=1,2,\ldots)$.

In bezug auf die orientierbaren Flächen muß zwischen zwei Fällen unterschieden werden. Wenn der Fundamentalpunkt der gegebenen Fläche *auf der vielfachen Kurve liegt*, hat man

$$\text{(Ib)} \qquad (n-4)t+3 = (f-1)(\psi+1)-1,$$

$$\text{(IIb)} \qquad (n-4)r_\mu+1 = (f-1)(\eta_\mu+1)-1,$$

indem $a_\mu = \Sigma\alpha = 0$, $b_\mu = \Sigma\beta = 1$.

Im Falle $f = 2$ fallen die Gleichungen (Ib) und (IIb) mit (Ia) und (IIa) zusammen und man hat die Clebschschen Gleichungen[1]), die also immer in Geltung gebracht werden können, da man den Fundamentalpunkt einer orientierbaren Fläche, nach Satz 2 der Einleitung, beliebig wählen kann. Wählt man hingegen den Fundamentalpunkt der Fläche außerhalb der vielfachen Kurve, so erhält man aus den Gleichungen (I) und (II):

$$\text{(Ic)} \qquad (n-4)t+3 = (f-1)\,\psi-1,$$

$$\text{(IIc)} \qquad (n-4)r_\mu+1 = (f-1)\,\eta_\mu-1,$$

indem $a_\mu = \Sigma\alpha = 1$ und $b_\mu = \Sigma\beta = 0$.[2])

Es sei nun auf der gegebenen wohlgestalteten Fläche eine Kurve ohne Doppelpunkte vorgelegt, von der Ordnung h und dem Geschlechte p, und durch eine Kurve von der Ordnung k — natürlich auch vom Geschlechte p — in der Bildebene abgebildet. Ich werde nun die Anzahl der Punkte suchen, die zur Bestimmung einer solchen Kurve nötig sind. *Es sei g diese Zahl.* Ich nehme an, daß die Abbildung der Fläche die reduzierte ist, und daß die Kurve nicht durch den Fundamentalpunkt der Fläche geht, falls sie orientierbar ist. Die Bildkurve in π gehe m_μ-mal durch den Fundamentalpunkt R_μ. Man hat dann entsprechend der Definition der wohlgestalteten Flächen:

$$\sum \frac{m_\mu(m_\mu+1)}{2} = \frac{k(k+3)}{2} - g,$$

$$\sum \frac{m_\mu(m_\mu-1)}{2} = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - p,$$

$$\Sigma\, m_\mu r_\mu = kt - h.$$

Die letzte Gleichung sagt aus, daß eine Ebenkurve das Bild der vorgelegten Kurve in h Punkten außerhalb der Fundamentalpunkte schneidet

[1]) Clebsch, Intorno alla rappresentazione di superficie algebriche sopra un piano. Ist. Lomb. Rendiconti 1, Milano 1868.

[2]) Vgl. Clebsch: Über die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelkurve dritten Grades besitzen. Math. Annalen 2. Clebsch wählt den Fundamentalpunkt außerhalb der Doppelkurve und erhält $\psi = 4$ und $\eta_1 = \eta_2 = 2$ übereinstimmend mit den Gleichungen (Ic) und (IIc).

(h ist die Ordnung der Kurve). Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man:

$$\Sigma m_\mu^2 = k^2 - g - p + 1 \quad \text{und} \quad \Sigma m_\mu = 3k + p - g - 1.$$

Ich lege jetzt durch die vorgelegte Kurve eine neue Fläche der Ordnung q, die also die gegebene Fläche in einer (in π durch eine Kurve von der Ordnung $tq - k$ abgebildeten) Restkurve der Ordnung $nq - h$ schneiden muß. Diese Restkurve schneidet die vorgelegte Kurve in λ Punkten, wobei infolge eines bekannten Satzes

$$\lambda = h(q + n - 4) - 2(p - 1).$$

Die Anzahl der Schnittpunkte der Bilder dieser Kurven muß $\lambda - (f-1)s$ sein, wobei s die Anzahl der Schnittpunkte der vorgelegten Kurve und der vielfachen Kurve der gegebenen Fläche ist, denn wo die vorgelegte Kurve die vielfache Kurve der gegebenen Fläche schneidet, wird die Schnittkurve der gegebenen Fläche mit der neuen Fläche der Ordnung q durch den Schnittpunkt $f - 1$ Zweige senden, und diese werden auf verschiedene Punkte der Bildebene abgebildet. Die Anzahl der Schnittpunkte der zwei Kurvenbilder in π kann jetzt auf zweierlei Weise ausgedrückt werden:

$$k(tq - k) = \Sigma m_\mu (q r_\mu - m_\mu) + \lambda - (f - 1)s.$$

Setzt man hier die Werte für Σm_μ^2, $\Sigma m_\mu r_\mu$ und λ ein, so erhält man:

$$k(tq-k) = (kt-h)q - (k^2 - g - p + 1) + h(q + n - 4) - 2(p-1) - (f-1)s.$$

Diese Hauptformel läßt sich schreiben:

$$g = (f-1)s - h(n-4) + p - 1.$$

Die Formel gilt auch für doppelpunktfreie Kurven in einer Ebene. Man setzt $s = 0$, $n = 1$, $p = \frac{(h-1)(h-2)}{2}$ und erhält $g = \frac{h(h+3)}{2}$. Die Bildkurve in π ist immer durch die g Punkte eindeutig bestimmt, aber es steht nichts im Wege, daß durch die entsprechenden Punkte der Fläche mehrere Kurven der gleichen Art gehen, indem solche Kurven der Fläche auf verschiedene Weisen in der Bildebene abgebildet werden können, wie z. B. die Kegelschnittsysteme einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung.

Ich nehme wieder an, daß die Abbildung die allgemeine ist, d. h., daß auf der Fläche sowohl als in der Bildebene eine beliebige Anzahl Fundamentalpunkte und Fundamentalkurven sich befinden. Die Fundamentalpunkte *der Fläche* seien $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$, die letzteren auf der vielfachen Kurve gelegen, die ersteren aber nicht. Die Fundamentalpunkte $A_1, A_2, \ldots$ der Fläche werden durch Fundamentalkurven der Ord-

nung $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ in der Bildebene, die Fundamentalpunkte $B_1, B_2, \ldots$ durch Fundamentalkurven der Ordnung $\beta_1, \beta_2, \ldots$ abgebildet. Ich nehme weiter an, daß eine vorgelegte Kurve der Fläche von vornherein x_ν-mal durch den Fundamentalpunkt A_ν, und y_ν-mal durch den Fundamentalpunkt B_ν geht. Man kann dann in der Hauptformel $g_1 + \sum \frac{x(x+1)}{2} + \sum \frac{y(y+1)}{2}$ statt g, und $p_1 + \sum \frac{x(x-1)}{2} + \sum \frac{y(y-1)}{2}$ statt p schreiben und erhält dann:

$$g_1 = (f-1)s - h(n-4) + p_1 - 1 - (\Sigma x + \Sigma y),$$

indem

$$\sum \frac{x(x+1)}{2} + \sum \frac{y(y+1)}{2} - \sum \frac{x(x-1)}{2} - \sum \frac{y(y-1)}{2} = \Sigma x + \Sigma y.$$

(Die Indizes ν sind weggelassen).

Die den Punkten $B_1, B_2, \ldots$ entsprechenden Fundamentalkurven der Bildebene machen einen Teil des Bildes der vielfachen Kurve aus. Demnach kann man in der Hauptformel $s = \sigma + \Sigma y$ setzen, wobei σ die Anzahl der Punkte ist, in denen die vorgelegte Kurve die vielfache Kurve außerhalb der Fundamentalpunkte $B_1, B_2, \ldots$ schneidet. Man hat dann

$$\text{(III)} \quad g_1 = (f-1)(\sigma + \Sigma y) - h(n-4) + p_1 - 1 - (\Sigma x + \Sigma y).$$

Man sucht z. B. den Wert von g_1 für die Kurven der Fläche, die den Geraden der Bildebene entsprechen. Für diese Kurven hat man $\Sigma x = \Sigma \alpha$, $\Sigma y = \Sigma \beta$, $p_1 = 0$, $\sigma = \psi$ (siehe die Gleichungen (I) und (II)) und $h = t$ (infolge eines bekannten Satzes). Setzt man diese Werte in Gleichung (III) ein, erhält man:

$$g_1 = (f-1)(\psi + \Sigma \beta) - t(n-4) - 1 - (\Sigma \alpha + \Sigma \beta).$$

Die Gleichung I gibt aber: $(f-1)(\psi + \Sigma \beta) - t(n-4) = \Sigma \alpha + \Sigma \beta + 3$ und demnach $g_1 = 2$, wie es zu erwarten war.

Ich habe die Gleichung (III) entwickelt, um die Anzahl der Punkte zu finden, die zur Bestimmung einer Fundamentalkurve *der Fläche* notwendig ist, jener Fundamentalkurve, die dem Fundamentalpunkte R_μ der Bildebene entspricht. Daß die Ebenkurven r_μ-mal durch R_μ gehen, besagt nur, daß die Ordnung der Fundamentalkurve r_μ ist. Daß das unzusammengesetzte Bild der vielfachen Kurve η_μ-mal durch R_μ geht, bedeutet, daß σ in Gleichung (III) dasselbe wie η_μ in Gleichung (II) ist. Ebenso sind a_μ und b_μ in Gleichung (II) mit Σx und Σy in Gleichung (III) identisch. Die Gleichung (III) ergibt dann:

$$g_1 = (f-1)(\eta_\mu + b_\mu) - r_\mu(n-4) + p_1 - 1 - (a_\mu + b_\mu).$$

Aus der Gleichung (II) folgt aber:

$$(f-1)(\eta_\mu + b_\mu) - (a_\mu + b_\mu) = (n-4)r_\mu - 1.$$

Daraus folgt $g_l = p_l = 0$, denn das Geschlecht der Fundamentalkurve muß 0 sein (indem die Fläche eine wohlgestaltete ist). Die Fundamentalkurve der Fläche wird demnach (ebenso wie die Fundamentalkurven der Bildebene, siehe vorigen Artikel) allein durch die Fundamentalpunkte bestimmt, durch die sie hindurch geht.

Befinden sich in der Bildebene isolierte Fundamentalpunkte, durch die keine Fundamentalkurven gehen, so enthalten die ihnen entsprechenden Fundamentalkurven der Fläche keine Fundamentalpunkte. Daraus folgt: *Isolierte Fundamentalpunkte dieser Art müssen Einzelkurven abbilden, die keinem unendlichen Kurvensystem der Fläche angehören.* Als Beispiel können die Geraden einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung dienen.

(Eingegangen am 14. 4. 1937.)

Allgemeine Transformationstheorie der konjugierten Systeme mit viergliedrigen Laplaceschen Zyklen.

Von

Hans Jonas in Berlin-Steglitz.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Die *Laplacesche Transformation*, der eine Fläche als Trägerin eines konjugierten Kurvennetzes (α, β) auf doppelte Art unterworfen werden kann, besteht in dem Übergang zum zweiten, gleichfalls von einem konjugierten Netz (α, β) bedeckten Brennmantel des einen oder des anderen Tangentensystems. Fortgesetzte Anwendung dieses nur Differentiationen erfordernden Prozesses liefert die im allgemeinen nach beiden Seiten ins Unendliche gehende *Laplacesche Kette*. Wir betrachten nun den besonderen Fall, für den einige mit der Verbiegung der Flächen zweiten Grades zusammenhängende Beispiele [1]) vorliegen, daß eine Folge von vier Laplaceschen Transformationen in dem einen und damit auch im umgekehrten

[1]) Jonas, Untersuchungen über die als Gewebe bezeichneten Kurvennetze und über eine Reihe von Problemen, die mit der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids zusammenhängen. Math. Annalen 87 (1922), S. 157; Über neue zweifach-unendliche Systeme windschiefer Vierecke, deren Seiten paarweise die Ortsflächen der Eckpunkte berühren. Berl. Math. Ges. Ber. 29 (1930), S. 34; Über die Verallgemeinerung des in der Biegungstheorie der Flächen zweiten Grades auftretenden intrinseken Transformationsprozesses *H*. Sächs. Ak. Ber. 87 (1935) S. 41; daselbst § 5.

Sinne auf das konjugierte Netz der Ausgangsfläche zurückführt. Ein solcher *viergliedriger Laplacescher Zyklus* umfaßt also vier Flächen mit korrespondierenden konjugierten Netzen (α, β); die laufenden *Punkte* bilden die Ecken eines variablen windschiefen Vierecks, dessen Seiten — sie mögen die *Strahlen* des Zyklus heißen — als gemeinschaftliche Tangenten benachbarter Flächen auf denselben je eine α- und eine β-Kurve berühren.

Die viergliedrigen Laplaceschen Zyklen lassen sich zum Gegenstand einer durch Vielseitigkeit der Methoden ausgezeichneten Transformationstheorie machen. Wir gehen dazu von den Beziehungen zwischen konjugierten Systemen und Strahlenkongruenzen aus, die man im wesentlichen Darboux und Guichard verdankt, und gewinnen zunächst die beiden einfachen *harmonischen* Transformationen: *Punkt-Strahl-Transformation PS* und *Strahl-Punkt-Transformation SP*, bei denen das windschiefe Viereck des transformierten Zyklus dem des gegebenen um- bzw. einbeschrieben ist. Sie hängen von einer *charakteristischen*, also schon in den Differentialgleichungen auftretenden Konstanten ab, wie das bei den meisten für spezielle Flächenklassen aufgestellten Transformationen der Fall ist. Durch Zusammensetzung der Operationen *PS* und *SP* entsteht die *biharmonische Transformation*, die eine Anwendung desselben allgemeinen Prinzips [2]) bedeutet, dem u. a. auch die Ribaucour-Transformation der Krümmungsliniennetze und die Transformation der auf das gemeinsame konjugierte System bezogenen Paare isometrischer Flächen entspringen.

Das Hauptproblem, das letzten Endes der Anlaß zu der gegenwärtigen Untersuchung gewesen ist, knüpft sich an ein Ergebnis einer unlängst voraufgegangenen Arbeit [3]). Es gilt der folgende, daselbst bewiesene Satz: *Im viergliedrigen Laplaceschen Zyklus durchlaufen die beiden Diagonalstrahlen, d. h. die Verbindungsgeraden der gegenüberliegenden Punkte, zwei W-Kongruenzen, in denen die Asymptotenlinien der (reellen oder konjugiert-imaginären) Brennmäntel den Netzen* (α, β) *des Zyklus entsprechen.* Danach war die Frage aufzuwerfen, die übrigens für einen Einzelfall [4]) bereits im bejahenden Sinne beantwortet werden konnte, *ob ein viergliedriger Laplacescher Zyklus in neue Gebilde der gleichen Art dadurch übergeführt werden kann, daß man die beiden Brennmäntelpaare der Diagonalstrahlensysteme simultanen asymptotischen, also durch berührende W-Kon-*

---

[2]) Jonas, Über die Transformation der konjugierten Systeme und über den gemeinsamen Ursprung der Bianchischen Permutabilitätstheoreme. Berl. Math. Ges. Ber. 14 (1915), S. 96.

[3]) Jonas, Ein allgemeiner Satz über *W*-Kongruenzen mit Anwendungen auf Laplacesche Zyklen, Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids und schiefe Weingartensche Systeme. Math. Annalen 114 (1937), S. 237.

[4]) Ebenda § 4.

gruenzen vermittelten Transformationen unterwirft. Die Auffindung eines solchen, allgemein gültigen Prozesses gelingt nun in der Tat, und zwar durch Konstruktion eines linearen Büschels harmonischer Transformationen. Die konjugierten Netze des so entstehenden neuen Zyklus gehen dann aus denen des ursprünglichen als *abgeleitete* Netze (im Guichardschen Sinne) hervor. Der auf das Verhalten der Brennmäntelpaare bezügliche Nachweis wird durch einen Hilfssatz erleichtert, der sich der eben erwähnten Abhandlung als unmittelbare Ergänzung anschließt und in § 1 voraufgeschickt wird.

Zum Schluß wird in § 5 noch eine weitere Transformation hergeleitet, die durch ihre Sonderstellung in der Theorie beachtenswert erscheint. Sie ist *involutorisch*, d. h. sie wird durch Wiederholung rückgängig gemacht[5]). Zwischen dem gegebenen und dem transformierten Zyklus besteht dabei die wechselseitige Beziehung, daß die Strahlen des einen den Flächennormalen des anderen parallel sind; die Laplaceschen Transformationen in den beiden Zyklen sind *kontragredient*: einem Umlauf im Sinne der α-Tangenten entspricht ein solcher im Sinne der β-Tangenten.

Für die nachstehenden rechnerischen Entwicklungen, die sich zwar auf die allgemeine Transformationstheorie beschränken, aber durchaus auf Anwendungen zugeschnitten sind, wäre die Benutzung spezifisch projektiver Hilfsmittel nicht vorteilhaft gewesen. Es genüge der Hinweis an dieser Stelle, daß *sich die für die Laplaceschen Zyklen gefundenen Methoden mit beliebigen projektiven Raumtransformationen verbinden lassen.*

§ 1.

Hilfssatz über die Transformation der Paare schmiegungsverwandter Kurvennetze.

1. Wir beginnen mit einem Nachtrag zu § 2 der unter [3]) genannten Abhandlung. Die dort benutzten Bezeichnungen werden beibehalten.

Zwei korrespondierende, die Flächen (x) und (x') bedeckende Kurvennetze (α, β) heißen *schmiegungsverwandt*, wenn sie jeweils die Schmiegungsebenen, aber in umgekehrter Zuordnung zu den Kurven der beiden Scharen gemein haben. Sind ξ und ξ' die in geeigneter Weise normierten Richtungsvektoren der Binormalen, ξ zur α-Kurve von (x) und zur β-Kurve von

[5]) Ein Beispiel dazu bilden die beiden aus der Verbiegung des Paraboloids $z = xy$ erhaltenen Laplaceschen Zyklen, ebenso die beiden, noch durch einen engeren geometrischen Zusammenhang ausgezeichneten Zyklen, die sich mit einem Paar konjugierter H-Flächen verbinden. Vgl. § 3 der zweiten und § 5 der dritten unter [1]) angeführten Arbeit.

(x'), ξ' zur β-Kurve von (x) und zur α-Kurve von (x') gehörig[6]), so bestehen Differentialrelationen von der Form:

$$\xi'_\alpha - \xi_\alpha = -\frac{n_\alpha}{2n}(\xi' + \xi), \qquad \xi'_\beta = \frac{1}{n}\xi_\beta. \tag{1}$$

Das Flächenpaar stellt sich folgendermaßen dar:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \int[(\eta_\alpha \zeta - \zeta_\alpha \eta)\, d\alpha - n(\eta'_\beta \zeta' - \zeta'_\beta \eta')\, d\beta],^{7)} \\ x' &= x + \eta\zeta' - \zeta\eta'; \quad x'_\alpha = \eta'_\alpha \zeta' - \zeta'_\alpha \eta', \quad x'_\beta = -\frac{1}{n}(\eta_\beta \zeta - \zeta_\beta \eta). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Wie a. a. O. bewiesen, bilden die Verbindungsgeraden $x\,x'$ eine *W-Kongruenz*, in der die Asymptotenlinien der Brennmäntel den Netzen (α, β) von (x) und (x') entsprechen. Diese beiden Brennmäntel sind gegeben durch:

$$x^{(1)} = x - \frac{\nu}{1-\nu}(\eta\zeta' - \zeta\eta'), \quad x^{(2)} = x + \frac{\nu}{1+\nu}(\eta\zeta' - \zeta\eta'); \quad \nu^2 = n. \tag{3}$$

Sie sind reell für $n = \nu^2 > 0$; in jedem der beiden schmiegungsverwandten Netze haben dann die α- und die β-Kurven entgegengesetzten Windungssinn. Die Richtungsvektoren der Flächennormalen von $(x^{(1)})$ und $(x^{(2)})$ sind:

$$\xi^{(1)} = \frac{\xi - \nu\xi'}{1-\nu}, \qquad \xi^{(2)} = \frac{\xi + \nu\xi'}{1+\nu}. \tag{4}$$

Sie genügen den mit (1) gleichwertigen Differentialgleichungen der Moutardschen Transformation:

$$\xi^{(2)}_\alpha - \xi^{(1)}_\alpha = -\frac{\psi_\alpha}{\psi}(\xi^{(2)} + \xi^{(1)}), \quad \xi^{(2)}_\beta + \xi^{(1)}_\beta = -\frac{\psi_\beta}{\psi}(\xi^{(2)} - \xi^{(1)});$$
$$\psi = \frac{1+\nu}{1-\nu}.$$

Wir beweisen nun den für unseren Zweck wichtigen Hilfssatz: *Stehen zwei von den Punkten x, x' und x_1, x'_1 beschriebene Paare schmiegungsverwandter Netze (α, β) in der Beziehung, daß die beiden Schmiegungsebenen eines jeden Paares die Punkte des anderen enthalten — die vier Punkte x, x', x_1, x'_1 sollen also die Ecken des von den vier Ebenen gebildeten Vierflachs sein —, und ist außerdem die Bedingung erfüllt, daß längs der vier*

---

[6]) Ich schreibe im folgenden Punkt x, Fläche (x), wenn x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten sind, Richtungsvektor oder Richtung ξ, wenn die Richtungskosinus sich wie $\xi : \eta : \zeta$ verhalten. Auf die vektorielle Bedeutung einer in x geschriebenen Gleichung wird nicht besonders hingewiesen; die beiden analogen Beziehungen denke man sich stets hinzugefügt. Im Kurvennetz (α, β) ist die α-Kurve die bei variablem α beschriebene, also durch $\beta = \text{const}$ definierte; ihre Tangente heiße α-Tangente. Partielle Ableitungen nach den Variablen α und β werden durch Indizes angedeutet.

[7]) Um die Mitführung eines doppelten Gesamtvorzeichens zu vermeiden, setzen wir die Torsion der α-Kurven von (x) positiv voraus.

Kanten $x x_1$, $x x_1'$, $x' x_1$, $x' x_1'$ *die Schmiegungsebenen gleichnamiger, von ihren Endpunkten beschriebener Kurven, d. h. zweier* α- *oder zweier* β-*Kurven zusammenstoßen*[8]*, so sind die W-Kongruenzen der Geraden* $x x'$ *und* $x_1 x_1'$ *miteinander durch asymptotische Transformationen ihrer (reellen oder konjugiert-imaginären) Brennmäntel verbunden; sie gehören damit einem viergliedrigen W-Zyklus im Sinne des Bianchischen Kompositionstheorems für die Moutardschen Transformationen an.*

2. Es handelt sich zunächst darum, *auf allgemeinste Weise zu einem gegebenen Paar schmiegungsverwandter Netze* (x), (x') *ein der Voraussetzung des Satzes genügendes transformiertes Paar* (x_1), (x_1') *zu konstruieren.*

In dem Vierflach $x x' x_1 x_1'$ soll sein

$x x' x_1$	die Schmiegungsebene der α-Kurve von (x)	und der β-Kurve von	(x'),
$x x' x_1'$	„ „ „ „ „ (x')	„ „ „ „	(x),
$x_1 x_1' x$	„ „ „ „ „ (x_1)	„ „ „ „	(x_1'),
$x_1 x_1' x'$	„ „ „ „ „ (x_1')	„ „ „ „	(x_1).

Für (x_1), (x_1') gelten die zu (2) und (1) analogen Formeln:

$$(5)\quad \begin{cases} (x_1)_\alpha = (\eta_1)_\alpha \zeta_1 - (\zeta_1)_\alpha \eta_1, \quad (x_1)_\beta = -n_1[(\eta_1')_\beta \zeta_1' - (\zeta_1')_\beta \eta_1'], \\ x_1' - x_1 = \eta_1 \zeta_1' - \zeta_1 \eta_1'. \end{cases}$$

$$(6)\qquad (\xi_1')_\alpha - (\xi_1)_\alpha = -\frac{(n_1)_\alpha}{2 n_1}(\xi_1' + \xi_1), \quad (\xi_1')_\beta = \frac{1}{n_1}(\xi_1)_\beta.$$

In (5) ist bereits berücksichtigt, daß die α-Kurven von (x) und (x_1) infolge der zwischen ihnen bestehenden asymptotischen *Kurven*transformation gleiches (positives) Vorzeichen der Torsion haben. Auf Grund dieses Zusammenhangs wird ferner:

$$(7)\qquad x_1 - x = \eta \zeta_1 - \zeta \eta_1,$$

wobei ein rechts anzusetzender Proportionalitätsfaktor, wie sich beim Differentiieren nach α herausstellt, gleich ± 1, also bei entsprechender Wahl des noch verfügbaren Vorzeichens von ξ_1 gleich 1 wird[9]. Gleichzeitig findet man, wenn ein noch unbestimmter Faktor in der Form $-\Phi_\alpha/\Phi$ geschrieben wird:

$$(8)\qquad (\xi_1)_\alpha - \xi_\alpha = -\frac{\Phi_\alpha}{\Phi}(\xi_1 + \xi).$$

---

[8]) An sich gibt es, wie man unschwer übersieht, *zwei* Möglichkeiten: je nachdem sich in $x x_1$ die Schmiegungsebenen *gleichnamiger* oder *ungleichnamiger*, von x und x_1 beschriebener Kurven schneiden, trifft dies auch für die drei anderen genannten Kanten zu. Der hier auszuschließende zweite Fall liegt übrigens bei den weiterhin behandelten viergliedrigen Laplaceschen Zyklen vor. Bemerkt sei noch, daß die Voraussetzung unseres Hilfssatzes mit den a. a. O. in § 1, 3 gefundenen geometrischen Beziehungen übereinstimmt.

[9]) Dazu vgl. a. a. O. § 2, 2.

Bringt man zum Ausdruck, daß $x_1' - x' = x_1' - x_1 + (x_1 - x) - (x' - x)$ gemeinschaftliches Lot zu ξ' und ξ_1' sein soll, so folgt (λ ein Proportionalitätsfaktor):

$$(9) \qquad \xi_1' - \xi = \lambda(\xi_1 - \xi')$$

und damit:

$$(10) \qquad \begin{cases} x_1 - x' = \eta' \zeta_1' - \zeta' \eta_1', \quad x_1' - x = \lambda(\eta' \zeta_1 - \zeta' \eta_1), \\ x_1 - x' = \frac{1}{\lambda}(\eta \zeta_1' - \zeta \eta_1'). \end{cases}$$

Differentiation von (7) nach β liefert mit Benutzung von (2) und (5):

$$\eta_\beta(\zeta_1 - \zeta') - \zeta_\beta(\eta_1 - \eta') + (\eta_1)_\beta(\zeta_1' - \zeta) - (\zeta_1)_\beta(\eta_1' - \eta) = 0.$$

Hieraus erhält man mittels (9) unter Einführung eines Faktors h:

$$(11) \qquad (\xi_1)_\beta + \frac{1}{\lambda}\xi_\beta = h(\xi_1 - \xi').$$

3. Wir haben jetzt noch dafür zu sorgen, daß die Differentialrelationen von der Form (8), (11) im Verein mit der endlichen Relation (9) den Übergang von dem System (1) zu dem transformierten System (6) bewirken. Dazu differentiieren wir (9), am besten zuerst nach β, beseitigen in der erhaltenen Gleichung die Ableitungen von ξ_1', ξ_1, ξ' und finden:

$$\left(\frac{\lambda}{n} - \frac{1}{n_1 \lambda}\right)\xi_\beta - \left[\lambda_\beta - h\left(\frac{1}{n_1} - \lambda\right)\right](\xi_1 - \xi') = 0,$$

hieraus, da jedenfalls ξ_β nicht mit $\xi_1 - \xi'$ proportional sein darf[10]):

$$(12) \qquad n_1 = \frac{n}{\lambda^2}$$

und mit Hilfe dieser Formel aus dem Verschwinden des Faktors von $\xi_1 - \xi'$:

$$(13) \qquad h = \frac{n\lambda_\beta}{\lambda(\lambda - n)}.$$

Entsprechend ergibt sich, wenn (9) nach α differentiiert, danach ξ_1' eliminiert und (12) berücksichtigt wird:

$$\left[\frac{\lambda_\alpha}{\lambda} - \frac{\Phi_\alpha}{\Phi}(1 - \lambda) - \frac{n_\alpha}{2n}(1 + \lambda)\right](\xi_1 + \xi) = 0.$$

Der erste Faktor muß Null sein. Daraus folgt, wenn Φ', definiert durch

$$(14) \qquad \lambda = \frac{\Phi}{\Phi'},$$

neben Φ eingeführt wird, die zu der ersten Relation (1) analoge:

$$(15) \qquad \Phi_\alpha' - \Phi_\alpha = -\frac{n_\alpha}{2n}(\Phi' + \Phi).$$

---

[10]) Anderenfalls würden für (x) und (x_1') die β-Tangenten zusammenfallen, was bei getrennten Punkten x und x_1' unmöglich ist.

Setzt man ferner zur Abkürzung

(16) $$h\Phi + \Phi_\beta = \Lambda,$$

so geht (13) über in:

(17) $$\Phi'_\beta - \frac{1}{n}\Phi_\beta = \Lambda\left(\frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{1}{n}\right).$$

Die Gleichungen (8), (11) bringen wir mittels (14), (16) auf die Form:

(18) $$(\Phi\xi_1)_\alpha = \Phi\xi_\alpha - \Phi_\alpha\xi, \quad (\Phi\xi_1)_\beta = -\Phi'\xi_\beta + \Phi_\beta\xi' + \Lambda(\xi_1 - \xi').$$

Die beiden hieraus gewonnenen Ausdrücke für $(\Phi\xi_1)_{\alpha\beta}$ setzen wir gleich, machen Gebrauch von der Beziehung

$$\xi_{\alpha\beta} = \frac{n_\alpha}{2n}\xi_\beta + \frac{n}{2(n-1)}\left(\frac{n_\alpha}{n}\right)_\beta(\xi' + \xi),$$

die eine Folge von (1) ist, und erhalten die Gleichung:

$$\left[\Phi_{\alpha\beta} - \frac{n_\alpha}{2n}\Phi_\beta - \frac{n}{2(n-1)}\left(\frac{n_\alpha}{n}\right)_\beta(\Phi' + \Phi) - \Lambda_\alpha + \frac{n_\alpha}{2n}\Lambda\right](\xi' + \xi)$$
$$+\left[\Lambda_\alpha - \frac{\Phi_\alpha}{\Phi}\Lambda\right](\xi_1 + \xi) = 0,$$

in der die eckigen Klammern einzeln verschwinden müssen, da die Richtungen ξ, ξ', ξ_1 nicht zu einer Ebene parallel sein dürfen. Danach ist zunächst:

(19) $$\Lambda_\alpha = \frac{\Phi_\alpha}{\Phi}\Lambda.$$

Der Faktor von $\xi' + \xi$ wird dann von selber Null, wie man bestätigt, indem man (15) nach β, (17) nach α differentiiert, $\Phi'_{\alpha\beta}$ eliminiert und auch (19) berücksichtigt. Infolge von (19) ist Λ/Φ Funktion von β allein; wir schreiben, wobei f' die Ableitung bedeutet:

$$\Lambda = \Phi f'(\beta)$$

und tragen diesen Wert für Λ in (17) und (18) ein. Durch die Substitution $\Phi \mid \Phi f(\beta)$, $\Phi' \mid \Phi' f(\beta)$, die (14) und (15) ungeändert läßt, vereinfachen sich die Gleichungen (17) und (18) dann ganz so, wie wenn $\Lambda = 0$ gefunden wäre.

4. Wir sind damit im Besitz der in unserem Satze vorausgesetzten Transformation, die zwischen den Paaren schmiegungsverwandter Netze $(x), (x')$ und $(x_1), (x_1')$ vermittelt: *Es sei Φ, Φ' ein weiteres Lösungspaar von* (1), *also:*

(20) $$\Phi'_\alpha - \Phi_\alpha = -\frac{n_\alpha}{2n}(\Phi' + \Phi), \quad \Phi'_\beta = \frac{1}{n}\Phi_\beta;$$

dann sind ξ_1, η_1, ζ_1 durch drei Quadraturen bestimmt:

(21) $$\xi_1 = \frac{1}{\Phi}\int[(\Phi\xi_\alpha - \Phi_\alpha\xi)\,d\alpha - (\Phi'\xi'_\beta - \Phi'_\beta\xi')\,d\beta]$$

und $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$ *durch die Formelgruppe:*

$$\xi_1' = \xi + \frac{\Phi}{\Phi'}(\xi_1 - \xi'). \tag{22}$$

Das transformierte Flächenpaar $(x_1), (x_1')$ *stellt sich folgendermaßen dar:*

$$x_1 = x + \eta\,\zeta_1 - \zeta\,\eta_1, \qquad x_1' = x' + \eta'\,\zeta_1' - \zeta'\,\eta_1'. \tag{23}$$

Die Relationen (5), (6) sind erfüllt; dabei ist nach (12), (14):

$$n_1 = n\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2. \tag{24}$$

Für die Brennmäntel $(x_1^{(1)})$ und $(x_1^{(2)})$ der von der Geraden $x_1\,x_1'$ durchlaufenen W-Kongruenz und die zugehörigen Normalenvektoren hat man die Formeln (3) und (4), die mit dem Index 1 zu versehen sind:

$$x_1^{(1)} = x_1 - \frac{\nu_1}{1-\nu_1}(\eta_1\,\zeta_1' - \zeta_1\eta_1'), \quad \xi_1^{(1)} = \frac{\xi_1 - \nu_1\,\xi_1'}{1-\nu_1}, \quad \nu_1^2 = n_1; \tag{25}$$

bei $(x_1^{(2)})$ ist ν_1 durch $-\nu_1$ zu ersetzen. Mittels (3) und (22) findet man:

$$x_1^{(1)} - x^{(1)} = \frac{1}{1-\nu_1}(\eta\,\zeta_1 - \zeta\,\eta_1) - \frac{\nu_1}{1-\nu_1}\frac{\Phi}{\Phi'}(\eta'\,\zeta_1 - \zeta'\,\eta_1) + \frac{\nu}{1-\nu}(\eta\zeta' - \zeta\eta'),$$

demnach:

$$\Sigma\,(x_1^{(1)} - x^{(1)})\,\xi^{(1)} = \frac{\nu - \nu_1\frac{\Phi}{\Phi'}}{(1-\nu)\,(1-\nu_1)}\,(\xi_1, \xi, \xi'),$$

wobei die Klammer auf der rechten Seite die dreireihige Determinante in den Buchstaben ξ, η, ζ bedeutet. Unter Berücksichtigung von (24) schließt man, daß, wenn die Vorzeichen von ν und ν_1 gemäß der Bedingung

$$\nu_1 = \frac{\Phi'}{\Phi}\,\nu \tag{26}$$

gewählt werden, die Gleichung

$$\Sigma\,(x_1^{(1)} - x^{(1)})\,\xi^{(1)} = 0, \qquad \text{ebenso:} \qquad \Sigma\,(x_1^{(1)} - x^{(1)})\,\xi_1^{(1)} = 0$$

erfüllt ist. Die Gerade $x^{(1)}x_1^{(1)}$ berührt also die Flächen $(x^{(1)})$ und $(x_1^{(1)})$; gleicherweise ist $x^{(2)}x_1^{(2)}$ gemeinsame Tangente von $(x^{(2)})$ und $(x_1^{(2)})$. Da die Korrespondenz der Asymptotenlinien (α, β) auf den vier Flächen bereits feststeht, ist klar, daß die Geraden $x^{(1)}x_1^{(1)}$ und $x^{(2)}x_1^{(2)}$ zwei W-Kongruenzen bilden, also asymptotische Flächentransformationen vermitteln. Der am Schluß von Art. 1 ausgesprochene Hilfssatz ist damit bewiesen.

§ 2.

Transformationsprinzipien für konjugierte Systeme und Laplacesche Ketten.

1. Der Punkt x beschreibe auf der Fläche (x) das *konjugierte System* (α, β) mit der Laplaceschen Gleichung:

$$x_{\alpha\beta} = a\,x_\alpha + b\,x_\beta. \tag{27}$$

Die *Laplaceschen Transformierten* $(\hat{x})$ und $(\check{x})$, konjugierte Netze (α, β), vom zweiten Brennpunkt der α- bzw. β-Tangente beschrieben — danach werde zwischen α- und *β-Transformation* unterschieden —, sind durch die Formeln:

$$\hat{x} = x - \frac{x_\alpha}{b}, \qquad \check{x} = x - \frac{x_\beta}{a} \tag{28}$$

dargestellt. Wir setzen:

$$a - \frac{b_\beta}{b} = A, \qquad b - \frac{a_\alpha}{a} = B, \tag{29}$$

finden:

$$\left\{\begin{aligned} \hat{x}_\alpha &= \left(1 + \frac{b_\alpha}{b^2}\right) x_\alpha - \frac{1}{b}\, x_{\alpha\alpha}, & \hat{x}_\beta &= -\frac{A}{b}\, x_\alpha, \\ \check{x}_\alpha &= -\frac{B}{a}\, x_\beta, & \check{x}_\beta &= \left(1 + \frac{a_\beta}{a^2}\right) x_\beta - \frac{1}{a}\, x_{\beta\beta} \end{aligned}\right. \tag{30}$$

und hieraus weiter die Laplaceschen Gleichungen der transformierten Netze:

$$\hat{x}_{\alpha\beta} = A\,\hat{x}_\alpha + \left(b + \frac{A_\alpha}{A}\right)\hat{x}_\beta, \qquad \check{x}_{\alpha\beta} = \left(a + \frac{B_\beta}{B}\right)\check{x}_\alpha + B\,\check{x}_\beta. \tag{31}$$

In den beiden von den Tangenten gebildeten Kongruenzen sind α, β die Parameter der Developpablen; α- und β-Transformation sind reziproke Prozesse. Die Schmiegungsebene der vom Strahl berührten Netzkurve des einen Brennmantels ist Tangentialebene des anderen. Durch wiederholte Anwendung der Laplaceschen Transformation entsteht die *Laplacesche Kette.*

Transformationen allgemeiner Art, abgesehen von den projektiven, die auf konjugierte Netze ausgeübt werden können, gründen sich im wesentlichen auf zwei Elementaroperationen: auf die *radiale Zuordnung* und auf den *Übergang zum Parallelnetz* (Netz mit gleichem sphärischen Bild). Die erstere ist, wenn der Koordinatenanfang zum Zentrum der Zuordnung gewählt wird, durch $\frac{x}{\vartheta}$ gegeben, wobei ϑ ein Integral von (27) ist. Der zweite Prozeß liefert den das Parallelnetz beschreibenden Punkt x' durch drei Quadraturen:

$$x'_\alpha = p\, x_\alpha, \qquad x'_\beta = q\, x_\beta; \tag{32}$$

dabei müssen die Faktoren p, q den simultanen Differentialgleichungen:

$$p_\beta = -a(p - q), \qquad q_\alpha = b(p - q) \tag{33}$$

genügen, die sich auf die adjungierte Gleichung von (27) für $p - q$:

$$(p - q)_{\alpha\beta} + a(p - q)_\alpha + b(p - q)_\beta + (a_\alpha + b_\beta)(p - q) = 0$$

zurückführen lassen[11]).

[11]) Eine zweite, für das Folgende übrigens nicht in Betracht kommende Methode, bei der (aber nur unter Beschränkung auf das Tripel x, y, z) die Quadraturen (32) vermieden werden, benutzt eine Lösung w der von den Normalenkosinus X, Y, Z erfüllten Laplaceschen Gleichung (*équation tangentielle*) und gibt, wenn L, $M = 0$, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung von (x) sind:

$$x' = w\,X - \frac{w_\alpha}{L}\, x_\alpha - \frac{w_\beta}{N}\, x_\beta.$$

2. An (32) knüpft sich die Lösung der Aufgabe[12]): *auf allgemeinste Weise durch die Punkte eines konjugierten Netzes* (x) *die Strahlen einer Kongruenz zu legen, deren Developpablen den Netzkurven* (α, β) *entsprechen, d. h. also in den letzteren die Fläche* (x) *schneiden.* Durch x' ist dann die Strahlrichtung gegeben; die Brennpunkte werden:

$$x^{(1)} = x - \frac{x'}{p}, \qquad x^{(2)} = x - \frac{x'}{q}. \tag{34}$$

Es ergibt sich nämlich:

$$\left\{\begin{aligned} x_\alpha^{(1)} &= \frac{p_\alpha}{p^2} x', & x_\beta^{(1)} &= \frac{p-q}{p}\left(x_\beta - \frac{a}{p} x'\right), \\ x_\alpha^{(2)} &= -\frac{p-q}{q}\left(x_\alpha - \frac{b}{q} x'\right), & x_\beta^{(2)} &= \frac{q_\beta}{q^2} x'. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Danach ist der Strahl α-Tangente des Brennmantels $(x^{(1)})$ und β-Tangente von $(x^{(2)})$. Aus (28), (34), (35) folgert man noch:

$$\hat{x} = x^{(2)} + \frac{q}{b(p-q)} x_\alpha^{(2)}, \qquad \check{x} = x^{(1)} - \frac{p}{a(p-q)} x_\beta^{(1)}. \tag{36}$$

Allgemein mögen nun in einer Kongruenz mit den Developpablen (α, β) die beiden mit dem Strahl nicht zusammenfallenden Tangenten der die Brennmäntel bedeckenden konjugierten Netze (α, β), hier also die α-Tangente von $(x^{(2)})$ und die β-Tangente von $(x^{(1)})$, als die zum Strahl gehörige *freie* α- bzw. β-Tangente bezeichnet werden; diese setzen dann nach beiden Seiten die Laplacesche Kette fort, in der die Kongruenz selber ein Glied bildet. Aus (36) entnimmt man den wichtigen (s. Fig. 1)

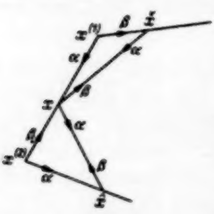


Fig. 1.

Satz I: *Schneiden die Developpablen einer Kongruenz aus einer Fläche* (x) *ein konjugiertes Netz* (α, β) *aus, so liegt der zweite Brennpunkt der* α*-Tangente von* (x) *auf der zum Strahl gehörigen freien* α*-Tangente; das Entsprechende gilt von der* β*-Tangente.* Man erkennt unmittelbar die Richtigkeit des Zusatzes: *Unter der gleichen Voraussetzung liegen die Punkte der aus dem konjugierten Netz gebildeten Laplaceschen Kette auf den Strahlen der die Kongruenz enthaltenden Kette.* Die erste Kette heiße der zweiten *einbeschrieben*, diese jener *umbeschrieben.*

Wir wenden uns zu der umgekehrten Aufgabe: *Bestimmung der allgemeinsten (von den Brennmänteln verschiedenen) Fläche, aus der die*

---

[12]) Vgl. dazu Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces 2 (1889), S. 219 ff. Für die betrachtete Beziehung zwischen konjugiertem System und Kongruenz hat Guichard den wenig glücklich gewählten Ausdruck *conjugué*, den wir nicht verwenden. Betreffs der Terminologie sei verwiesen auf: Guichard, Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques. Ann. de l'École Norm. (3) **14** (1897), S. 467.

Developpablen (α, β) *einer gegebenen Kongruenz ein konjugiertes Netz ausschneiden*. Der Strahl werde als α-Tangente des den Brennmantel (x) bedeckenden konjugierten Systems (α, β) aufgefaßt. Für den Punkt $x^{(\alpha)}$ der gesuchten Fläche ist der Ansatz

$$x^{(\alpha)} = x - \lambda x_\alpha$$

zu machen. Nach dem Voraufgehenden handelt es sich darum, einen Faktor σ so zu bestimmen, daß σx_α und $x - \lambda x_\alpha$ Parallelnetze beschreiben. Man findet auf diese Weise: $\sigma = 1/\vartheta_\alpha$, $\lambda = \vartheta/\vartheta_\alpha$, wobei ϑ wieder Integral von (27), also

$$\vartheta_{\alpha\beta} = a\,\vartheta_\alpha + b\,\vartheta_\beta \tag{37}$$

ist, und erhält die Darstellung:

$$x^{(\alpha)} = x - \frac{\vartheta}{\vartheta_\alpha} x_\alpha. \tag{38}$$

Die in Satz I ausgesprochene Tatsache bestätigt sich dadurch, daß der Punkt

$$x^{(\beta)} = x - \frac{\vartheta}{\vartheta_\beta} x_\beta, \tag{39}$$

auf der zum Strahl gehörigen freien β-Tangente gelegen, zweiter Brennpunkt der β-Tangente von ($x^{(\alpha)}$) wird. Man findet nämlich:

$$\tag{40} \begin{cases} x^{(\alpha)}_\beta = \dfrac{1}{\vartheta_\alpha}\left(b\dfrac{\vartheta}{\vartheta_\alpha} - 1\right)(x_\alpha\vartheta_\beta - x_\beta\vartheta_\alpha), \quad x^{(\beta)}_\alpha = -\dfrac{1}{\vartheta_\beta}\left(a\dfrac{\vartheta}{\vartheta_\beta} - 1\right)(x_\alpha\vartheta_\beta - x_\beta\vartheta_\alpha), \\ x^{(\beta)} - x^{(\alpha)} = \dfrac{\vartheta}{\vartheta_\alpha\vartheta_\beta}(x_\alpha\,\vartheta_\beta - x_\beta\,\vartheta_\alpha). \end{cases}$$

Ein konjugiertes System und eine Kongruenz heißen nach Guichard zueinander *harmonisch*, wenn bei Korrespondenz zwischen Netzkurven und Developpablen die Brennpunkte des Strahls auf den Tangenten des Netzes liegen (s. Fig. 2). Wie ersichtlich, ist die allgemeinste zu dem konjugierten Netz (x) harmonische Kongruenz durch die Formeln (38), (39) gegeben.

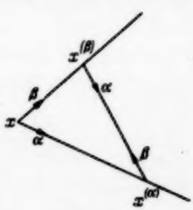


Fig. 2.

3. Wir beweisen jetzt den **Satz II**: *Treffen sich die gleichnamigen Tangenten zweier aufeinander bezogener konjugierter Netze, so sind diese beide harmonisch zu der Kongruenz, deren Strahlen die Verbindungsgeraden der Tangentenschnittpunkte, d. h. die Schnittlinien der Tangentialebenen sind.* Dabei ergibt sich zugleich die Darstellung der zwischen den beiden konjugierten Netzen vermittelnden *biharmonischen Transformation*.

Für die Netze (x) und (x_1) mit den Laplaceschen Gleichungen (27) und

$$(41)\qquad (x_1)_{\alpha\beta} = a_1 (x_1)_\alpha + b_1 (x_1)_\beta$$

sollen also Beziehungen von der Form:

$$(42)\qquad x - \lambda x_\alpha = x_1 - \lambda_1 (x_1)_\alpha, \qquad x - \mu x_\beta = x_1 - \mu_1 (x_1)_\beta$$

bestehen, aus denen zunächst durch Subtraktion

$$(43)\qquad \lambda x_\alpha - \mu x_\beta = \lambda_1 (x_1)_\alpha - \mu_1 (x_1)_\beta$$

folgt. Differentiiert man mit Benutzung von (27) und (41) die erste Relation (42) nach β, die zweite nach α, so müssen in den erhaltenen Gleichungen

$$(44)\left\{\begin{aligned} &(\lambda_\beta + a\lambda) x_\alpha + (b\lambda - 1) x_\beta = [(\lambda_1)_\beta + a_1 \lambda_1](x_1)_\alpha + (b_1 \lambda_1 - 1)(x_1)_\beta, \\ &(a\mu - 1) x_\alpha + (\mu_\alpha + b\mu) x_\beta = (a_1 \mu_1 - 1)(x_1)_\alpha + [(\mu_1)_\alpha + b_1 \mu_1](x_1)_\beta \end{aligned}\right.$$

die Koeffizienten mit denen von (43) proportional sein, da man anderenfalls auf die Parallelität der Tangentialebenen von (x) und (x_1) und im Hinblick auf (42) dann auf das Zusammenfallen der Flächen schließt. Es genügt, dies für die linken Seiten von (44) zum Ausdruck zu bringen:

$$(45)\qquad \frac{\lambda_\beta}{\lambda}\mu + a\mu + b\lambda - 1 = 0, \qquad \frac{\mu_\alpha}{\mu}\lambda + a\mu + b\lambda - 1 = 0.$$

Hieraus folgt aber:

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)_\beta = \left(\frac{1}{\mu}\right)_\alpha,$$

so daß

$$\lambda = \frac{\vartheta}{\vartheta_\alpha}, \qquad \mu = \frac{\vartheta}{\vartheta_\beta}$$

gesetzt werden kann. Nach (45) muß ϑ Integral von (27) sein. Wird entsprechend auch ϑ_1, Integral von (41), eingeführt, so geht (42) über in:

$$(46)\qquad x - \frac{\vartheta}{\vartheta_\alpha} x_\alpha = x_1 - \frac{\vartheta_1}{(\vartheta_1)_\alpha}(x_1)_\alpha, \qquad x - \frac{\vartheta}{\vartheta_\beta} x_\beta = x_1 - \frac{\vartheta_1}{(\vartheta_1)_\beta}(x_1)_\beta.$$

Wir definieren noch die Größen x', y', z' und ϑ' durch

$$x_1 = x - \frac{\vartheta}{\vartheta'} x', \qquad \vartheta_1 = -\frac{\vartheta}{\vartheta'},$$

setzen diese Ausdrücke für x_1 und ϑ_1 in (46) ein und erhalten:

$$\vartheta'_\alpha \cdot x_\alpha = \vartheta_\alpha \cdot x'_\alpha, \qquad \vartheta'_\beta \cdot x_\beta = \vartheta_\beta \cdot x'_\beta.$$

Werden wieder die Faktoren p und q eingeführt, so gilt das folgende *Formelsystem für die biharmonische Transformation:*

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} &x'_\alpha = p x_\alpha, \qquad x'_\beta = q x_\beta, \qquad \vartheta'_\alpha = p\vartheta_\alpha, \qquad \vartheta'_\beta = q\vartheta_\beta, \\ &x_1 = x - \frac{\vartheta}{\vartheta'} x', \qquad \qquad \vartheta_1 = -\frac{\vartheta}{\vartheta'}. \end{aligned}\right.$$

Auszugehen hat man also von einem Integral ϑ von (27) und von einem Lösungspaar p, q von (33); x', y', z', ϑ' ergeben sich durch Quadraturen, an deren Stelle, wie wir sehen werden, im speziellen Falle auch

endliche Formeln treten können. Eine einfache Rechnung zeigt, daß $x_1, y_1, z_1, \vartheta_1$ tatsächlich eine Laplacesche Gleichung von der Form (41) erfüllen[13]); Satz II ist mit der Aufstellung der Formeln (46) bewiesen. Auf Art. 2 Bezug nehmend, folgern wir aus (47): *Hängen* (x) *und* (x_1) *durch eine biharmonische Transformation zusammen, so entsprechen den Netzkurven* (α, β) *in der Kongruenz der Verbindungsgeraden* $x x_1$ *die Developpablen, die also die Flächen* (x) *und* (x_1) *in den Netzen schneiden. Die aus* (x) *und* (x_1) *gebildeten Laplaceschen Ketten sind demnach beide derjenigen Kette einbeschrieben, der die Kongruenz der Geraden* $x x_1$ *angehört.* Zu der letzteren Aussage gilt das Gegenstück: *Die Strahlen der zu den Netzen* (x) *und* (x_1) *gehörigen Laplaceschen Ketten treffen sich paarweise in den Punkten einer weiteren Laplaceschen Kette, der also jene gleichzeitig umbeschrieben sind.* Den Beweis hierfür entnimmt man der nachfolgenden Überlegung, die mit Rücksicht auf einen noch neu hinzutretenden Gesichtspunkt an den Anfang des nächsten Artikels gestellt wird.

4. Der in der Tangentialebene eines gegebenen konjugierten Netzes (x) gelegene Schnittpunkt x^* der Strahlen zweier zu (x) harmonischer Kongruenzen, die durch zwei Lösungen ϑ und $\vartheta^{(0)}$ von (27) mittels der Formeln (38), (39) definiert seien, beschreibt wiederum ein konjugiertes System (x^*), das als *abgeleitetes Netz (réseau dérivé)* von (x) bezeichnet wird. Die auf der α-Tangente von (x) gelegenen Punkte $x - \frac{\vartheta}{\vartheta_\alpha} x_\alpha$ und $x - \frac{\vartheta^{(0)}}{(\vartheta^{(0)})_\alpha} x_\alpha$ beschreiben nämlich konjugierte Netze, deren β-Tangenten sich in x^* treffen; ihre α-Tangenten haben nach Satz I (Art. 2) ihre zweiten Brennpunkte auf der α-Tangente von $\widehat{x} = x - \frac{x_\alpha}{b}$, liegen also in einer Ebene und schneiden sich, so daß Satz II (Art. 3) angewendet werden kann. Danach ist insbesondere (x^*) ein konjugiertes Netz. Gleichzeitig erkennt man: *Die aus dem abgeleiteten konjugierten Netz* (x^*) *hervorgehende Laplacesche Kette wird von den Punkten gebildet, in denen sich paarweise die Strahlen der beiden Ketten treffen, denen die bei der Konstruktion verwendeten, zu* (x) *harmonischen Kongruenzen angehören.*

Für das *abgeleitete Netz* (x^*) ergibt sich die folgende *Darstellung*:

$$(48)\qquad \begin{cases} x^* = x + l x_\alpha + m x_\beta, \\ \vartheta + l\vartheta_\alpha + m\vartheta_\beta = 0, \qquad \vartheta^{(0)} + l\vartheta^{(0)}_\alpha + m\vartheta^{(0)}_\beta = 0, \end{cases}$$

oder damit gleichwertig:

$$(48^*)\qquad x^* = \frac{1}{\begin{vmatrix} \vartheta_\alpha & \vartheta_\beta \\ \vartheta^{(0)}_\alpha & \vartheta^{(0)}_\beta \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} x & x_\alpha & x_\beta \\ \vartheta & \vartheta_\alpha & \vartheta_\beta \\ \vartheta^{(0)} & \vartheta^{(0)}_\alpha & \vartheta^{(0)}_\beta \end{vmatrix}.$$

---

[13]) Siehe dazu übrigens die Formeln (89), (90) in § 3.

Die Umkehrung dieses Prozesses besteht in der Konstruktion des *Enveloppennetzes (réseau dérivant).* Es seien p, q und $p^{(0)}, q^{(0)}$ zwei Lösungspaare von (33). Wir bestimmen $x', \ldots, x'', \ldots$ aus

(49) $$x'_\alpha = p x_\alpha, \qquad x'_\beta = q x_\beta, \qquad x''_\alpha = p^{(0)} x_\alpha \qquad x''_\beta = q^{(0)} x_\beta.$$

Dann beschreibt der Punkt $\bar{x}$, gegeben durch

(50) $$\begin{cases} \bar{x} = x + u x' + v x'', \\ u p + v p^{(0)} + 1 = 0, \quad u q + v q^{(0)} + 1 = 0, \end{cases}$$

die Enveloppe $(\bar{x})$ der Ebene, die durch den Punkt x des ursprünglichen Netzes und die von ihm ausgehenden Strahlen mit den Richtungen x' und x'' gelegt ist. Man findet mit Berücksichtigung von (33):

$$\bar{x}_\alpha = u_\alpha x' + v_\alpha x'', \qquad \bar{x}_\beta = u_\beta x' + v_\beta x'', \qquad \bar{x}_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta} x' + v_{\alpha\beta} x''$$

und ersieht hieraus, daß auf der Enveloppe $(\bar{x})$ das Kurvennetz (α, β) konjugiert ist und daß die zugehörige Laplacesche Gleichung u und v als Lösungen zuläßt. *Das Netz $(\bar{x})$ ist harmonisch zu den beiden Kongruenzen mit den Strahlrichtungen x' und x''.* Von $(\bar{x})$ zu (x) zurück führt die durch (48) dargestellte Operation, wobei u und v die Rolle der dort mit $\vartheta, \vartheta^{(0)}$ bezeichneten Größen übernehmen.

5. Im Gegensatz zu den bis hierher behandelten Transformationsmethoden, die über das Tripel x, y, z hinaus auf jede weitere Lösung der vorgelegten Laplaceschen Gleichung anwendbar sind, ist der jetzt zu betrachtende Prozeß auf das dreidimensionale Gebiet beschränkt. *Es soll auf allgemeinste Weise zu einem gegebenen konjugierten System (α, β), das die Fläche (x) mit der Normalenrichtung X (Richtungskosinus X, Y, Z) bedeckt, eine Kongruenz mit den Developpablen (α, β) und der Strahlrichtung X bestimmt werden.* Netz und Kongruenz haben dann also das sphärische Bild gemeinsam; sie mögen *bildverwandt* heißen (bei Guichard: *parallèle*).

Quadrat des Linienelements und zweite Fundamentalform seien für (x):

(51) $$\sum dx^2 = E d\alpha^2 + 2 F d\alpha d\beta + G d\beta^2,$$

(52) $$-\sum dX dx = L d\alpha^2 + N d\beta^2 \qquad (M = 0).$$

Dann bestehen die bekannten Beziehungen:

(53) $$x_{11} = LX, \qquad x_{12} = 0 \quad \left(a = \left\{ {12 \atop 1} \right\}, \quad b = \left\{ {12 \atop 2} \right\}\right), \qquad x_{22} = NX.$$

Für die gesuchte Kongruenz (Strahlrichtung X) sei $\mathfrak{x}$ der Fußpunkt des vom Koordinatenanfang auf den Strahl gefällten Lotes, das parallel zu einer Flächentangente von (x) ist; diese letztere sei rechtwinklig zu der durch den Punkt x gehenden Kurve der Schar $\varphi = \text{const.}$ Die Funktion $\varphi(\alpha, \beta)$ ist zu bestimmen. Zunächst gilt ein Ansatz von der Form:

(54) $$\begin{cases} \mathfrak{x} = \varrho \nabla(x, \varphi), \\ \nabla(x, \varphi) = \dfrac{1}{EG - F^2} [(G x_\alpha - F x_\beta) \varphi_\alpha + (E x_\beta - F x_\alpha) \varphi_\beta], \end{cases}$$

wobei ϱ einen vorläufig einzuführenden Faktor bedeutet. Die beiden Brennmäntel bezeichnen wir mit $(\mathfrak{x}^{(1)})$ und $(\mathfrak{x}^{(2)})$; für den ersteren, d. h. für den oberen Zeiger 1 wie in Art. 2, soll der Strahl α-Tangente sein. Wir setzen:

$$(55) \qquad \mathfrak{x}^{(1)} = \varrho \nabla(x, \varphi) + h^{(1)} X, \qquad \mathfrak{x}^{(2)} = \varrho \nabla(x, \varphi) + h^{(2)} X$$

und bringen zum Ausdruck, daß $\mathfrak{x}_\alpha^{(1)}$ und $\mathfrak{x}_\beta^{(2)}$ mit X proportional sein müssen. Dabei ist von den folgenden Formeln Gebrauch zu machen, in denen $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{22}$ (ebenso wie $x_{11}, \ldots$) die kovarianten zweiten Ableitungen sind:

$$[\nabla(x, \varphi)]_\alpha$$

$$= \frac{1}{EG - F^2}[\varphi_{11}(G x_\alpha - F x_\beta) + \varphi_{12}(E x_\beta - F x_\alpha) + (G \varphi_\alpha - F \varphi_\beta) L X],$$

$$[\nabla(x, \varphi)]_\beta$$

$$= \frac{1}{EG - F^2}[\varphi_{12}(G x_\alpha - F x_\beta) + \varphi_{22}(E x_\beta - F x_\alpha) + (E \varphi_\beta - F \varphi_\alpha) N X],$$

$$X_\alpha = -\frac{L}{EG - F^2}(G x_\alpha - F x_\beta), \qquad X_\beta = -\frac{N}{EG - F^2}(E x_\beta - F x_\alpha).$$

Es ergibt sich auf diese Weise:

$$(56) \qquad \begin{cases} \varrho \varphi_{12} + \varrho_\alpha \varphi_\beta = 0, & \varrho \varphi_{11} + \varrho_\alpha \varphi_\beta - h^{(1)} L = 0, \\ \varrho \varphi_{12} + \varrho_\beta \varphi_\alpha = 0, & \varrho \varphi_{22} + \varrho_\beta \varphi_\alpha - h^{(2)} N = 0. \end{cases}$$

Danach wird: $\varrho_\alpha \varphi_\beta - \varrho_\beta \varphi_\alpha = 0$, also ϱ Funktion von φ, so daß, wie ersichtlich, $\varrho = 1$ gesetzt werden kann. An Stelle von (54) bis (56) heißt es dann:

$$(57) \qquad \mathfrak{x} = \nabla(x, \varphi), \quad \mathfrak{x}^{(1)} = \nabla(x, \varphi) + \frac{\varphi_{11}}{L} X, \quad \mathfrak{x}^{(2)} = \nabla(x, \varphi) + \frac{\varphi_{22}}{N} X,$$

$$(58) \qquad \varphi_{12} = 0, \text{ d. h.: } \varphi_{\alpha\beta} = a \varphi_\alpha + b \varphi_\beta.$$

Die Darstellung der Kongruenz erfordert also wieder wie im Falle der harmonischen Beziehung ein Integral der Laplaceschen Gleichung des gegebenen konjugierten Netzes. Bildet man $\mathfrak{x}_\beta^{(1)}$, so zeigt sich, daß in dem Ausdruck neben einem Gliede mit X die Ableitungen x_α und x_β nur in der Verbindung $E x_\beta - F x_\alpha$ vorkommen, so daß

$$\sum \mathfrak{x}_\alpha^{(1)} x_\alpha = 0, \qquad \sum \mathfrak{x}_\beta^{(1)} x_\alpha = 0$$

wird. Das besagt: *Die Brennmäntelnormalen in der erhaltenen Kongruenz sind parallel zu den Tangenten des Netzes* (x); *insbesondere ist* x_α *die Richtung der Normalen des Brennmantels* $(\mathfrak{x}^{(1)})$, *für den der Strahl* α*-Tangente ist.*

Für die beabsichtigte Anwendung (§ 5) ist es vorteilhaft, die eben entwickelte Methode etwas abzuändern. Wir lösen die umgekehrte und, wie aus der letzten Feststellung hervorgeht, gleichwertige Aufgabe: *Zu einem konjugierten System* (x) *ein korrespondierendes* $(\mathfrak{x}^{(1)})$ *zu konstruieren,*

dessen Flächennormale die Richtung x_a besitzt. Ist φ_a eine als Ableitung geschriebene gesuchte Funktion von α, β, so kann gesetzt werden:

(59) $\sum \mathfrak{x}^{(1)} x_a = \varphi_a, \quad \sum \mathfrak{x}_\alpha^{(1)} x_a = 0, \quad \sum \mathfrak{x}_\beta^{(1)} x_a = 0, \quad \sum \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^{(1)} x_a = 0.$

Der ersten Gleichung zufolge wird $\varphi_a / \sqrt{E}$ der Abstand der Tangentialebene vom Koordinatenanfang, die zweite und dritte drücken aus, daß x_a die Normalenrichtung ist, und die vierte, daß auf der Fläche $(\mathfrak{x}^{(1)})$ das Kurvennetz (α, β) konjugiert ist. Differentiation der beiden ersten Relationen ergibt:

(60) $\sum \mathfrak{x}^{(1)} x_{a\alpha} = \varphi_{a\alpha}, \quad \sum \mathfrak{x}^{(1)} x_\beta = \frac{1}{b}(\varphi_{\alpha\beta} - a\,\varphi_a), \quad \sum \mathfrak{x}_\alpha^{(1)} x_\beta = 0.$

Differentiiert man von diesen Gleichungen die zweite nach α und berücksichtigt die dritte, so folgt:

$$\left[\frac{1}{b}(\varphi_{\alpha\beta} - a\,\varphi_a)\right]_\alpha = \varphi_{\alpha\beta},$$

hieraus:

$$\varphi_{\alpha\beta} = a\,\varphi_a + b\,[\varphi_\beta + f'(\beta)],$$

und wenn jetzt an Stelle von $\varphi + f(\beta)$ wieder φ geschrieben wird:

(61) $$\varphi_{\alpha\beta} = a\,\varphi_a + b\,\varphi_\beta.$$

Die laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{y}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(1)}$ sind dann durch die folgenden, mit (57) übrigens gleichbedeutenden, linearen Gleichungen bestimmt:

(62) $\sum \mathfrak{x}^{(1)} x_a = \varphi_a, \quad \sum \mathfrak{x}^{(1)} x_\beta = \varphi_\beta, \quad \sum \mathfrak{x}^{(1)} x_{a\alpha} = \varphi_{a\alpha}.$

Andererseits zeigt das Bestehen der Relationen

(63) $$\sum \mathfrak{x}_\alpha^{(1)} x_a = 0, \quad \sum \mathfrak{x}_\alpha^{(1)} x_\beta = 0,$$

daß auch umgekehrt die α-Tangente von $(\mathfrak{x}^{(1)})$ parallel zur Flächennormalen von (x) ist. Der zweite Brennmantel $(\mathfrak{x}^{(2)})$ der von diesen Tangenten gebildeten Kongruenz, auf dem also die Strahlen die β-Kurven berühren, ist, wieder im Einklang mit (57), durch die zu (62) analoge Darstellung gegeben:

(64) $\sum \mathfrak{x}^{(2)} x_a = \varphi_a, \quad \sum \mathfrak{x}^{(2)} x_\beta = \varphi_\beta, \quad \sum \mathfrak{x}^{(2)} x_{\beta\beta} = \varphi_{\beta\beta}.$

Um die aus $(\mathfrak{x}^{(1)})$ hervorgehende Laplacesche Kette zu konstruieren, hat man in den Gleichungen (62) ebenso wie auf x, y, z auch auf φ die Formeln (28) der Laplaceschen Transformation anzuwenden. Es genügt, sich hiervon für den Fall der auf $x, \ldots, \varphi$ ausgeübten β-Transformation zu überzeugen. Mittels

(65) $$\breve{x} = x - \frac{x_\beta}{a}, \quad \breve{\varphi} = \varphi - \frac{\varphi_\beta}{a}$$

ergibt sich $(\mathfrak{x}^{(2)})$; in der Tat erweisen sich die Formeln

(66) $\sum \mathfrak{x}^{(2)} \breve{x}_a = \breve{\varphi}_a, \quad \sum \mathfrak{x}^{(2)} \breve{x}_\beta = \breve{\varphi}_\beta, \quad \sum \mathfrak{x}^{(2)} \breve{x}_{a\alpha} = \breve{\varphi}_{a\alpha}$

als äquivalent mit (64). Zu beachten ist, daß dabei also das Netz ($\mathfrak{x}^{(1)}$) eine α-Transformation erfährt. Wir fassen das Ergebnis als **Satz III** zusammen: *Für ein konjugiertes Netz* (x) *definiert ein (von* x, y, z *linear unabhängiges) Integral* φ *der zugehörigen Laplaceschen Gleichung den durch* (62) *dargestellten Transformationsprozeß, der die aus* (x) *erhaltene Laplacesche Kette unter Vertauschung von Strahlrichtungen und Normalenrichtungen in eine neue, und zwar kontragrediente Laplacesche Kette (der Folge der* α-*Transformationen entspricht die der* β-*Transformationen) überführt.*

§ 3.

Die harmonischen Transformationen des viergliedrigen Laplaceschen Zyklus.

1. Für die konjugierten Netze (x), ($\bar{x}$) mit den Laplaceschen Gleichungen

(67) $$x_{\alpha\beta} = a\,x_\alpha + b\,x_\beta, \quad \bar{x}_{\alpha\beta} = \bar{a}\,\bar{x}_\alpha + \bar{b}\,\bar{x}_\beta$$

sollen jetzt die Laplaceschen Transformierten paarweise zusammenfallen:

(68) $$\hat{x} = x - \frac{x_\alpha}{b} = \bar{x} - \frac{\bar{x}_\beta}{\bar{a}}, \quad \check{x} = x - \frac{x_\beta}{a} = \bar{x} - \frac{\bar{x}_\alpha}{\bar{b}},$$

so daß ein viergliedriger Zyklus $(x) \to (\hat{x}) \to (\bar{x}) \to (\check{x}) \to (x)$ von α-Transformationen, im umgekehrten Sinne von β-Transformationen entsteht. Setzt man [siehe (29)]:

(69) $$a - \frac{b_\beta}{b} = A, \quad b - \frac{a_\alpha}{a} = B, \quad \bar{a} - \frac{\bar{b}_\beta}{\bar{b}} = \bar{A}, \quad \bar{b} - \frac{\bar{a}_\alpha}{\bar{a}} = \bar{B},$$

so müssen die Differentialrelationen

(70) $$A_\alpha + b\,A = \bar{B}_\beta + \bar{a}\,\bar{B} = A\,\bar{B}, \quad B_\beta + a\,B = \bar{A}_\alpha + \bar{b}\,\bar{A} = B\,\bar{A}$$

erfüllt sein. Sie bilden die Integrabilitätsbedingungen für das System[14]):

(71) $$\left\{\begin{aligned} &\bar{x}_\alpha = \frac{\bar{b}}{a}\,x_\alpha + \bar{b}\,(\bar{x} - x), \quad \bar{x}_\beta = \frac{\bar{a}}{b}\,x_\alpha + \bar{a}\,(\bar{x} - x),\\ &x_{\alpha\alpha} = \left(b + \frac{b_\alpha}{b} + \bar{B}\right) x_\alpha + b\,\bar{B}\,(\bar{x} - x),\\ &x_{\alpha\beta} = a\,x_\alpha + b\,x_\beta,\\ &x_{\beta\beta} = \left(a + \frac{a_\beta}{a} + \bar{A}\right) x_\beta + a\,\bar{A}\,(\bar{x} - x). \end{aligned}\right.$$

---

[14]) Vgl. hierzu § 3 der unter [3]) angeführten Abhandlung. Ein Wechsel in der Bezeichnungsweise erwies sich im Hinblick auf die neuen Entwicklungen als notwendig: an die Stelle des Strichs (x', a', A', ...) ist der Querstrich ($\bar{x}$, $\bar{a}$, $\bar{A}$, ...) getreten.

Dieses bestimmt dann im dreidimensionalen Raume bis auf Affinitäten eindeutig einen viergliedrigen Laplaceschen Zyklus. Für die Determinante

$$\Delta = (x_\alpha, x_\beta, \bar{x} - x) = \begin{vmatrix} x_\alpha & x_\beta & \bar{x} - x \\ y_\alpha & y_\beta & \bar{y} - y \\ z_\alpha & z_\beta & \bar{z} - z \end{vmatrix} \tag{72}$$

gelten die später zur Verwendung kommenden Formeln:

$$\frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{b_\alpha}{b} + 2b + \bar{b} + \bar{B}, \quad \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{a_\beta}{a} + 2a + \bar{a} + \bar{A}. \tag{73}$$

Die Laplaceschen Gleichungen (31) für $(\hat{x})$, $(\check{x})$ lassen sich jetzt schreiben:

$$\hat{x}_{\alpha\beta} = A\hat{x}_\alpha + \bar{B}\hat{x}_\beta, \quad \check{x}_{\alpha\beta} = \bar{A}\check{x}_\alpha + B\check{x}_\beta. \tag{74}$$

Wir erinnern außerdem an den a. a. O. bewiesenen Satz: *Im viergliedrigen Laplaceschen Zyklus durchlaufen die Diagonalstrahlen* $x\bar{x}$ *und* $\hat{x}\check{x}$ *zwei W-Kongruenzen, auf deren Brennmänteln die Kurven* (α, β) *die Asymptotenlinien sind.* Die Brennmäntelpaare sind reell, wenn $a b \bar{a} \bar{b} > 0$ bzw. $A B \bar{A} \bar{B} > 0$ ist.

2. *Punkt-Strahl-Transformation PS.* — Wir denken uns, an § 2, 2 anknüpfend, durch die Punkte x und $\bar{x}$ des Zyklus die Strahlen zweier Kongruenzen mit den Developpablen (α, β) gelegt. Dazu seien die Strahlrichtungen x' und $\bar{x}'$ vorläufig durch die Formeln (32), (33) definiert:

$$x'_\alpha = p\, x_\alpha, \quad x'_\beta = q\, x_\beta, \quad \bar{x}'_\alpha = \bar{p}\, \bar{x}_\alpha, \quad \bar{x}'_\beta = \bar{q}\, \bar{x}_\beta, \tag{75}$$

$$\begin{cases} p_\beta = -a(p-q), & q_\alpha = b(p-q), \\ \bar{p}_\beta = -\bar{a}(\bar{p}-\bar{q}), & \bar{q}_\alpha = \bar{b}(\bar{p}-\bar{q}). \end{cases} \tag{76}$$

Die beiden Brennmäntelpaare — für $(x^{(1)})$ und $(\bar{x}^{(1)})$ ist der Strahl α-Tangente — sind nach (34) dargestellt durch:

$$x^{(1)} = x - \frac{x'}{p}, \quad x^{(2)} = x - \frac{x'}{q}, \quad \bar{x}^{(1)} = \bar{x} - \frac{\bar{x}'}{\bar{p}}, \quad \bar{x}^{(2)} = \bar{x} - \frac{\bar{x}'}{\bar{q}}. \tag{77}$$

Nach Satz I von § 2, 2 gehen die α-Tangente von $(x^{(2)})$ und die β-Tangente von $(\bar{x}^{(1)})$ durch $\hat{x}$, während die β-Tangente von $(x^{(1)})$ und die α-Tangente von $(\bar{x}^{(2)})$ sich in $\check{x}$ treffen. Soll also in der Folge $x^{(1)} x^{(2)} \bar{x}^{(1)} \bar{x}^{(2)}$ wieder ein Laplacescher Zyklus zustande kommen, so müssen die Richtungen $x^{(2)} \hat{x}$ und $\bar{x}^{(1)} \hat{x}$ einerseits, $x^{(1)} \check{x}$ und $\bar{x}^{(2)} \check{x}$ andererseits zusammenfallen. Als Bedingungen dafür erhält man mittels (68) und (77) die Relationen:

$$\bar{x}' - \frac{\bar{p}}{\bar{a}}\, \bar{x}_\beta = \varkappa_0 \left(x' - \frac{q}{b}\, x_\alpha\right), \qquad \bar{x}' - \frac{\bar{q}}{\bar{b}}\, \bar{x}_\alpha = \varkappa \left(x' - \frac{p}{a}\, x_\beta\right), \tag{78}$$

in denen $\varkappa_0$ und $\varkappa$ Proportionalitätsfaktoren bedeuten. Wir differentiieren die erste nach α und nach β, beseitigen die Ableitungen von $\bar{x}$ sowie die zweiten Ableitungen von x und finden die Gleichungen:

$$(\varkappa_0)_\alpha\left(x' - \frac{q}{b}\,x_\alpha\right) + [\bar{p}_\alpha + \bar{B}\,(\bar{p} - \varkappa_0\,q)]\left(\frac{x_\alpha}{b} + \bar{x} - x\right) = 0,$$

$$(\varkappa_0)_\beta\left(x' - \frac{q}{b}\,x_\alpha\right) - [\varkappa_0\,q_\beta - A\,(\bar{p} - \varkappa_0\,q)]\,\frac{x_\alpha}{b} = 0.$$

Die Koeffizienten von x', x_α, $\bar{x} - x$ müssen einzeln verschwinden[15]):

$$(\varkappa_0)_\alpha = 0, \quad (\varkappa_0)_\beta = 0, \quad \bar{p}_\alpha + \bar{B}\,(\bar{p} - \varkappa_0\,q) = 0, \quad \varkappa_0\,q_\beta - A\,(\bar{p} - \varkappa_0\,q) = 0.$$

Analoge Beziehungen liefert die Differentiation der zweiten Formel (78). Die Faktoren $\varkappa_0$, $\varkappa$ sind also Konstanten ($\neq 0$). Wesentlich, d. h. für die Transformation charakteristisch ist nur ihr Verhältnis. Es empfiehlt sich trotz des damit verbundenen Mangels an Symmetrie, $\varkappa_0 = 1$ zu setzen. Dann gilt (unter Ausschluß des Wertes $\varkappa = 1$) das folgende lineare und homogene System totaler Differentialgleichungen für die vier gesuchten Funktionen p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$:

$$(79)\qquad \begin{cases} p_\alpha = B\left(\dfrac{\bar{q}}{\varkappa} - p\right), & p_\beta = -a\,(p - q), \\ q_\alpha = b\,(p - q), & q_\beta = A\,(\bar{p} - q), \\ \bar{p}_\alpha = -\bar{B}\,(\bar{p} - q), & \bar{p}_\beta = -\bar{a}\,(\bar{p} - \bar{q}), \\ \bar{q}_\alpha = \bar{b}\,(\bar{p} - \bar{q}), & \bar{q}_\beta = -\bar{A}\,(\bar{q} - \varkappa p). \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingungen lassen sich auf Grund von (69), (70) verifizieren. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die Quadraturen (75) jetzt durch endliche Formeln für x', $\bar{x}'$ ersetzt werden, die aus (78) hervorgehen:

$$(80)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\varkappa - 1}\left[(\bar{p} - q)\,\dfrac{x_\alpha}{b} - (\bar{q} - \varkappa p)\,\dfrac{x_\beta}{a} + (\bar{p} - \bar{q})\,(\bar{x} - x)\right], \\ \bar{x}' = \dfrac{1}{\varkappa - 1}\left[\varkappa\,(\bar{p} - q)\,\dfrac{x_\alpha}{b} - (\bar{q} - \varkappa p)\,\dfrac{x_\beta}{a} + (\varkappa\,\bar{p} - \bar{q})\,(\bar{x} - x)\right]. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke hat man in die Formeln (77) einzutragen, die dann die vier Flächen $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$, $(\bar{x}^{(1)})$, $(\bar{x}^{(2)})$ des transformierten Zyklus darstellen. Die hiermit gewonnene *erste harmonische Transformation* eines viergliedrigen Laplaceschen Zyklus (harmonisch sind die Strahlenkongruenzen des gegebenen zu den Netzen des transformierten Zyklus) oder *Punkt-Strahl-*

---

[15]) Beim Bestehen einer linearen Beziehung zwischen x', x_α, $\bar{x} - x$ fiele der Punkt $x^{(2)}$ in die Ebene $x\,\hat{x}\,\bar{x}$; diese wäre für die Fläche $(x^{(2)})$, die ja $x^{(2)}x$ und $x^{(2)}\,\hat{x}$ zu Tangenten hat, die Tangentialebene; $x^{(2)}$ wäre identisch mit $\hat{x}$.

Transformation PS ist also dadurch gekennzeichnet, daß *durch die Punkte des gegebenen Zyklus die Strahlen des transformierten gehen; der letztere ist dem ersteren umbeschrieben.* Unter Berücksichtigung der Homogenität des Systems (79) und der Tatsache, daß $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ nur von den Verhältnissen der Größen $p, q, \bar{p}, \bar{q}$ abhängen, erkennt man, daß für einen gegebenen Wert von $\varkappa$ bei der Transformation PS noch *drei* willkürliche Konstanten auftreten.

3. *Strahl-Punkt-Transformation SP.* — Wir betrachten jetzt auf den vier Strahlen des gegebenen Laplaceschen Zyklus die vier Punkte [siehe (33), (39)]:

$$(81)\qquad \left\{\begin{aligned} x^{(\beta)} &= x - \frac{\vartheta}{\vartheta_\beta}\, x_\beta, & x^{(\alpha)} &= x - \frac{\vartheta}{\vartheta_\alpha}\, x_\alpha, \\ \bar{x}^{(\beta)} &= \bar{x} - \frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\vartheta}_\beta}\, \bar{x}_\beta, & \bar{x}^{(\alpha)} &= \bar{x} - \frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\vartheta}_\alpha}\, \bar{x}_\alpha, \end{aligned}\right.$$

wobei wir von den Größen ϑ und $\bar{\vartheta}$ zunächst nur voraussetzen, daß sie den Laplaceschen Gleichungen (67) der Netze (x) und $(\bar{x})$ genügen. Die Flächen $(x^{(\beta)})$, $(x^{(\alpha)})$ und $(\bar{x}^{(\beta)})$, $(\bar{x}^{(\alpha)})$ sind die Brennmäntelpaare zweier zu (x) bzw. $(\bar{x})$ harmonischer Kongruenzen; für $(x^{(\beta)})$ und $(\bar{x}^{(\beta)})$ sind die Strahlen die α-Tangenten. Es handelt sich darum, ϑ und $\bar{\vartheta}$ weiteren Bedingungen so zu unterwerfen, daß auch zwischen $(x^{(\alpha)})$ und $(\bar{x}^{(\beta)})$, ebenso zwischen $(x^{(\beta)})$ und $(\bar{x}^{(\alpha)})$ die Laplacesche Transformation hergestellt wird. Mit Hilfe von (68) und (30) gelingt es, die Formeln (81) für $x^{(\alpha)}$ und $\bar{x}^{(\beta)}$ in die folgenden zu verwandeln:

$$(82)\qquad x^{(\alpha)} = \hat{x} - \frac{\vartheta - \frac{\vartheta_\alpha}{b}}{\left(\vartheta - \frac{\vartheta_\alpha}{b}\right)_\beta}\, \hat{x}_\beta, \quad \bar{x}^{(\beta)} = \hat{x} - \frac{\bar{\vartheta} - \frac{\bar{\vartheta}_\beta}{\bar{a}}}{\left(\bar{\vartheta} - \frac{\bar{\vartheta}_\beta}{\bar{a}}\right)_\alpha}\, \hat{x}_\alpha.$$

Dabei sind dann $\vartheta - \vartheta_\alpha/b$ und $\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_\beta/\bar{a}$ Integrale der von $\hat{x}$ erfüllten Laplaceschen Gleichung. Infolgedessen erhält man unmittelbar auch den zweiten Brennpunkt der α-Tangente von $(x^{(\alpha)})$ und den der β-Tangente von $(\bar{x}^{(\beta)})$. Da aber diese bezüglich mit $\bar{x}^{(\beta)}$ und mit $x^{(\alpha)}$ zusammenfallen sollen, muß

$$(83)\qquad \bar{x}^{(\beta)} = \hat{x} - \frac{\vartheta - \frac{\vartheta_\alpha}{b}}{\left(\vartheta - \frac{\vartheta_\alpha}{b}\right)_\alpha}\, \hat{x}_\alpha, \quad x^{(\alpha)} = x - \frac{\bar{\vartheta} - \frac{\bar{\vartheta}_\beta}{\bar{a}}}{\left(\bar{\vartheta} - \frac{\bar{\vartheta}_\beta}{\bar{a}}\right)_\beta}\, \hat{x}_\beta$$

sein. Vergleicht man (83) und (82), so schließt man:

$$(84)\qquad \bar{\vartheta} - \frac{\bar{\vartheta}_\beta}{\bar{a}} = k_0\left(\vartheta - \frac{\vartheta_\alpha}{b}\right),$$

wobei der Faktor k_0 konstant ist. Entsprechend wird, mit $k = \text{const}$:

$$(85)\qquad \bar{\vartheta} - \frac{\bar{\vartheta}_\alpha}{\bar{b}} = k\left(\vartheta - \frac{\vartheta_\beta}{a}\right).$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann wieder $k_0 = 1$ gesetzt werden. Aus (84), (85) und den beiden von ϑ und $\bar{\vartheta}$ zu erfüllenden Laplaceschen Gleichungen erhält man das folgende unbeschränkt integrable, von (71) nur durch das Auftreten der charakteristischen Konstanten $k\,(\neq 1)$ unterschiedene System:

$$(86)\qquad \begin{cases} \bar{\vartheta}_\alpha = k\dfrac{\bar{b}}{a}\vartheta_\beta + \bar{b}\,(\bar{\vartheta} - k\vartheta), \quad \bar{\vartheta}_\beta = \dfrac{\bar{a}}{\bar{b}}\vartheta_\alpha + \bar{a}\,(\bar{\vartheta} - \vartheta), \\ \vartheta_{\alpha\alpha} = \left(b + \dfrac{b_\alpha}{b} + \bar{B}\right)\vartheta_\alpha + b\bar{B}(\bar{\vartheta} - \vartheta), \\ \vartheta_{\alpha\beta} = a\vartheta_\alpha + b\vartheta_\beta, \\ \vartheta_{\beta\beta} = \left(a + \dfrac{a_\beta}{a} + \bar{A}\right)\vartheta_\beta + a\bar{A}\left(\dfrac{\bar{\vartheta}}{k} - \vartheta\right).\text{[16]} \end{cases}$$

Es läßt sich als homogenes System linearer totaler Differentialgleichungen für die vier Funktionen ϑ, $\bar{\vartheta}$, ϑ_α, ϑ_β auffassen. Die Integration führt *drei* wesentliche Konstanten ein, die Verhältnisse der Funktionswerte für ein anfängliches Wertepaar $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$. Die Flächen des neuen Zyklus, in der Folge der α-Transformationen: $(x^{(\beta)})$, $(x^{(\alpha)})$, $(\bar{x}^{(\beta)})$, $(\bar{x}^{(\alpha)})$, sind durch (81) dargestellt. Hiermit ist die *zweite harmonische Transformation* oder *Strahl-Punkt-Transformation SP* hergeleitet, dadurch gekennzeichnet, daß *auf den Strahlen des gegebenen Laplaceschen Zyklus die Punkte des transformierten liegen; der letztere ist dem ersteren einbeschrieben.*

Die Transformationen *PS* und *SP* sind reziprok. In bezug auf zweimalige Anwendung des einen oder des anderen Prozesses auf denselben Zyklus ergeben sich als Folgerungen aus § 2, 4 die Sätze: a) *Hat man zu einem viergliedrigen Laplaceschen Zyklus zwei neue konstruiert, deren Strahlen durch die Punkte des gegebenen gehen, so bilden die Verbindungsgeraden ihrer Punkte die Strahlen eines weiteren Zyklus.* b) *Liegen die Punkte zweier Laplacescher Zyklen auf den Strahlen eines dritten Zyklus, so bilden die Schnittpunkte ihrer Strahlen gleichfalls einen Laplaceschen Zyklus.* Ist bei der zweimaligen Anwendung der Transformation *PS* oder *SP* der Wert

---

[16]) Auf das System (86) führt, wie beiläufig erwähnt sei, auch die Frage nach denjenigen konjugierten Netzen, die sich durch eine Folge von vier Laplaceschen Transformationen in ähnliche mit dem Ähnlichkeitszentrum in O oder allgemeiner in radial-affine verwandeln. Schreibt man nämlich x, $\bar{x}$ an Stelle von ϑ, $\bar{\vartheta}$, so gehen x, y, z durch die vier α-Transformationen in kx, ky, kz über, für verschiedene Werte der Konstanten in k_1x, k_2y, k_3z.

von $\varkappa$ bzw. von k der gleiche, so liegt der Fall zweier Laplacescher Zyklen vor, zu denen ein *linearer Büschel* von ∞^1 Zyklen existiert (definiert durch $cp + c'p^{(0)}$, $cq + c'q^{(0)}, \ldots$ bzw. durch $c\vartheta + c'\vartheta^{(0)}$, $c\overline{\vartheta} + c'\overline{\vartheta}^{(0)}$), die sämtlich dem einen umbeschrieben und dem anderen einbeschrieben sind. Eine Ergänzung hierzu bringt § 4, 2.

4. *Biharmonische Transformation.* — Im Anschluß an § 2, 3 kann zunächst der folgende Sachverhalt festgestellt werden: *Hängen zwei konjugierte Netze* (x) *und* (x_1), *von denen jedes einem viergliedrigen Laplaceschen Zyklus angehört, durch eine biharmonische Transformation zusammen, so bilden einerseits die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punkte die Strahlen und andererseits die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen die Punkte je eines weiteren Laplaceschen Zyklus:* mit anderen Worten: *es gibt dann einen den beiden Zyklen umbeschriebenen und einen ihnen beiden einbeschriebenen Zyklus.* Danach haben wir auf den gegebenen Zyklus $(x)(\widehat{x})(\overline{x})(\breve{x})$, um ihn durch eine biharmonische Transformation in einen neuen: $(x_1)(\widehat{x}_1)(\overline{x}_1)(\breve{x}_1)$ überzuführen, gleichzeitig eine Transformation PS und eine vom Typus SP anzuwenden. Diese bleiben übrigens, wie sich zeigen wird, abgesehen von einem Sonderfall, voneinander unabhängig. Es sei also $p, q, \overline{p}, \overline{q}$ ein Lösungssystem von (79), mittels dessen sich $x', \overline{x}'$ nach (80) bestimmen, ferner $\vartheta, \overline{\vartheta}$ ein Lösungspaar von (86). Für den gesuchten Zyklus ist gemäß (47) zu setzen:

$$x_1 = x - \frac{\vartheta}{\vartheta'} x', \qquad \overline{x}_1 = \overline{x} - \frac{\overline{\vartheta}}{\overline{\vartheta}'} x', \tag{87}$$

wobei die Größen $\vartheta', \overline{\vartheta}'$ vorläufig nur durch Quadraturen gegeben sind:

$$\vartheta'_\alpha = p\,\vartheta_\alpha, \quad \vartheta'_\beta = q\,\vartheta_\beta, \qquad \overline{\vartheta}'_\alpha = \overline{p}\,\overline{\vartheta}_\alpha, \quad \overline{\vartheta}'_\beta = \overline{q}\,\overline{\vartheta}_\beta. \tag{88}$$

Es handelt sich darum, sie noch solchen einschränkenden Bedingungen zu unterwerfen, daß für (x_1) und $(\overline{x}_1)$ die Laplaceschen Transformierten paarweise zusammenfallen.

Durch Differentiieren der ersten Formel (87) ergibt sich:

$$\begin{cases} (x_1)_\alpha = P\left(x_\alpha - \frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta'} x'\right), & (x_1)_\beta = Q\left(x_\beta - \frac{\vartheta_\beta}{\vartheta'} x'\right), \\ P = 1 - \frac{\vartheta}{\vartheta'} p, & Q = 1 - \frac{\vartheta}{\vartheta'} q. \end{cases} \tag{89}$$

Als Laplacesche Gleichung von (x_1) findet man:

$$\begin{cases} (x_1)_{\alpha\beta} = a_1 (x_1)_\alpha + b_1 (x_1)_\beta, \\ a_1 = \frac{Q}{P}\left(a - p\frac{\vartheta_\beta}{\vartheta'}\right), \quad b_1 = \frac{P}{Q}\left(b - q\frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta'}\right), \end{cases} \tag{90}$$

mithin als Ergebnis der auf (x_1) ausgeübten α-Transformation:

$$(91)\qquad \widehat{x}_1 = x_1 - \frac{(x_1)_\alpha}{b_1} = \widehat{x} - \frac{\vartheta - \frac{\vartheta_\alpha}{b}}{\vartheta' - \frac{q}{b}\vartheta_\alpha}\left(x' - \frac{q}{b}x_\alpha\right).$$

Entsprechend soll sich $(\widehat{x}_1)$ auch als β-Transformierte von $(\bar{x}_1)$ darstellen:

$$(92)\qquad \widehat{x}_1 = \bar{x}_1 - \frac{(\bar{x}_1)_\beta}{\bar{a}_1} = \widehat{x} - \frac{\bar{\vartheta} - \frac{\bar{\vartheta}_\beta}{\bar{a}}}{\bar{\vartheta}' - \frac{\bar{p}}{\bar{a}}\bar{\vartheta}_\beta}\left(\bar{x}' - \frac{\bar{p}}{\bar{a}}\bar{x}_\beta\right).$$

Durch Gleichsetzen der Ausdrücke (91), (92) unter Berücksichtigung von (78) und (84) (darin also $\varkappa_0 = 1$, $k_0 = 1$) erhält man die erste der beiden folgenden Gleichungen, die zweite aus der analogen, auf $(\breve{x}_1)$ bezüglichen Entwicklung:

$$(93)\qquad \begin{cases} \bar{\vartheta}' - \frac{\bar{p}}{\bar{a}}\bar{\vartheta}_\beta = \vartheta' - \frac{q}{b}\vartheta_\alpha, \\ \bar{\vartheta}' - \frac{\bar{q}}{\bar{b}}\bar{\vartheta}_\alpha = \varkappa k\left(\vartheta' - \frac{p}{a}\vartheta_\beta\right). \end{cases}$$

Durch Differentiation überzeugt man sich davon, daß diese Gleichungen mit den Systemen (79) und (86) verträglich sind. Sie liefern, wenn $\varkappa k \neq 1$ ist, endliche Ausdrücke für ϑ' und $\bar{\vartheta}'$, die an die Stelle der Quadraturen (88) treten. Wir können sagen: *Konstruiert man zu einem gegebenen Laplaceschen Zyklus (x) ... mittels zweier Transformationen PS und SP, für die $\varkappa k \neq 1$ vorausgesetzt wird, einen umbeschriebenen und einen einbeschriebenen, so sind diese in gleicher Weise noch einem zweiten, eindeutig bestimmten Zyklus (x_1), ..., dem Ergebnis der biharmonischen Transformation, um- bzw. einbeschrieben.* Die beiden, den geometrischen Zusammenhang vermittelnden Zyklen sind durch (77) und (81) dargestellt. Im Sonderfalle $\varkappa k = 1$ liefert (93) nur die Differenz $\bar{\vartheta}' - \vartheta'$; die eine der Größen ϑ', $\bar{\vartheta}'$ ist dann aus (88) durch Quadratur zu ermitteln und erscheint mit einer willkürlichen additiven Konstanten behaftet. Zugleich ergibt sich durch Elimination von $\bar{\vartheta}' - \vartheta'$ aus (93) eine, die beiden Systeme (79) und (86) jetzt koppelnde Relation:

$$(94)\qquad (\bar{p} - \bar{q})\,\vartheta - (\bar{p} - k\bar{q})\,\vartheta + (\bar{p} - q)\frac{\vartheta_\alpha}{b} - (k\bar{q} - p)\frac{\vartheta_\beta}{a} = 0$$

Die aus dieser durch Differentiation folgenden Gleichungen sind von selber erfüllt; sie hat demnach die Bedeutung einer bei der Integration der Systeme (wenn man will: des einen Systems) zu berücksichtigenden Anfangsbedingung. Es gilt also der ergänzende Zusatz: *Im Sonderfalle $\varkappa k = 1$ müssen die beiden auf den Zyklus (x) ... ausgeübten Trans-*

formationen PS und SP der Bedingung (94) *genügen; dann ergibt die biharmonische Transformation einen linearen Büschel von* ∞^1 *Laplaceschen Zyklen, die sämtlich, ebenso wie der gegebene, dem einen der beiden zur Konstruktion verwendeten Zyklen einbeschrieben und gleichzeitig dem anderen umbeschrieben sind.*

§ 4.

Anwendung simultaner asymptotischer Transformationen auf die Brennmäntel der Diagonalstrahlensysteme.

1. Wir kommen nunmehr zum wichtigsten Teil der Untersuchung: der Auffindung *solcher Transformationen eines viergliedrigen Laplaceschen Zyklus* $(x)\ldots$, *bei denen die Brennmäntelpaare der von den Diagonalstrahlen* $\overline{x}\,x$ *und* $\widehat{x}\,\breve{x}$ *durchlaufenen W-Kongruenzen simultane asymptotische Transformationen erfahren.* Dazu dient die Betrachtung der am Schluß von § 3, 3 erwähnten linearen Büschel harmonischer Transformationen *PS* und *SP*. Wir bevorzugen den Prozeß *SP*, also die Konstruktion des von den Strahlenschnittpunkten gebildeten Zyklus der *abgeleiteten* Netze, bemerken aber vorweg, daß sich die so erhaltene Operation mit der inversen (linearer *PS*-Büschel und Enveloppennetze) als äquivalent erweist, sobald man in der Zuordnung zwischen den Netzen des gegebenen und des transformierten Zyklus bei dem einen von beiden eine Vertauschung der gegenüberliegenden Netze vornimmt.

Es seien also $\vartheta, \overline{\vartheta}$ und $\vartheta^{(0)}, \overline{\vartheta}^{(0)}$ zwei Lösungspaare von (86) für den gleichen Wert der Konstanten k. Nach § 3, 3 gehört dann das mittels $\vartheta, \vartheta^{(0)}$ aus (x) gewonnene abgeleitete Netz (x^*), dargestellt durch (48), wieder einem Laplaceschen Zyklus $(x^*)(\widehat{x}^*)(\overline{x}^*)(\breve{x}^*)$ an. Der Übergang zu diesem neuen Zyklus läßt sich nun als eine in analytischer und geometrischer Hinsicht selbständige Operation behandeln. Dazu sei gesetzt:

$$\text{(95)}\quad \lambda = \vartheta_\beta\,\vartheta^{(0)} - \vartheta^{(0)}_\beta\,\vartheta, \quad \mu = -\,(\vartheta_\alpha\,\vartheta^{(0)} - \vartheta^{(0)}_\alpha\,\vartheta), \quad \nu = \vartheta_\alpha\,\vartheta^{(0)}_\beta - \vartheta^{(0)}_\alpha\,\vartheta_\beta.$$

An die Stelle von (48) tritt die Formel:

$$\text{(96)}\qquad x^* = x + \frac{1}{\nu}\,(\lambda\,x_\alpha + \mu\,x_\beta).$$

Wir nehmen drei weitere Hilfsgrößen hinzu:

$$\text{(97)}\quad \sigma = \overline{\vartheta}\,\vartheta^{(0)}_\alpha - \overline{\vartheta}^{(0)}\vartheta_\alpha, \quad \tau = \overline{\vartheta}\,\vartheta^{(0)}_\beta - \overline{\vartheta}^{(0)}\vartheta_\beta, \quad \chi = \overline{\vartheta}\,\vartheta^{(0)} - \overline{\vartheta}^{(0)}\,\vartheta.$$

Zwischen den sechs Funktionen besteht die Relation:

$$\text{(98)}\qquad \lambda\,\sigma + \mu\,\tau + \nu\,\chi = 0.$$

Um Differentialgleichungen zur direkten Bestimmung von λ, μ, ν, σ, τ, χ aufzustellen, bilden wir mit Hilfe von (86) die Ableitungen, die sich dann, ohne daß es besonderer Umformungen bedarf, durch dieselben sechs Größen

linear und homogen ausdrücken. Wir finden das unbeschränkt integrable System:

$$
(99)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lambda_\alpha &= b\lambda - a\mu - \nu, & \lambda_\beta &= \left(a + \frac{a_\beta}{a} + \overline{A}\right)\lambda + \frac{a\overline{A}}{k}\chi, \\
\mu_\alpha &= \left(b + \frac{b_\alpha}{b} + \overline{B}\right)\mu - b\overline{B}\chi, & \mu_\beta &= -b\lambda + a\mu - \nu, \\
\nu_\alpha &= b\overline{B}\lambda + \left(2\mathrm{b} + \frac{b_\alpha}{\bar{b}} + \overline{B}\right)\nu & \nu_\beta &= a\overline{A}\mu + \left(2a + \frac{a_\beta}{a} + \overline{A}\right)\nu \\
&\qquad + b\overline{B}\tau, & &\qquad - \frac{a\overline{A}}{k}\sigma, \\
\sigma_\alpha &= -k\bar{b}\mu - k\frac{\bar{b}}{a}\nu & \sigma_\beta &= -\bar{a}\mu + (a + \bar{a})\sigma + b\tau, \\
&\qquad + \left(b + \frac{b_\alpha}{\bar{b}} + \bar{b} + \overline{B}\right)\sigma - b\overline{B}\chi, & & \\
\tau_\alpha &= k\bar{b}\lambda + a\sigma + (b + \bar{b})\tau, & \tau_\beta &= \bar{a}\lambda + \frac{\bar{a}}{b}\nu \\
& & &\qquad + \left(a + \frac{a_\beta}{a} + \bar{a} + \overline{A}\right)\tau - a\overline{A}\chi, \\
\chi_\alpha &= k\frac{\bar{b}}{a}\lambda + \sigma + \bar{b}\chi, & \chi_\beta &= -\frac{\bar{a}}{b}\mu + \tau + \bar{a}\chi.
\end{aligned}
\right.
$$

Es hat das Bestehen einer Relation von der Form:

$$\frac{1}{\Delta}(\lambda\sigma + \mu\tau + \nu\chi) = \mathrm{const}$$

zur Folge, wobei wie in (72) wieder $\Delta = (x_\alpha,\ x_\beta,\ \bar{x} - x)$ ist. Zur Bestätigung hat man mit Benutzung von (73) zu differentiieren. Danach erscheint (98) als eine den Anfangswerten des Lösungssystems auferlegte Bedingung. Für die durch (96), (98), (99) definierte *Transformation* A_k *(„asymptotische“ Transformation) des viergliedrigen Laplaceschen Zyklus* ist der Grad der Allgemeinheit durch das Auftreten von *vier* wesentlichen verfügbaren Konstanten (Anfangswerte der Verhältnisse λ/ν, μ/ν, σ/ν, τ/ν) gekennzeichnet.

Wir überzeugen uns zunächst noch davon, daß sich aus einem Lösungssystem $\lambda, \mu, \ldots$ nun auch umgekehrt zwei den Gleichungen (95), (97) genügende Lösungspaare ϑ, $\bar{\vartheta}$ und $\vartheta^{(0)}$, $\bar{\vartheta}^{(0)}$ von (86) herleiten lassen. Damit ist dann einmal gezeigt, daß als Ergebnis der Transformation A_k tatsächlich wieder ein Laplacescher Zyklus vorliegt, außerdem aber, daß gegebener und transformierter Zyklus einen linearen Büschel von ∞^1 Zyklen zulassen, die diesem einbeschrieben und jenem umbeschrieben sind. Aus (96), (97) folgt:

$$\chi\vartheta_\alpha - \sigma\vartheta + \mu\bar{\vartheta} = 0, \qquad \chi\vartheta_\beta - \tau\vartheta - \lambda\bar{\vartheta} = 0.$$

Man hat demnach zur Bestimmung von ϑ, $\overline{\vartheta}$ das System:

$$
(100)\quad \begin{cases} \vartheta_\alpha = \dfrac{1}{\chi}(\sigma\vartheta - \mu\overline{\vartheta}), & \vartheta_\beta = \dfrac{1}{\chi}(\tau\vartheta + \lambda\overline{\vartheta}), \\ \overline{\vartheta}_\alpha = \dfrac{\overline{b}}{a}\Big[k\Big(\dfrac{\tau}{\chi} - a\Big)\vartheta & \overline{\vartheta}_\beta = \dfrac{\overline{a}}{b}\Big[\Big(\dfrac{\sigma}{\chi} - b\Big)\vartheta \\ \qquad + \Big(k\dfrac{\lambda}{\chi} + a\Big)\overline{\vartheta}\Big], & \qquad + \Big(-\dfrac{\mu}{\chi} + \overline{b}\Big)\overline{\vartheta}\Big], \end{cases}
$$

das, wie ersichtlich, *zwei* linear unabhängige Lösungspaare, in der bisherigen Bezeichnung: ϑ, $\overline{\vartheta}$ und $\vartheta^{(0)}$, $\overline{\vartheta}^{(0)}$ besitzt. Was (86) betrifft, so genügt es offenbar, die Laplacesche Gleichung für ϑ zu verifizieren. Man kann das System (100) auch auf eine totale Riccatische Gleichung für $T = \overline{\vartheta}/\vartheta$ zurückführen.

Um die drei übrigen Netze $(\widehat{x}^*)$, $(\overline{x}^*)$, $(\breve{x}^*)$ des transformierten Zyklus darzustellen, hat man in (95), (96) die Größen x, ϑ, $\vartheta^{(0)}$ durch die daraus mittels der Laplaceschen Transformationen hervorgehenden zu ersetzen, zur Bestimmung von $\widehat{x}^*$ also durch $x - x_\alpha/b$, $\vartheta - \vartheta_\alpha/b$, $\vartheta^{(0)} - \vartheta^{(0)}_\alpha/b$. Die Ableitungen sind mit Hilfe von (71), (86) zu bilden, für die dann auftretenden Ausdrücke (95), (97) ist wieder $\lambda, \mu, \ldots$ zu schreiben. Die *Transformation* A_k liefert so den Zyklus:

$$
(101)\quad \begin{cases} x^* = x + \dfrac{1}{\nu}(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta), \\ \widehat{x}^* = x + \dfrac{1}{\mu - \sigma}[\chi x_\alpha + \mu(\overline{x} - x)], \\ \overline{x}^* = x + \dfrac{1}{N}\Big[\dfrac{k}{b}\Big(\dfrac{\tau}{a} - \chi\Big)x_\alpha + \dfrac{1}{a}\Big(-\dfrac{\sigma}{b} + \chi\Big)x_\beta \\ \qquad - k\Big(\dfrac{\lambda}{a} + \dfrac{\mu}{b} + \dfrac{\nu}{a\,b}\Big)(\overline{x} - x)\Big], \\ \qquad N = -k\Big(\dfrac{\lambda}{a} + \dfrac{\mu}{b} + \dfrac{\nu}{a\,b}\Big) + \dfrac{\sigma}{b} - k\dfrac{\tau}{a} - (1 - k)\chi, \\ \breve{x}^* = x + \dfrac{1}{k\lambda + \tau}[-\chi x_\beta + k\lambda(\overline{x} - x)]. \end{cases}
$$

2. Differentiation von x^* unter Verwendung von (71) und (99) ergibt:

$$
(102)\quad \begin{cases} x^*_\alpha = \dfrac{b\overline{B}\lambda}{\nu^2}[(-\lambda - \tau)x_\alpha + (-\mu + \sigma)x_\beta + \nu(\overline{x} - x)], \\ x^*_\beta = \dfrac{a\overline{A}\mu}{\nu^2}\Big[\Big(-\lambda - \dfrac{\tau}{k}\Big)x_\alpha + \Big(-\mu + \dfrac{\sigma}{k}\Big)x_\beta + \nu(\overline{x} - x)\Big]. \end{cases}
$$

Schreibt man in diesen Formeln

$$\lambda x_\alpha + \mu x_\beta + \nu x = \nu x^*$$

und eliminiert dann die Verbindung $\tau x_\alpha - \sigma x_\beta$, so folgt:

$$
(103)\quad \overline{x} = x^* + \frac{\nu}{1 - k}\Big(\frac{x^*_\alpha}{b\overline{B}\lambda} - k\frac{x^*_\beta}{a\overline{A}\mu}\Big).
$$

Das besagt aber, daß die Tangentialebene von (x^*) durch den Punkt $\bar{x}$ geht. Wir haben damit das für die weitere geometrische Betrachtung grundlegende Ergebnis: *Der durch die Transformation A_k erhaltene Lapla-*

cesche Zyklus (x^*), $(\widehat{x}^*)$, $(\overline{x}^*)$, $(\breve{x}^*)$, *dessen Punkte bezüglich in den Tangentialebenen der Netze* (x), $(\widehat{x})$, $(\overline{x})$, $(\breve{x})$ *des gegebenen liegen, hat die Eigenschaft, daß auch umgekehrt seine Tangentialebenen die vier Punkte des gegebenen Zyklus, aber in der Folge* $\overline{x}$, $\breve{x}$, x, $\widehat{x}$ *enthalten.* Dies legt die Vermutung nahe, daß ein gleicher geometrischer Prozeß wie derjenige, der den Zyklus $(x)\ldots$ in $(x^*)\ldots$ überführt, auch den letzteren in den mit dem ursprünglichen Zyklus identischen $(\overline{x})$, $(\breve{x})$, (x), $(\widehat{x})$ verwandelt. Wir behaupten also — und das ist die am Schluß von § 3, **3** in Aussicht gestellte Ergänzung —: *Besteht zwischen zwei viergliedrigen Laplaceschen Zyklen ein solcher Zusammenhang, daß ein linearer Büschel von Zyklen zugleich dem ersten ein- und dem zweiten umbeschrieben ist (Transformation* A_k*), so gibt es auch umgekehrt einen linearen Büschel von Zyklen, die dem ersten umbeschrieben und dem zweiten einbeschrieben sind; dabei erscheinen, verglichen mit der ursprünglichen Zuordnung zwischen den Netzen der beiden Zyklen, in dem einen die gegenüberliegenden Netze vertauscht.*

Um den Beweis mit geringem Aufwand an Rechnung zu führen, denken wir uns den gegebenen Zyklus $(x)\ldots$, abgesehen von der Transformation A_k, noch zwei zu gleichem $\varkappa$ gehörigen Transformationen PS unterworfen, wobei $\varkappa = 1/k$ gesetzt sei. Die nach (50) zu bestimmenden *Enveloppennetze* bilden dann einen weiteren Laplaceschen Zyklus, dessen Strahlen durch die Punkte der beiden zur Konstruktion benutzten Zyklen gehen. Mit diesen zugleich ist ein linearer Büschel von Zyklen dem gegebenen umbeschrieben und dem Zyklus der Enveloppennetze einbeschrieben (s. § 3, **3** am Schluß). Es seien also p, q, $\overline{p}$, $\overline{q}$ und $p^{(0)}$, $q^{(0)}$, $\overline{p}^{(0)}$, $\overline{q}^{(0)}$ zwei Lösungssysteme von (79), die wir weiterhin so spezialisieren müssen, daß der Zyklus der aus $(\overline{x})$, $(\breve{x})$, (x), $(\widehat{x})$ konstruierten Enveloppennetze mit dem durch die Transformation A_k erhaltenen, durch (101) dargestellten Zyklus (x^*), $(\widehat{x}^*)$, $(\overline{x}^*)$, $(\breve{x}^*)$ zusammenfällt. Gelingt dies, so ist die Behauptung bewiesen. Wir betrachten insbesondere das zu $(\overline{x})$ gehörige Enveloppennetz (x^*), wobei für den Augenblick x^* als eine *neu eingeführte Bezeichnung* aufgefaßt werde. Die Fläche (x^*) ist also Enveloppe der Ebene, die durch die beiden vom Punkte $\overline{x}$ ausgehenden Strahlen mit den Richtungen [s. (80)]:

$$(104)\quad \left\{\begin{aligned} \overline{x}' &= \frac{1}{1-k}\left[(\overline{p}-q)\frac{x_\alpha}{b} - (k\overline{p}-p)\frac{x_\beta}{a} + (\overline{p}-k\overline{q})(\overline{x}-x)\right],\\ \overline{x}'' &= \frac{1}{1-k}\left[(\overline{p}^{(0)}-q^{(0)})\frac{x_\alpha}{b} - (k\overline{p}^{(0)}-p^{(0)})\frac{x_\beta}{a} + (\overline{p}^{(0)}-k\overline{q}^{(0)})(\overline{x}-x)\right]\end{aligned}\right.$$

gelegt ist. Nach (50) ist dann:

$$(105)\qquad x^* = \overline{x} + \overline{u}\,\overline{x}' + \overline{v}\,\overline{x}'';$$

die Koeffizienten $\overline{u}$, $\overline{v}$ bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$(106)\qquad \overline{u}\,\overline{p} + \overline{v}\,\overline{p}^{(0)} + 1 = 0, \qquad \overline{u}\,\overline{q} + \overline{v}\,\overline{q}^{(0)} + 1 = 0.$$

Setzt man die Ausdrücke (104) in die Formel (105) ein, so vereinfacht sich diese infolge von (106):

$$(107)\quad x^* = x + \frac{1}{1-k}\left[-(\bar u q + \bar v q^{(0)} + 1)\frac{x_\alpha}{b} + (\bar u p + \bar v p^{(0)} + k)\frac{x_\beta}{a}\right].$$

Damit ist, als Gegenstück zu dem in (103) enthaltenen Ergebnis, gezeigt, daß der Punkt x^* in der Tangentialebene der Fläche (x) liegt.

Wir können nun den Größen $p, q, \bar p, \bar q$ die besonderen Bedingungen

$$(108)\quad \begin{cases} (\bar p - \bar q)\bar\vartheta \;-(\bar p - k\bar q)\vartheta \;+(\bar p - q)\dfrac{\vartheta_\alpha}{b} - (k\bar q - p)\dfrac{\vartheta_\beta}{a} = 0, \\ (\bar p - \bar q)\bar\vartheta^{(0)} - (\bar p - k\bar q)\vartheta^{(0)} + (\bar p - q)\dfrac{\vartheta_\alpha^{(0)}}{b} - (k\bar q - p)\dfrac{\vartheta_\beta^{(0)}}{a} = 0 \end{cases}$$

auferlegen, d. h. zweimal die Relation (94) ansetzen, die ja unter der Annahme $\varkappa k = 1$ mit dem System (79) verträglich ist und nur die im allgemeinen Falle auf der rechten Seite stehende Konstante spezialisiert. Multipliziert man die Gleichungen (108) mit $\vartheta_\beta^{(0)}$, ϑ_β bzw. mit $\vartheta_\alpha^{(0)}$, ϑ_α und subtrahiert, so ergibt sich mit Berücksichtigung von (95), (97):

$$(109)\quad \begin{cases} (\bar p - \bar q)\tau + (\bar p - k\bar q)\lambda + (\bar p - q)\dfrac{\nu}{b} = 0, \\ (\bar p - \bar q)\sigma - (\bar p - k\bar q)\mu + (k\bar q - p)\dfrac{\nu}{a} = 0. \end{cases}$$

Werden diese beiden Gleichungen, in denen $\lambda, \mu, \ldots$ also ein bereits als bekannt vorausgesetztes Lösungssystem von (98), (99) vorstellen, zu dem System der Differentialgleichungen (79) hinzugefügt, so reduziert sich letzteres, da sich $\bar p$, $\bar q$ durch p, q ausdrücken lassen, auf ein Paar linearer totaler Differentialgleichungen für das Funktionenpaar p, q, das dann zwei Lösungspaare besitzt; mit anderen Worten: (79) im Verein mit (109) läßt noch *zwei* linear unabhängige Lösungssysteme $p, q, \bar p, \bar q$ und $p^{(0)}, q^{(0)}, \bar p^{(0)}, \bar q^{(0)}$ zu, liefert mithin einen eindeutig bestimmten linearen Büschel harmonischer Transformationen PS. Zu (109) treten hiernach die analogen Relationen hinzu:

$$(110)\quad \begin{cases} (\bar p^{(0)} - \bar q^{(0)})\tau + (\bar p^{(0)} - k\bar q^{(0)})\lambda + (\bar p^{(0)} - q^{(0)})\dfrac{\nu}{b} = 0, \\ (\bar p^{(0)} - \bar q^{(0)})\sigma - (\bar p^{(0)} - k\bar q^{(0)})\mu + (k\bar q^{(0)} - \bar p^{(0)})\dfrac{\nu}{a} = 0. \end{cases}$$

Addiert man von (109) und (110) die ersten Gleichungen nach Multiplikation mit $\bar u$ und $\bar v$ und verfährt ebenso mit den zweiten, so folgt mittels (106):

$$(111)\quad \frac{\lambda}{\nu} = \frac{1}{(1-k)\,b}(\bar u q + \bar v q^{(0)} + 1), \quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{(1-k)\,a}(\bar u p + \bar v p^{(0)} + k).$$

Das sind aber die Koeffizienten in der Formel (107). In Übereinstimmung mit (101) finden wir also — und damit ist der Beweis beendigt —:

$$x^* = x + \frac{1}{\nu}(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta).$$

3. Um nun die am Anfang des Paragraphen angekündigte interessanteste Eigenschaft der Transformation A_k herzuleiten, stellen wir die nach dem Voraufgehenden statthabenden Inzidenzen von Punkt und Ebene in einem Schema zusammen. Wir bezeichnen dabei eine jede der acht Ebenen der beiden einander ein- und umbeschriebenen Vierflache $x\,\widehat{x}\,\overline{x}\,\widecheck{x}$ und $x^*\,\widehat{x}^*\,\overline{x}^*\,\widecheck{x}^*$ durch die drei Punkte in solcher Reihenfolge, daß sie *Schmiegungsebene der von dem ersten Punkt durchlaufenen α-Kurve, Tangentialebene der von dem zweiten Punkt beschriebenen Fläche* und endlich *Schmiegungsebene der β-Kurve des dritten Punktes* wird; so ist z. B. die Ebene $x\,\widehat{x}\,\overline{x}$ gleichzeitig Schmiegungsebene der α-Kurve von (x) und der β-Kurve von $(\overline{x})$ und außerdem Tangentialebene von $(\widehat{x})$. Es liegt

(I)		(II)	
Punkt x^* in der Ebene	$\widecheck{x}\,x\,\widehat{x}$,	Punkt $\overline{x}$ in der Ebene	$\widecheck{x}^*\,x^*\,\widehat{x}^*$,
„ $\widehat{x}^*$ „ „ „	$x\,\widehat{x}\,\overline{x}$,	„ $\widecheck{x}$ „ „ „	$x^*\,\widehat{x}^*\,\overline{x}^*$,
„ $\overline{x}^*$ „ „ „	$\widehat{x}\,\overline{x}\,\widecheck{x}$,	„ x „ „ „	$\widehat{x}^*\,\overline{x}^*\,\widecheck{x}^*$,
„ $\widecheck{x}^*$ „ „ „	$\overline{x}\,\widecheck{x}\,x$,	„ $\widehat{x}$ „ „ „	$\overline{x}^*\,\widecheck{x}^*\,x^*$

Der Sachverhalt ist nun derart, daß der Satz von § 1 angewendet werden kann. Gegenüberliegende Netze (α, β) im viergliedrigen Laplaceschen Zyklus sind *schmiegungsverwandt*; das gilt insbesondere von (x), $(\overline{x})$ einerseits, von $(\widehat{x}^*)$, $(\widecheck{x}^*)$ andererseits. Aus (I) entnimmt man: $\widehat{x}^*$ liegt in der Schmiegungsebene der α-Kurve von (x), aus (II): x in der Schmiegungsebene der α-Kurve von $(\widehat{x}^*)$. In der Geraden $x\,\widehat{x}^*$ schneiden sich also zwei Schmiegungsebenen *gleichnamiger*, von den Punkten x und $\widehat{x}^*$ beschriebener Kurven. Gleiches bestätigt man an Hand des Schemas für $x\,\widecheck{x}^*$, $\overline{x}\,\widehat{x}^*$, $\overline{x}\,\widecheck{x}^*$. Damit ist aber die Voraussetzung unseres Hilfssatzes erfüllt; die von den Geraden $x\,\overline{x}$ und $\widehat{x}^*\,\widecheck{x}^*$ gebildeten W-Kongruenzen sind demnach durch asymptotische Transformationen ihrer Brennmäntelpaare verknüpft. Dieselbe Beziehung besteht zwischen den W-Kongruenzen der Geraden $\widehat{x}\,\widecheck{x}$ und $x^*\,\overline{x}^*$. Wir haben so den Satz bewiesen: *Wird ein viergliedriger Laplacescher Zyklus* $(x)\,(\widehat{x})\,(\overline{x})\,(\widecheck{x})$ *mittels der durch* (98), (99), (101) *definierten Transformation A_k in den neuen Zyklus* $(x^*)\,(\widehat{x}^*)\,(\overline{x}^*)\,(\widecheck{x}^*)$ *übergeführt, so hängen die Diagonalstrahlensysteme, und zwar in der Zuordnung: $x\,\overline{x}$ und $\widehat{x}^*\,\widecheck{x}^*$, $\widehat{x}\,\widecheck{x}$ und $x^*\,\overline{x}^*$, durch simultane asymptotische Transformationen ihrer Brennmäntelpaare (die reell oder konjugiert-imaginär sein können) zusammen.*

§ 5.

Ein involutorischer Transformationsprozeß, der Strahlrichtungen und Normalenrichtungen vertauscht.

1. Wir stellen nun zuletzt im Anschluß an § 2, 5 noch eine Transformation auf, die als eine Art Vertauschungsprozeß im Gegensatz zu den bisher behandelten Methoden weder von einer charakteristischen Konstanten noch von wesentlichen Integrationskonstanten abhängt. Es soll gezeigt werden: *Ein viergliedriger Laplacescher Zyklus kann stets einer bis auf einen Maßstabsfaktor und Translationen eindeutig bestimmten, involutorischen Transformation unterworfen werden, bei der die Richtungen der vier Strahlen zu Richtungen der vier Flächennormalen und umgekehrt die Normalenrichtungen zu Strahlenrichtungen werden.* Die am Schluß von § 2 in Satz III für die Laplaceschen Ketten ausgesprochene Eigenschaft überträgt sich dann auf die Zyklen: *Die durch die involutorische Transformation verknüpften Laplaceschen Zyklen sind kontragredient: den Laplaceschen α-Transformationen des einen sind die β-Transformationen des anderen zugeordnet.*

Nach (62), (64) sind, wenn φ Lösung der Laplaceschen Gleichung ist, durch

$$(112)\quad \begin{cases} \text{(a)} & \sum \mathfrak{x}^{(1)} x_\alpha = \varphi_\alpha, \quad \sum \mathfrak{x}^{(1)} x_\beta = \varphi_\beta, \quad \sum \mathfrak{x}^{(1)} x_{\alpha\alpha} = \varphi_{\alpha\alpha}, \\ \text{(b)} & \sum \mathfrak{x}^{(2)} x_\alpha = \varphi_\alpha, \quad \sum \mathfrak{x}^{(2)} x_\beta = \varphi_\beta, \quad \sum \mathfrak{x}^{(2)} x_{\beta\beta} = \varphi_{\beta\beta} \end{cases}$$

die Brennmäntel $(\mathfrak{x}^{(1)})$ und $(\mathfrak{x}^{(2)})$ einer Kongruenz mit den Developpablen (α, β) gegeben: x_α ist für $(\mathfrak{x}^{(1)})$, x_β für $(\mathfrak{x}^{(2)})$ die Richtung der Flächennormalen. Der Strahl $\mathfrak{x}^{(1)} \mathfrak{x}^{(2)}$ hat die Richtung $y_\alpha z_\beta - z_\alpha y_\beta$ der Flächennormalen von (x) und ist α-Tangente von $(\mathfrak{x}^{(1)})$, β-Tangente von $(\mathfrak{x}^{(2)})$. Um die von dem konjugierten Netz $(\mathfrak{x}^{(1)})$ ausgehende Laplacesche Kette zu konstruieren, hat man in (112a) auf x und φ die Laplaceschen Transformationen anzuwenden.

Es sei nun $\overline{\varphi}$ das Ergebnis zweier nacheinander auf φ ausgeübter α-Transformationen, also definiert durch die Gleichung:

$$(113)\qquad \varphi_{\alpha\alpha} = \left(b + \frac{b_\alpha}{b} + \overline{B}\right) \varphi_\alpha + b\, \overline{B}(\overline{\varphi} - \varphi),$$

die dann auch die Beziehung

$$(114)\qquad \varphi - \frac{\varphi_\alpha}{b} = \overline{\varphi} - \frac{\overline{\varphi}_\beta}{\overline{a}}$$

zur Folge hat. Zu $\overline{x}$, $\overline{\varphi}$ gehört das Netz $(\overline{\mathfrak{x}}^{(1)})$, bestimmt durch:

$$(115)\qquad \sum \overline{\mathfrak{x}}^{(1)} \overline{x}_\alpha = \overline{\varphi}_\alpha, \qquad \sum \overline{\mathfrak{x}}^{(1)} \overline{x}_\beta = \overline{\varphi}_\beta, \qquad \sum \overline{\mathfrak{x}}^{(1)} \overline{x}_{\alpha\alpha} = \overline{\varphi}_{\alpha\alpha},$$

das aus $(\mathfrak{x}^{(1)})$ also durch zwei aufeinander folgende β-Transformationen hervorgeht. Wir beachten, daß sich $\overline{\varphi}$ nach (115) durch die Formel:

$$\overline{\varphi} = \int \Sigma\, \overline{\mathfrak{x}}^{(1)}\, d\,\overline{x} \tag{116}$$

ausdrücken läßt. Daraus muß aber geschlossen werden, daß an die Stelle von $\overline{\varphi}$ nur $\overline{\varphi} + C$ ($C = \text{const}$) treten kann, wenn $(\mathfrak{x}^{(1)})$ durch zwei sukzessive α-Transformationen, denen auf x, φ ausgeübte β-Transformationen entsprechen, in dasselbe konjugierte Netz $(\overline{\mathfrak{x}}^{(1)})$ übergeführt werden soll. Wir können, wobei wir nur über den Maßstab des transformierten Zyklus verfügen, $C = 1$ setzen und erhalten, indem wir zu (113), (114) die analog gebildeten Relationen, in denen also $\overline{\varphi} + 1$ an Stelle von $\overline{\varphi}$ steht, sowie die Laplacesche Gleichung für φ hinzufügen, das folgende System:

$$\left\{\begin{aligned}
\overline{\varphi}_\alpha &= \frac{\overline{b}}{a}\,\varphi_\beta + \overline{b}(\overline{\varphi} - \varphi + 1), \quad \overline{\varphi}_\beta = \frac{\bar{a}}{b}\,\varphi_\alpha + \bar{a}(\overline{\varphi} - \varphi),\\
\varphi_{\alpha\alpha} &= \left(b + \frac{b_\alpha}{b} + \overline{B}\right)\varphi_\alpha + b\,\overline{B}(\overline{\varphi} - \varphi),\\
\varphi_{\alpha\beta} &= a\,\varphi_\alpha + b\,\varphi_\beta,\\
\varphi_{\beta\beta} &= \left(a + \frac{a_\beta}{a} + \overline{A}\right)\varphi_\beta + a\,\overline{A}(\overline{\varphi} - \varphi + 1).
\end{aligned}\right. \tag{117}$$

Die Integrabilitätsbedingungen erweisen sich als erfüllt. Die Existenz der neuen Transformation steht damit fest. Erforderlich wäre eine partikuläre Lösung φ, $\overline{\varphi}$ von (117), da sich die allgemeine Lösung in der Form

$$\varphi + c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_0, \qquad \overline{\varphi} + c_1 \overline{x} + c_2 \overline{y} + c_3 \overline{z} + c_0$$

darstellt und c_1, c_2, c_3 — c_0 ist belanglos —, wie aus (112a) zu ersehen ist, in $\mathfrak{x}^{(1)}$, $\mathfrak{y}^{(1)}$, $\mathfrak{z}^{(1)}$ als additive Konstanten erscheinen, also nur eine Translation bewirken. Man überzeugt sich gleichzeitig davon, daß die Annahme $C = 0$ bedeutungslos ist. Das im folgenden zur Darstellung des transformierten Zyklus $(\mathfrak{x}^{(1)})\,(\mathfrak{x}^{(2)})\,(\overline{\mathfrak{x}}^{(1)})\,(\overline{\mathfrak{x}}^{(2)})$ benutzte Verfahren deckt sich, vom analytischen Standpunkt betrachtet, mit dem Übergang von der allgemeinen Lösung des *homogenen* Systems (71) zur Lösung φ, $\overline{\varphi}$ des *inhomogenen* (117).

2. Da für das Netz $(\mathfrak{x}^{(1)})$ die α- und die β-Tangente parallel zu den Flächennormalen von (x) und $(\overline{x})$ sind, kann jedenfalls gesetzt werden:

$$\mathfrak{x}_\alpha^{(1)} = \mathfrak{m}\,(y_\alpha z_\beta - z_\alpha y_\beta), \qquad \mathfrak{x}_\beta^{(1)} = \mathfrak{n}\,[y_\alpha(\overline{z} - z) - z_\alpha(\overline{y} - y)]. \tag{118}$$

Zwecks Ermittlung der Faktoren $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ sei zunächst bemerkt, daß nach (112a):

$$\varphi = \int \Sigma\, \mathfrak{x}^{(1)}\, d\,x \tag{119}$$

wird. Wir nehmen die dritte Formel von (112a) und drücken links in der Summe $x_{\alpha\alpha}$ mittels (71), rechts $\varphi_{\alpha\alpha}$ mittels (117) aus und finden:

$$\bar{\varphi} = \varphi + \sum \mathfrak{x}^{(1)} (\bar{x} - x). \tag{120}$$

Wird diese Gleichung nach α differentiiert, so ergibt sich mit Benutzung von (71), (72), (117), (118): $\mathfrak{m} = \bar{b}/\varDelta$. Differentiation der Gleichung $\varphi_\beta = \sum \mathfrak{x}^{(1)} x_\beta$ nach β liefert: $\mathfrak{n} = -a\bar{A}/\varDelta$. Damit ist $(\mathfrak{x}^{(1)})$ durch Quadraturen dargestellt:

$$\mathfrak{x}^{(1)} = \int \left\{ \frac{\bar{b}}{\varDelta}(y_\alpha z_\beta - z_\alpha y_\beta)\, d\alpha - \frac{a\bar{A}}{\varDelta}[y_\alpha(\bar{z} - z) - z_\alpha(\bar{y} - y)]\, d\beta \right\}. \tag{121}$$

Zugleich hat man in (119), (120) die Lösung φ, $\bar{\varphi}$ des Systems (117)[17]).

Die Konstruktion der übrigen Netze des transformierten Zyklus bietet keine Schwierigkeiten. Wir beschränken uns darauf, die Formel für $\mathfrak{x}^{(2)}$ herzuleiten. Da $\mathfrak{x}^{(1)}\mathfrak{x}^{(2)}$ die α-Tangente von $(\mathfrak{x}^{(1)})$ ist, gilt nach (118) der Ansatz:

$$\mathfrak{x}^{(2)} = \mathfrak{x}^{(1)} + h(y_\alpha z_\beta - z_\alpha y_\beta).$$

Multipliziert man mit $x_{\beta\beta}$, rechts dafür den aus (71) entnommenen Ausdruck einsetzend, und summiert danach über das Gleichungstripel, so folgt mit Hilfe von (112b): $h = 1/\varDelta$. Der *durch die involutorische Transformation erhaltene viergliedrige Laplacesche Zyklus*, angeordnet im Sinne der α-Transformationen, ist dann durch (121) und die folgenden Formeln bestimmt:

$$\tag{122} \begin{cases} \mathfrak{x}^{(2)} = \mathfrak{x}^{(1)} + \frac{1}{\varDelta}(y_\alpha z_\beta - z_\alpha y_\beta), \\ \bar{\mathfrak{x}}^{(1)} = \mathfrak{x}^{(1)} + \frac{1}{\varDelta}(y_\alpha z_\beta - z_\alpha y_\beta) - \frac{b}{\varDelta}[y_\beta(\bar{z} - z) - z_\beta(\bar{y} - y)], \\ \bar{\mathfrak{x}}^{(2)} = \mathfrak{x}^{(1)} - \frac{a}{\varDelta}[y_\alpha(\bar{z} - z) - z_\alpha(\bar{y} - y)]. \end{cases}$$

Angemerkt sei noch, daß die beiden Diagonalstrahlen $\mathfrak{x}^{(1)}\bar{\mathfrak{x}}^{(1)}$ und $\mathfrak{x}^{(2)}\bar{\mathfrak{x}}^{(2)}$, die also wieder zwei W-Kongruenzen durchlaufen, parallel zu den gemeinschaftlichen Loten der im ursprünglichen Zyklus einander gegenüberliegenden Strahlen sind.

---

[17]) Anschließend kann man die Aufgabe erledigen: diejenigen konjugierten Netze zu ermitteln, bei denen eine Folge von vier Laplaceschen Transformationen auf ein kongruentes, durch Parallelverschiebung entstandenes Netz führt.

(Eingegangen am 11. 3. 1937.)

721/7/37 — V/12/6